



уже существующие комплексы системами экспертной поддержки для решения рассмотренного класса задач оптимального управления, что существенно повышает эффективность работы пользователей, не имеющих достаточной квалификации в рассматриваемой проблемной области. Еще одним преимуществом предложенного подхода является возможность независимой модернизации управляющей и исполнительской компонент комплекса.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 06-07-89215, 07-07-00265, 08-07-00172 и РГНФ 07-02-12112.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Федоренко, Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления.- М.: Наука, 1978.- 488 с.
2. Евтушенко, Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.- М.: Наука, 1982.- 432 с.
3. Тятюшкин, А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем.- Новосибирск: Наука, 1992.- 193 с.
4. Горнов, А.Ю., Диваков, А.О. Программный комплекс OPTCON для решения задач оптимального управления. Руководство пользователя.- Иркутск, 1990.- 36 с.
5. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.- М: Наука, 1985.
6. Холодниок, М., Клич, А., Кубичек, М., Марек, М. Методы анализа нелинейных динамических моделей.- М.:Мир, 1991.- 368 с.
7. Частиков, А.П., Гаврилова, Т.А., Белов, Д.Л. Разработка экспертных систем. Среда CLIPS. ВHV.-СПб, 2003.- 608 с.

Новиков М.А.

УДК 531.36

ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ТЕОРЕМА ФИНСЛЕРА

Введение.

Необходимость применения форм выше второго порядка возникает в теории устойчивости движения [1] при использовании второго метода Ляпунова, и в качественной теории дифференциальных уравнений [2]. По вопросу о знакоопределенности форм $V(x)$ выше квадратичных имеется ряд публикаций, например [3-8]. Обратим внимание на следующие работы: предложенный в [4] подход составляет только достаточные условия знакоопределенности однородных и неоднородных форм любого числа переменных, исследования в [3, 8] проведены прямым анализом корней уравнения $V(z, 1)$ для формы четвертого порядка двух переменных $V(x_1, x_2)$, при этом они дают необходимые и достаточные условия знакоопределенности. Очевидны трудности, препятствующие их распространению на большее число переменных. Применение Ганкелевых форм [5-7] позволяет получать необходимые и достаточные условия знакоопределенности форм двух переменных, и легко допускает повышение порядка форм. В его осно-

ве лежит теорема Якоби [9], опирающаяся на теорему Штурма [10, 11] определения числа вещественных корней уравнения $V(z, 1) = 0$ на заданном отрезке $(-\infty, +\infty)$. Указанные методы получения необходимых и достаточных условий знакоопределенности однородных форм не допускают прямого распространения на формы большего числа переменных.

В связи с этим в статье изложен новый подход к вопросу о знакоопределенности однородных форм четвертого порядка двух переменных

$$\Phi(x, y) = x^4 + px^2y^2 + qxy^3 + ry^4, \quad (1)$$

где $x, y \in R$; p, q, r — вещественные ($r > 0$).

§ 1. Редукция формы четвертого порядка к квадратичной форме.

Метод исследования знакоопределенности (1) состоит в сведении к квадратичным формам [9]. Для формы (1) составим степенную замену переменных:

$$z_1 = x^2, \quad z_2 = xy, \quad z_3 = y^2. \quad (1.1)$$



При подстановке (1.1) форма (1) может иметь два вида представления квадратичными формами:

$$1) \Phi_1(z) = z_1^2 + a_3 z_1 z_2 + a_2 z_2^2 + a_1 z_2 z_3 + a_0 z_3^2;$$

$$2) \Phi_2(z) = z_1^2 + a_3 z_1 z_2 + a_2 z_1 z_3 + a_1 z_2 z_3 + a_0 z_3^2.$$

При этом имеет место зависимость в виде квадратичной формы:

$$\Phi_3(z) = 2z_2^2 - 2z_1 z_3 = 0. \quad (1.2)$$

Соответствующие матрицы квадратичных форм будут такими:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & q/2 \\ 0 & q/2 & r \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p/2 \\ 0 & p & q/2 \\ p/2 & q/2 & r \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При первом или втором соответствии мономов областью определения квадратичных форм $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\Phi_3(z)$ можно выбрать множество: $\{Q: z_1, z_3 \geq 0; z_2 \in R\}$. Следовательно, получаемые по критерию Сильвестра условия знакоопределенности формы $\Phi_1(z)$ в $z \in R^3$, будут так же необходимыми и достаточными условиями знакоопределенности $\Phi_1(z)$ в области $z \in Q$. Формы $\Phi_i(z)$ связаны соотношением: $\Phi_1(z) = \Phi_2(z) + \Phi_3(z)/2 = \Phi_2(z)$. Поэтому достаточно провести анализ только формы $\Phi_1(z)$.

Таким образом, доказано

Утверждение 1. Задаче о знакоопределенности однородной формы (1) можно однозначно сопоставить задачу об условной знакоопределенности квадратичной формы $\Phi_1(z)$ при условии обращения в нуль другой квадратичной формы $\Phi_3(z) = 0$.

Непосредственно из теоремы Финслера [12] следует, что для положительной определенности квадратичной формы $\Phi_1(z)$ при условии $\Phi_3(z) = 0$ необходимо и достаточно при некотором вещественном значении λ положительной определенности связки форм:

$$K(z, \lambda) = \Phi_1(z) - \lambda \Phi_3(z) = z_1^2 + 2\lambda z_1 z_3 + (p - 2\lambda) z_2^2 + q z_2 z_3 + r z_3^2. \quad (1.3)$$

Следовательно, форме $\Phi(x, y)$ сопоставляется однопараметрическое семейство квадратичных форм (1.3) с матрицей

$$B(\lambda) = A_1 - \lambda A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & (p - 2\lambda) & q/2 \\ \lambda & q/2 & r \end{pmatrix}.$$

Таким образом, доказано следующее.

Утверждение 1'. Задача о положительной определенности квадратичной формы

$\Phi(x, y)$ эквивалентна задаче о положительной определенности связки квадратичных форм $K(z, \lambda)$.

В соответствии с теоремой Финслера [12] проведем исследование знакоопределенности связки форм (1.3), для этого выпишем главные миноры параметрической матрицы $B(\lambda)$:

$$J_1 = 1, J_2(\lambda) = p - 2\lambda, \\ J_3(\lambda) = 2\lambda^3 - p\lambda^2 - 2r\lambda + pr - q^2/4.$$

Используя критерий Сильвестра [9], задачу о положительной определенности связки квадратичных форм (1.3) можно сформулировать следующим образом: существуют ли вещественные значения параметра λ , при которых совместна система неравенств:

$$J_2(\lambda) > 0, J_3(\lambda) > 0. \quad (1.4)$$

Принимая во внимание условия знаковостояния и знакопеременности связки форм (1.3), использование критерия Сильвестра можно детализировать:

1. если $\Phi(x, y) >> 0$, то существует область $D_0 = \{\lambda: \lambda < p/2\}$ вещественных значений параметра λ , где всюду $J_2(\lambda) > 0$ и, кроме того, существует область $D_{00} \subset D_0$ ($D_{00} \neq \emptyset$), в которой $J_3(\lambda) > 0$;

2. если $\Phi(x, y)$ знакопостоянна, то существует область $D_1 = \{\lambda: \lambda \leq p/2\}$, в которой $J_3(\lambda) < 0$, и существует область $D_{10} \subset D_1$ ($D_{10} \neq \emptyset$), в которой $J_3(\lambda) = 0$;

3. если $\Phi(x, y)$ знакопеременна, то в области D_1 всюду выполняется $J_2(\lambda) > 0$, $J_3(\lambda) < 0$, а в области $D_2 = \{\lambda: J_3(\lambda) > 0\}$ всюду $J_2(\lambda) < 0$.

При доказательстве и попытке сделать теорему Финслера конструктивной П.А. Кузьмин [12] указал ряд свойств корней характеристического уравнения связки

$$\bar{K}(u, \lambda) = V_1(u) - \lambda V_2(u):$$

$$f(\lambda) = \det \left[\frac{\partial^2 \bar{K}(u, \lambda)}{\partial u_i \partial u_j} \right] = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.5)$$

В случае знакоопределенных связок квадратичных форм такими свойствами являются:

а) вещественность всех корней λ уравнения (1.5);

б) одновременная приводимость линейным неособым конгруэнтным преобразованием к диагональным матриц квадратичных форм $V_1(u)$ и $V_2(u)$;

в) корни уравнения (1.5) "разделены". "Разделенность корней" означает следующее:



1. При необходимости изменяя нумерацию, формы $V_1(u)$ и $V_2(u)$ линейным неособым конгруэнтным преобразованием $u = Tu$ приводятся к

$$\tilde{V}_1(v) = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{(+)} v_i^2 - \sum_{j=k+1}^n \lambda_j^{(-)} v_j^2,$$

$$\tilde{V}_2(v) = \sum_{j=1}^k v_j^2 - \sum_{j=k+1}^n v_j^2.$$

2. Для всех $(i=1, 2, \dots, k, j=k+1, \dots, n)$ выполняется $\lambda_i^{(+)} < \lambda_j^{(-)}$ при отрицательно определенной связке (1.3), либо $\lambda_i^{(+)} > \lambda_j^{(-)}$ при положительно определенной связке форм (1.3). Характеристическое уравнение (1.5) имеет выражение $J_3(\lambda)/2$, которое можно привести к виду:

$$f(\lambda) = 8\lambda^3 - 4p\lambda^2 - 8r\lambda + 4pr - q^2 = 0. \quad (1.6)$$

Исходя только из первого свойства составим некоторые важные результаты.

Теорема 1. Для знакоопределенности связки форм (1.3) необходимо и достаточно, чтобы наименьший из вещественных корней уравнения (1.6) был не кратным и принимал значения, меньшие чем $p/2$.

Доказательство. Необходимость. Пусть связка форм знакоопределена. Первое свойство П.А. Кузьмина сразу требует существования трех действительных корней уравнения (1.6), расположенных в порядке возрастания: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. Искомые решения λ , удовлетворяющие $J_2(\lambda) > 0$, могут находиться только в интервале $I_2 = (\lambda_1, \lambda_2)$. Условие существования интервала I_2 выражается неравенством $\lambda_1 < \lambda_2$. Таким образом, теорема доказана. Отсюда следует.

Замечание 1. Если наименьший действительный корень $\lambda_1 > p/2$, то связка форм (1.3) знакопеременна.

При наименьшем кратном корне уравнения (1.6) справедлива.

Теорема 2. Для того, чтобы связка форм (1.3) была знакопостоянной, необходимо и достаточно, чтобы наименьший из вещественных корней уравнения (1.6) был кратным и не превосходил значения $p/2$.

В терминах корней характеристического уравнения сразу можно сделать определенные выводы для связки форм (1.3):

1) если $p/2 \in [\lambda_2, \lambda_3]$, $\lambda_1 < \lambda_2$, то $K(z, \lambda) > 0$;
 2) если $p/2 \in [\lambda_2, \lambda_3]$, $\lambda_1 = \lambda_2$, то $K(z, \lambda) > 0$;

3) если $p/2 < \lambda_1$ или $I_2 \equiv 0$, $I_3 \equiv 0$, то $K(z, \lambda)$ — знакопеременна. Установим свойства корней уравнения (1.6), участвующие в анализе знакоопределенности связки форм (1.3).

§ 2. Свойства корней характеристического уравнения.

Исследование корней уравнения (1.6) опирается на теорему Виета [9-11], согласно которой:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{p}{2}, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -r, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{8}q^2 - \frac{1}{2}pr. \end{cases} \quad (2.1)$$

Для дальнейшего анализа введем вспомогательные функции корней:

$$T = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3),$$

$$R_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3), R_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3),$$

$$R_3 = (\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3), R = R_1 + R_2 + R_3,$$

$$P = R_1 R_2 R_3. \text{ Будем полагать } r > 0.$$

Утверждение 2. Функция T не может быть положительной на корнях уравнения (1.6) и обращается в нуль только при $q = 0$.

Доказательство. С помощью двух первых равенств (2.1) в выражении T исключим переменные λ_2, λ_3 :

$$T = (\lambda_1^2 - r) \left(\frac{p}{2} - \lambda_1 \right) = - \left(\lambda_1^2 - \frac{p}{2} \lambda_1^2 - r \lambda_1 + \frac{1}{2} pr \right).$$

На корнях уравнения (1.6) тогда получится $T = -q^2/8$, что и доказывает утверждение.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Вещественные корни уравнения (1.6) при $r > 0$ не могут принимать значения одного знака.

Утверждение 3. Функция P всегда неотрицательна на корнях уравнения (1.6) и обращается в нуль только при $q = 0$.

Доказательство. Легко проверить $P = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 (\lambda_1 + \lambda_3)^2 (\lambda_2 + \lambda_3)^2 = T^2 = q^4/64$.

Отсюда следует функция $P > 0$ и обращается в нуль в случае при $q = 0$. Раскрывая выражение R и применяя второе уравнение (2.1), легко показать $R = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3r$. После подстановки

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$$

получится $R = p^2/4 - r$. Представим с учетом формул Виета (2.1):

$$R_1 = \lambda_1^2 + \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3 = \lambda_1^2 - r,$$

аналогично $R_2 = \lambda_2^2 - r$, $R_3 = \lambda_3^2 - r$.



Следовательно, вспомогательные функции корней $P = T^2$, $T = -\frac{1}{8}q^2$, $R = \frac{1}{4}p^2 - r$ являются выражениями коэффициентов исходной формы (1), и не зависят от корней уравнения (1.6). Решение вопроса о знакоопределенности опирается на следующую лемму.

Лемма 2. Для положительной определенности связки (1.3) при $q \neq 0$ необходимо, чтобы хотя бы одно из вещественных значений R_1 , R_2 , R_3 было отрицательным.

§ 3. Условия знакоопределенности.

Задача о знакоопределенности связки форм в терминах корней характеристического уравнения решается теоремой 1. Полагая выполненными 3 свойства П.А. Кузьмина [12] для знакоопределенных связок форм, получим здесь необходимые и достаточные условия положительной определенности связки форм (1.3). Всюду далее будем требовать вещественность корней уравнения (1.6), что выражается [9-11] неположительностью дискриминанта кубического уравнения. Последнее приводит к неравенству:

$$Q(p, q, r) = r(p^2 - 4r)^2 + q^2 \left(9pr - \frac{1}{4}p^3 \right) - \frac{27}{16}q^4 \geq 0. \quad (3.1)$$

Предположим далее выполненным свойство П.А. Кузьмина [12] об одновременном приведении к диагональным матриц A_1 и A_3 . Для этого [9] составим матрицу диагонализующего неособого преобразования:

$$T = \begin{pmatrix} -\lambda_1 e_1 & -\lambda_2 e_2 & -\lambda_3 e_3 \\ -qe_1 & -qe_2 & -qe_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix},$$

где e_1, e_2, e_3 — вещественные величины, отличные от нуля, которые можно выбирать и, при необходимости, нормировать; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — вещественные различные между собой собственные значения матрицы $B(\lambda) = (A_1 - \lambda A_3)$ (кратные собственные значения будут рассмотрены отдельно). Пусть в результате приведения к диагональным получены матрицы:

$$\bar{A}_1 = T' A_1 T = \begin{pmatrix} \lambda_1 \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \delta_3 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}_3 = T' A_3 T = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix},$$

где $\delta_i = \left(2\lambda_i + \frac{q^2}{2(p-2\lambda_i)^2} \right) e_i^2$. Упорядочим корни: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ и нормируем e_i так, что $|\delta_i| = 1$. В результате диагональные элементы матрицы $\bar{A}_3$ приведутся к $\delta_i = \frac{\varphi(\lambda_i)}{|\varphi(\lambda_i)|}$, где $\varphi(\lambda_i) = 16\lambda_i^3 - 16p\lambda_i^2 + 4p^2\lambda_i + q^2$.

Линейное преобразование инвариантно сохраняет знак определителя матриц, поэтому полагаем:

$$J = \delta_1 \delta_2 \delta_3 = -1 < 0. \quad (3.2)$$

Для знакопеременной матрицы $\bar{A}_3$ тогда возможны следующие комбинации значений δ_i : 1) $\delta_1 = -1, \delta_2 = \delta_3 = +1$; 2) $\delta_1 = \delta_2 = +1, \delta_3 = -1$; 3) $\delta_1 = \delta_3 = +1, \delta_2 = -1$.

Для каждой комбинации значений δ_i выполняется свойство, согласно которому выражения $\varphi(\lambda_i)$ удовлетворяют соотношению: $\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)\varphi(\lambda_3) = -1$. Этому соответствует результат двух полиномов [10] $f(\lambda) = 0$ и $\varphi(\lambda) = 0$:

$$\text{Res}(f, \varphi) = -2^{13} q^2 Q(p, q, r).$$

Исходя из соотношения $J < 0$, получим $\text{Res}(f, \varphi) < 0$.

В случае невырожденного результата при $Q(p, q, r) > 0, g \neq 0$ согласно критерия Кузьмина [12] о "разделенности собственных значений" $\lambda_i^{(+)}$ (относящихся к $\delta_i > 0$) и $\lambda_j^{(-)}$ (относящихся к $\delta_j < 0$) для знакоопределенных связок форм $K(z, \sigma) = z'(A_1 - \sigma A_3)z$ необходимо выполнение одного из условий:

$$1. \min_{i \in \{1, 2, 3\}} (\lambda_i^{(+)}) > \max_{j \in \{1, 2, 3\}} (\lambda_j^{(-)})$$

(при $K(x, \sigma) \gg 0$);

$$2. \max_{i \in \{1, 2, 3\}} (\lambda_i^{(+)}) > \min_{j \in \{1, 2, 3\}} (\lambda_j^{(-)})$$

(при $K(x, \sigma) < 0$).

Отдельно проведен анализ условий знакоопределенности связки форм (1.3) при условии $J_3(\lambda) > 0$ и разных видов решений уравнения:

$$\varphi(\mu) = 16\mu^3 - 16p\mu^2 + 4p^2\mu + q^2 = 0. \quad (3.3)$$

В соответствии с общей теорией [9-11] уравнение (3.3) допускает одно или три вещественных решения, и в любом случае анализ как невырожденного, так и вырожденного результата $\text{Res}(f, \varphi)$ при $q = 0, Q(p, q, r) > 0$ сводится к условию:

$$p > -2\sqrt{r}. \quad (3.4)$$

При этом матрицы A_1, A_3 приводятся к диагональным:



$$\bar{A}_1 = T'_1 A_1 T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & 0 & 0 \\ 0 & p/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{r} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}_3 = T'_1 A_3 T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для значений $\lambda_1^{(+)} = p/2$; $\lambda_2^{(+)} = \sqrt{r}$; $\lambda_3^{(-)} = -\sqrt{r}$ согласование свойства П.А. Кузьмина [12] "разделенности корней" характеристического уравнения для знакоопределенных связей форм будет выполнено при $\min[p/2; \sqrt{r}] > -\sqrt{r}$, что сводится к (3.4)

Вырождение результата при $Q(p, q, r) = 0$ прежде всего соответствует кратным корням характеристического уравнения (1.6). Условие "разделенности корней" при этом получает знакоопределенные формы вида $\Phi(x, y) = (x + \sqrt{r} y)^2 \gg 0$.

Практическое использование условий знакоопределенности форм (1) выражает

Теорема 4. Необходимыми и достаточными условиями положительной определенности (1) является система неравенств:

$$\begin{cases} 1. p > -2\sqrt{r}, \\ 2. q^2 < \frac{8}{3}pr - pr - \frac{2}{27}p^3 + \frac{2}{27}\sqrt{(p^2 + 12r)^3}. \end{cases}$$

§ 4. Пример

В качестве примера рассмотрим уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 7.5x_1x_2^2 + bx_2^2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + 6x_1x_2^2 - 2x_2^3. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ставится задача определения вторым методом Ляпунова наибольшей области значений параметра b , чтобы тривиальное решение (4.1) было асимптотически устойчиво. При этом нужно оценить: насколько близки к границе устойчивости найденные значения параметра b . С этой целью составим квадратичную функцию Ляпунова:

$$V = -\frac{1}{2}(x_1^2 + \alpha x_2^2), \quad (4.2)$$

где параметр $\alpha > 0$ будем подбирать для нахождения наибольшей области параметрической задачи. Производная V в силу дифференциальных уравнений движения (4.1) примет вид:

$$\dot{V} = x_1^4 + px_1^2x_2^2 + qx_1x_2^2 + 2\alpha x_2^4,$$

где $p = 7.5 - 4\alpha$; $q = -(6\alpha + b)$; $r = 2\alpha$. Привлекая теорему 4, составим условия положительной определенности $\dot{V}$:

$$(b + 6\alpha)^2 < \frac{2}{27} \left(72p\alpha - p^3 + \sqrt{(p^2 + 24\alpha)^3} \right).$$

Выражая $\alpha = 15/8 - p/4$, искомая область значений параметра b определяется интервалом:

$$\psi_1(p) = -\frac{45}{4} + \frac{3p}{2} - \frac{\sqrt{6}L(p)}{9} < b <$$

$$< -\frac{45}{4} + \frac{3p}{2} + \frac{\sqrt{6}L(p)}{9} = \psi_2(p),$$

$$\text{где } L(p) = \sqrt{135p - 18p^2 - p^2 + \sqrt{(p^2 - 6p + 45)^3}}.$$

Областью определения для функции $\psi_1(p)$ является интервал $(-\infty; 7.5)$. Исследование монотонности $\psi_1(p)$ показало, что в рассматриваемой области не существует наименьших значений, при этом наибольшее значение $\psi_1(p) = 0$ достигается на границе области при $p = 7.5$. Чтобы получить наибольшую область значений исследуемого параметра b в области $p \in (-\infty; 7.5)$ прежде всего необходимо значение верхней границы интервала изменения параметра в данной задаче, что определяется максимумом функции $\psi_2(p)$. Для нахождения экстремумов $\psi_2(p)$ последовательными преобразованиями сведем иррациональное уравнение $\psi'_2(p) = 0$ к рациональному шестой степени:

$$\Phi(p) = (p+5)^2(p-3)^2(136p^2 + 102p - 6309) = 0.$$

Проведенные преобразования и корни получены с применением системы аналитических преобразований на ПЭВМ. Решениями последнего уравнения являются: $p_1 = -71963144541146865$; $p_2 = -5$; $p_3 = 3$; $p_4 = 6.4463144541146865$.

Исследование найденных решений и их окрестностей устанавливает:

- точка p_1 соответствует локальному минимуму $\psi_2(p_1) = -19.002958165645257$;
- точка p_2 соответствует локальному минимуму $L(p)$, равному $L(p_2) = 0$;
- точка p_3 соответствует локальному максимуму $L(p)$, равному $L(p_3) = 12\sqrt{3}$;
- точка p_4 соответствует локальному максимуму $\psi_2(p_4) = 2127958165645255$.

Так как $\psi_1(p)$ не позволяет сразу найти нижнюю границу интервала b , то вычислим наибольшую длину интервала изменения па-



параметра, равную $2\sqrt{6} L_{\max}/9$. Другой характеристикой нижней границы может быть область допустимых значений (ОДЗ) функции $\psi_2(p)$, чтобы нижняя грань интервала b не превосходила наименьшего значения $\psi_2(p)$, включаемого в ОДЗ. Так как допустимы обе введенные величины, то для получения наибольшей области значений параметра b выбирается меньшее из них. Введем в рассмотрение две величины: $b_1 = \psi_2(p_4) - 2\sqrt{6} L_{\max}/9$ и $b_2 = \psi_2(p_1)$, характеризующие нижнюю границу области параметра b обоих подходов. Проведенные вычисления дают следующие значения:

$$b_1 = -9185750333395056;$$

$$b_2 = -19.002958165645257.$$

Выбирая меньшее из них получим нижней границей значение b_2 . Окончательно, в данной задаче область значений параметра b , при которых система уравнений (4.1) асимптотически устойчива, определяется интервалом: $(-19.002958165645257; 2127958165645255)$.

Конечно, использование функции Ляпунова выше четвертого порядка может давать и более точную оценку границ интервала. Но это приводит к трудности параметрического анализа, к тому же метод полиномиальных функций Ляпунова может не получить точную границу исследуемого параметра [6, 7].

Для исследования нелинейных систем двух переменных получил развитие способ Каменкова, опирающийся на теоремы Г.В. Каменкова [13-15] об асимптотической устойчивости и неустойчивости. Он хорошо применяется для получения границ устойчивости. Далее проведем оценку параметра b с помощью теоремы Каменкова [13-15] о неустойчивости. С этой целью для системы: $\dot{x}_1 = X_1(x)$; $\dot{x}_2 = X_2(x)$ составим вспомогательные функции $F(x) = x_1 X_2 - x_2 X_1$ и $R(x) = x_1 X_1 + x_2 X_2$. При обозначении $t = x_1/x_2$ они сводятся к:

$$F(x(t)) = 10t^3 + 12t^2 + 11t - 2b;$$

$$R(x(t)) = -2t^4 - 7t^2 + 2(b+6)t - 4.$$

Согласно теореме Каменкова о неустойчивости [14] (стр. 80), [15] (стр. 104), если на каком-либо вещественном решении $F(x)$, кроме тривиального $x_1 = x_2 = 0$, выполнится $R(x) > 0$, то тривиальное решение $x_1 = x_2 = 0$ неустойчиво. Поэтому необходимо определить границу области параметра b , где $R(x) = 0$ при $F(x) = 0$. Для этого составим результат полиномов $F(x)$ и $R(x)$, равный:

$$Res(F, R) = 128(4b^2 + 48b + 145)(16b^2 + 270b - 647),$$

который в области устойчивости должен быть отрицательным. Вещественными решениями уравнения $Res(F, R) = 0$ являются только два:

$$b_{11} = \frac{-135 - 41\sqrt{17}}{16} = -19.002958165645254;$$

$$b_{21} = \frac{-135 + 41\sqrt{17}}{16} = 21.27958165645253.$$

Таким образом, по теореме Каменкова [13-15] в области $b \in (-\infty; b_{11}) \cup (b_{21}; +\infty)$ система (4.1) неустойчива, а в области $(b_{11}; b_{21})$ по теореме Каменкова об асимптотической устойчивости [14] (стр. 83) — система (4.1) асимптотически устойчива.

Следует отметить очень редкий случай: с точностью 10^{-15} совпадают границы области устойчивости, получаемые двумя разными способами: теоремой Ляпунова [1, 13] об асимптотической устойчивости с квадратичной функцией Ляпунова, и теоремой Каменкова о неустойчивости [13-15].

Как видно из проведенных расчетов, в данной параметрической задаче оказались равными нижняя и верхняя границы области значений параметра, вычисляемые как теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости, так и теоремами Каменкова. Учитывая то обстоятельство, что подход Каменкова для двух нулевых корней двух переменных дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости, заключаем о полном решении данной задачи.

Следовательно, получаемые вторым методом Ляпунова условия асимптотической устойчивости системы (4.1) находятся на границе устойчивости. Кроме того, в рассматриваемой задаче эти условия решаются знакоопределенными функциями Ляпунова не выше четвертого порядка.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений. Т. 2. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1956. — 263 с.
2. Немыцкий, В.В., Степанов, В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М. — Л.: Гостехиздат, 1949. — 420 с.
3. Садовский, А.П. О проблеме центра и фокуса. — М.: ДУ, 1968. — Т. 4. — № 5. — С. 943-945.
4. Аминов, А.Б., Сиразетдинов, Т.К. Условия знакоопределенности четных форм и



- устойчивости в целом нелинейных однородных систем. — М.: ПММ, 1984. — Т. 48, вып. 3. — С. 339-347.
5. Чернятин, В.А. О знакоопределенности произвольных форм четного порядка. — Минск: ДАН БССР, 1966. — Т. 10, № 11, С. 821-823.
 6. Утешев, А.Ю. Использование однородных форм в качестве функций Ляпунова. — Л.: ЛГУ, ВИНТИ, № 2942-B87, серия: математика, механика, астрономия, 1987. — 13 с.
 7. Утешев, А.Ю., Шуляк, С.Г. Критерий асимптотической устойчивости системы двух дифференциальных уравнений с однородными правыми частями. — Минск: Наука и техника, ДУ, 1987. — № 6, С. 1009-1014.
 8. Иртегов, В.Д., Новиков, М.А. Знакоопределенность форм четвертого порядка от двух переменных // В кн. Метод Ляпунова и его приложения. — Новосибирск: Наука, 1984. — С. 87-93
 9. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
 10. Ван дер Варден. Современная алгебра. — М. — Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. — Т. 2, 210 с.
 11. Березин, И.С., Жидков, Н.П. Методы вычислений. — М.: ГИФМЛ, 1960. — Т. 2. — 620 с.
 12. Кузьмин, П.А. Малые колебания и устойчивость движения. — М.: Наука, 1973. — 206 с.
 13. Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 530 с.
 14. Каменков, Г.В. Устойчивость движения, колебания, аэродинамика. — М.: Наука, 1971. — Т. 1. — 255 с.
 15. Каменков, Г.В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. — М.: Наука, 1972. — Т. 2. — 213 с.

Орлова Т.Т.

УДК 519.82

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ОРГАНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

Научная организация труда связана с задачами оптимального использования ресурсов на большом предприятии. Здесь под термином «ресурсы» понимаются персонал, оборудование, материалы и т.п. Управление производственной системой состоит в разработке процедур анализа, планирования, координации, составления календарных графиков, а также ресурсного обеспечения этой системы. Чтобы добиться эффективной работы производственной системы, необходим анализ соответствующих данных, позволяющий определить, какие ресурсы нужны, и как их использовать наилучшим образом. Эта область деятельности включает управление запасами, затратами, производством и качеством, нормирование труда. Нормирование труда имеет целью определить оптимальное время выполнения конкретной задачи.

Информационные способы развития (по Кастельсу) подразумевают технологические схемы, через которые труд воздействует на материал, чтобы создать продукт,

необходимый для расширенного воспроизводства. Способы развития определяются производственными функциями (отношением между трудом и материалом как функцией использования средств производства путем применения энергии и знаний и характеризуется техническими отношениями в производстве).

Экономико-математическая модель рассматривается как математическая конструкция, отражающая объект моделирования и предназначенная для получения новой о нем информации. Многомерные линейные оптимизационные модели - одно из эффективных средств исследования производственных и социально-экономических процессов.

К ним относится задача о назначении. Задача о назначениях - частный случай транспортной задачи со специфическими ограничениями и значениями переменных [1]. Можно привести много случаев, когда реальная, возникающая на практике, ситуация приводит к решению задачи о назначениях. Так задача о назначениях имеет место при назначении лю-