

ЗАМКНУТЫЕ СЕТИ В ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ*

В. А. Койбаев

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
д-р физ.-мат. наук, профессор, koibaev-K1@yandex.ru

В статье дается обзор результатов автора, посвященных теории элементарных сетей (ковров).

Детально изучается цепочка

дополняемые $\subset$ замкнутые (допустимые) $\subset$ элементарные сети.

Построенные в работе примеры сетей и элементарных групп показывают, что все включения указанной цепочки точные (исследованием точности указанной цепочки мотивирована вся работа). Для произвольной элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ аддитивных подгрупп σ_{ij} , $i \neq j$, коммутативного кольца Λ с 1 определяются производная сеть $\omega = \sigma^1$, замкнутая сеть $\bar{\sigma}$ (замыкание сети σ), сеть σ^E , ассоциированная с элементарной группой $E(\sigma)$, причем (теорема 1)

$$\sigma^1 \subseteq \sigma \subseteq \bar{\sigma} \subseteq \sigma^E,$$

при этом выполняются включения $\sigma_{ir}^1 \sigma_{rj}^E \subseteq \sigma_{ij}^1$, $\sigma_{ir}^E \sigma_{rj}^1 \subseteq \sigma_{ij}^1$.

В работе принят следующий стандартный набор обозначений и определений.

Если A, B — подгруппы аддитивной группы кольца Λ , то через AB мы обозначаем подгруппу аддитивной группы кольца Λ , порожденную всеми произведениями ab , $a \in A, b \in B$.

Пусть e — единичная матрица порядка n , e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули. Если $\alpha \in \Lambda$, то через $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ обозначается элементарная трансвекция. Положим, далее,

$$t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Для элементарной сети (ковра) σ через $E(\sigma)$ обозначается элементарная группа:

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leq i \neq j \leq n \rangle.$$

Далее, если σ — сеть, то через $G(\sigma)$ обозначается сетевая (ковровая) группа [1, 2].

§ 1. Элементарная сеть (ковер). Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Система

$$\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

аддитивных подгрупп кольца Λ называется сетью (ковром) [1, 2] над кольцом Λ порядка n , если

$$\sigma_{ir} \sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$$

при всех значениях индексов i, r, j .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00469).

© В. А. Койбаев, 2013

Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер) [7, 6, вопрос 15.46]. Таким образом, элементарная сеть — это набор $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца Λ , для которых $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных чисел i, r, j .

§ 2. Дополняемые сети. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, называется дополняемой, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца Λ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети.

Хорошо известно, что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \quad (1)$$

для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}, \quad (2)$$

где суммирование берется по всем k , отличным от i .

Ясно, что элементарная сеть может быть дополнена до сети не всегда единственным способом. Однако очевидно, формула (2) (при выполнении условий (1)) позволяет дополнить элементарную сеть σ наименьшей диагональю.

§ 3. Производная сеть. В этом параграфе для произвольной элементарной сети σ мы вводим понятие производной сети σ^1 (впервые предложенное в [3]) для группы SL (Я. Н. Нужин обобщил это понятие на другие группы Шевалле [8, 9]). Отметим, что предлагаемая ниже технология позволяет вводить производные элементарной сети высших порядков. Далее [3, 4], формулируются утверждения, позволяющие выявить связь между элементарной сетью и ее производной (показывая при этом, что производная сеть σ^1 является дополняемой сетью, содержащейся в элементарной сети σ).

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом Λ порядка n . Рассмотрим набор $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ , определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где очевидно (так как σ — элементарная сеть), суммирование берется по всем k , отличным от i и j . Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j мы имеем

$$\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}.$$

Таким образом, набор $\omega_\sigma = \omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ является элементарной сетью.

Если, например, $n = 3$, то производная сеть $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & * & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & * \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть. Для подгрупп элементарной сети имеют место следующие утверждения.

(1) Пусть $i \neq j$. Тогда

$$(\sigma_{ir}\sigma_{ri})(\sigma_{jr}\sigma_{rj}) \subseteq (\sigma_{ir}\sigma_{ri}) \cap (\sigma_{jr}\sigma_{rj}) \cap (\sigma_{ij}\sigma_{ji}).$$

(2) Если $i \neq r$, то

$$\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ir}\sigma_{rj}.$$

Если $i = r, k \neq j$, то

$$\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj}.$$

(3) Если $k \neq j$, то

$$(\sigma_{ik}\sigma_{ki})\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}.$$

(4) (цикл) Имеем

$$\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{ri} \subseteq (\sigma_{ir}\sigma_{ri}) \cap (\sigma_{kr}\sigma_{rk}) \cap (\sigma_{ik}\sigma_{ki}).$$

(5) Пусть $i \neq j$. Тогда (m — натуральное)

$$(\sigma_{ik}\sigma_{kj})(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^m \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj}.$$

Предложение 1. Элементарная сеть $\omega = \sigma^1$ является дополняемой, то есть дополняется до (полной) сети. Другими словами, для любых $i \neq j$

$$\omega_{ij}\omega_{ji}\omega_{ij} \subseteq \omega_{ij}.$$

Элементарную сеть ω можно дополнить до (полной) сети стандартным способом, полагая для произвольного $i, 1 \leq i \leq n$,

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \omega_{ki}\omega_{ik},$$

где суммирование ведется по всем $k = 1, 2, \dots, n, k \neq i$. Однако мы предлагаем другой (необходимый нам для дальнейшей работы с элементарными группами) способ дополнения элементарной сети ω до полной. Для любых $i \neq j$ положим

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m.$$

Тогда диагональные элементы $\omega_{ii}, 1 \leq i \leq n$, определим следующим образом:

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq s} (\gamma_{ik} \cap \gamma_{is} \cap \gamma_{ks}), \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем $1 \leq k \neq s \leq n$ (ясно, что $k \neq i, s \neq i$).

Замечание 1. Можно показать, что последняя сумма содержит группу (см. выше)

$$\sum_{k \neq i} \omega_{ki}\omega_{ik},$$

а потому представленная диагональ абелевых групп содержит диагональ, получаемую стандартным способом.

Если, например, $n = 3$, то

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \gamma_{12} \cap \gamma_{13} \cap \gamma_{23}.$$

Предложение 2. Элементарная сеть ω , дополненная диагональю формулой (3), является (полной) сетью.

Определение. Пусть σ — элементарная сеть, тогда (полную) сеть $\sigma^1 = \omega$, определенную формулой (2), мы называем производной сетью (для σ).

Предложение 3. Пусть σ — элементарная сеть, $\sigma^1 = \omega$ — производная сеть, $r \neq j$. Тогда для любых i, r мы имеем

$$\omega_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \sigma_{jr}\omega_{ri} \subseteq \omega_{ji}. \quad (4)$$

§ 4. Сеть, ассоциированная с элементарной группой. В этом разделе мы построим сеть σ^E , связанную с элементарной группой $E(\sigma)$ [3, 4]. Как мы увидим ниже, построенная сеть σ^E будет наименьшей дополняемой сетью, содержащей элементарную сеть σ

Пусть α, β — подгруппы аддитивной группы кольца Λ . Рассмотрим элементарную сеть σ_0 второго порядка

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} * & \alpha \\ \beta & * \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\beta)^k.$$

Предложение 4. Рассмотрим элементарную группу

$$E(\sigma_0) = \langle t_{21}(\beta), t_{12}(\alpha) \rangle.$$

Если $a \in E(\sigma_0)$, $a = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix}$, то

$$a_{11}, a_{22} \in \gamma, \quad a_{12} \in \alpha + \alpha\gamma, \quad a_{21} \in \beta + \beta\gamma.$$

Предложение 4 естественным образом индуцирует следующее построение. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом Λ порядка n . Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\sigma_{ij}^E = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij},$$

где $\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$.

Предложение 5. Таблица $\sigma^E = (\sigma_{ij}^E)$ является элементарной сетью, причем дополняемой, то есть справедливы включения $\sigma_{ij}^E \sigma_{ji}^E \sigma_{ij}^E \subseteq \sigma_{ij}^E$ для любых $i \neq j$.

В силу предложения 5 дополним элементарную сеть σ^E до (полной) сети стандартным способом, положив $\sigma_{ii}^E = \sum_{k \neq i} \sigma_{ik}^E \sigma_{ki}^E$, где суммирование берется по k , $k \neq i$.

Нетрудно видеть, что

$$\sigma_{ii}^E = \sum_{k=1, k \neq i}^n \gamma_{ik}.$$

Так, например,

$$\sigma_{11}^E = \gamma_{12} + \gamma_{13} + \dots + \gamma_{1n}.$$

Заметим, что $\sigma_{ii}^{(1)} \subseteq \sigma_{ii}^E$ для всякого i .

Предложение 6. Сеть σ^E является наименьшей (дополняемой) сетью, содержащей элементарную сеть σ .

Далее, $(\sigma^E)^{(1)} = \sigma^{(1)}$.

Так определенную (полную) сеть σ^E мы называем сетью, ассоциированной с элементарной группой $E(\sigma)$.

Ясно, что

$$\sigma^1 \leq \sigma \leq \sigma^E.$$

Сети σ^E и σ^1 связаны следующим предложением.

Предложение 7. Для любых i, r, j имеем

$$\sigma_{ir}^1 \sigma_{rj}^E \subseteq \sigma_{ij}^1, \quad \sigma_{ir}^E \sigma_{rj}^1 \subseteq \sigma_{ij}^1.$$

§ 5. Замкнутые (допустимые) сети. В этом параграфе для элементарной сети σ мы вводим понятие замыкания $\bar{\sigma}$ [4]. Как оказалось, элементарная сеть $\bar{\sigma}$ является замкнутой, причем наименьшей замкнутой, содержащей сеть σ .

Для элементарной сети σ рассмотрим элементарную сеть $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{ij})$, индуцированную трансекциями из элементарной группы $E(\sigma)$. А именно, для любых $i \neq j$ положим

$$\bar{\sigma}_{ij} = \{\alpha \in \Lambda : t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)\}.$$

Очевидно, что в силу известного коммутаторного соотношения $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{ij})$ является элементарной сетью.

Определение. Элементарную сеть $\bar{\sigma}$ мы называем замыканием сети σ . Если $\sigma = \bar{\sigma}$, то сеть σ мы называем замкнутой (или допустимой).

Очевидно, что примером замкнутой сети являются дополняемые сети.

Замечание 2. Понятие допустимой сети стало известно автору из работ В. М. Левчука, однако в силу следующих предложений мы используем термин «замкнутая сеть», что на наш взгляд лучше отражает суть определения.

Предложение 8. Операция замыкания обладает следующими свойствами (замыкания в топологическом пространстве):

$$\sigma \subseteq \bar{\sigma}; \quad \sigma \subseteq \tau \Rightarrow \bar{\sigma} \subseteq \bar{\tau}; \quad \bar{\sigma} = \overline{\bar{\sigma}}; \quad \overline{\sigma \cap \tau} \subseteq \bar{\sigma} \cap \bar{\tau}.$$

Предложение 9. 1) Пересечение замкнутых элементарных сетей является замкнутой элементарной сетью.

2) Пусть $\sigma \subseteq \tau$ и τ — замкнутая сеть. Тогда $\sigma \subseteq \bar{\sigma} \subseteq \tau$. В частности, $\bar{\sigma}$ — наименьшая замкнутая сеть, содержащая σ .

3) Для сети σ^E мы имеем $\sigma \subseteq \bar{\sigma} \subseteq \sigma^E$.

Положим $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2$, далее, $\sigma_1 \vee \sigma_2 = \overline{\sigma_1 \cup \sigma_2}$, где $\sigma_1 \cup \sigma_2$ — сеть, равная пересечению всех элементарных сетей, содержащих σ_1 и σ_2 .

Следствие. Множество замкнутых (допустимых) сетей является структурой (подструктурой) всех элементарных сетей, содержащей структуру всех дополняемых сетей.

Теорема 1. Элементарная сеть σ индуцирует производную сеть $\sigma^{(1)}$, замкнутую сеть $\bar{\sigma}$ и сеть σ^E , ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, при этом выполняются включения

$$\sigma^{(1)} \subseteq \sigma \subseteq \bar{\sigma} \subseteq \sigma^E,$$

причем $\sigma_{ir}^{(1)} \sigma_{rj}^E \subseteq \sigma_{ij}^{(1)}$, $\sigma_{ir}^E \sigma_{rj}^{(1)} \subseteq \sigma_{ij}^{(1)}$.

§ 6. Факторизация элементарной группы. В этом разделе для элементарной сети σ приводится (теорема 2) факторизация элементарной группы $E(\sigma)$. Позже Я. Н. Нужин [8] перенес такое разложение на другие группы Шевалле.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом R порядка n . Соотношения, представленные в следующей лемме, хорошо известны.

Лемма 2. Пусть $\alpha \in \sigma_{ij}$, $\beta \in \sigma_{rs}$, $i \neq j$, $r \neq s$.

- 1) Если $j \neq r$, $i \neq s$, то $t_{ij}(\alpha)t_{rs}(\beta) = t_{rs}(\beta)t_{ij}(\alpha)$.
 - 2) Если $j = r$, $i \neq s$ ($\alpha\beta \in \sigma_{is}^{(1)}$), то $t_{ij}(\alpha)t_{js}(\beta) = t_{js}(\beta)t_{ij}(\alpha)t_{is}(\alpha\beta)$.
 - 3) Если $j \neq r$, $i = s$ ($\alpha\beta \in \sigma_{rj}^{(1)}$), то $t_{ij}(\alpha)t_{ri}(\beta) = t_{ri}(\beta)t_{ij}(\alpha)t_{rj}(-\alpha\beta)$.
- Пусть $i \neq j$. Положим

$$\Gamma_{ij} = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji}) \rangle.$$

Теорема 2. Пусть $n \geq 3$. Имеет место равенство

$$E(\sigma) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \Gamma_{ij} \right) E(\sigma^{(1)}),$$

причем сомножители Γ_{ij} в произведении можно брать в любом порядке.

§ 7. Примеры сетей. В этом параграфе (см. [4]) мы доказываем точность цепочки структур

дополняемые $\subset$ замкнутые (допустимые) $\subset$ элементарные сети,
о которой говорилось в начале статьи.

Пусть F — произвольное поле. Рассмотрим поле $\Lambda = F(x)$ рациональных функций $\frac{f}{g}$, $f, g \in F[x]$, с коэффициентами из F . Введем в рассмотрение кольцо

$$R = \left\{ \frac{f}{g} \in F(x) : \deg f - \deg g \geq 4 \right\},$$

и подгруппы

$$A = \frac{F}{x} + F + R, \quad A_1 = \frac{F}{x^2} + F + R, \quad B = \frac{F}{x} + R.$$

Через (R) обозначим сеть, все элементы которой совпадают с R ; пусть, далее, $E((R)) = E(R)$.

Пример незамкнутой (не допустимой) сети. Пусть F — произвольное поле. Определим элементарную сеть $\rho = (\rho_{ij})$ n -го порядка в Λ следующим образом: $\rho_{12} = A$, $\rho_{21} = A_1$ и $\rho_{ij} = R$ для всех остальных $i \neq j$:

$$\rho = \begin{pmatrix} * & A & R & \dots & R \\ A_1 & * & R & \dots & R \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ R & R & R & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Из $RA \subseteq R$, $RA_1 \subseteq R$, $R^2 \subset R \subset A$, $R^2 \subset A_1$ следует, что ρ — элементарная сеть. Далее, $\frac{1}{x^3} \in AA_1A$, следовательно, $AA_1A \not\subseteq A$, а потому элементарная сеть ρ не является дополняемой.

Сеть ρ не является замкнутой (допустимой). Действительно, положим $b = t_{12}(\frac{1}{x})t_{21}(1)t_{12}(-1)$. Тогда $b^{-1}t_{12}(\frac{1}{x})b = t_{21}(-\frac{1}{x})$, поэтому $\frac{1}{x} \in (\bar{\rho})_{21}$, но $\frac{1}{x}$ не содержится в группе $A_1 = \rho_{21}$. Поэтому $\rho \neq \bar{\rho}$, то есть сеть ρ не является замкнутой.

Пример замкнутой (допустимой), но не дополняемой сети. Пусть $F = \mathbb{F}_2$ — произвольное поле из двух элементов, $\Lambda = \mathbb{F}_2(x)$.

Определим элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ n -го порядка в поле Λ следующим образом: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = B$ и $\sigma_{ij} = R$ для всех остальных $i \neq j$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & B & R & \dots & R \\ B & * & R & \dots & R \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ R & R & R & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Из $RB \subseteq R$, $R^2 \subset R \subset B$ следует, что σ — элементарная сеть.

Предложение 11. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является замкнутой (допустимой) и не является дополняемой.

§ 8. Вопрос В. М. Левчука. Вопрос В. М. Левчука (Коуровская тетрадь, вопрос 15.46, 2002 год) в SL -варианте выглядит следующим образом:

верно ли, что для допустимости ковры $\sigma = (\sigma_{ij})$ необходима и достаточна допустимость любого подковра $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$, $1 \leq i < j \leq n$?

Этот вопрос естественным образом согласуется с утверждением (см. § 2) о том, что необходимым и достаточным условием дополняемости элементарной сети (ковра) $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемость любой подсети (подковра) $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$, $1 \leq i < j \leq n$.

Основой положительного решения вопроса В. М. Левчука (или построения соответствующего контрпримера), на наш взгляд, являются следующий параграф.

§ 9. Разложение трансвекции в элементарной группе. Мы представляем [5] разложение трансвекции в элементарной группе $E(\sigma)$ для случая $n = 3$ и для наглядности (дабы не загружать читателя громоздкими формулировками) рассматриваем позицию $(1, 2)$. Итак, рассматривается элементарная сеть σ порядка 3:

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & * & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & * \end{pmatrix}.$$

В § 3 для элементарной сети σ мы определили производную сеть $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$, которая имеет вид

$$\omega = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{13}\sigma_{32} & \omega_{22} & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & \omega_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \gamma_{12} \cap \gamma_{13} \cap \gamma_{23}$$

и

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m.$$

Для элементарной группы $E(\sigma)$ степени 3 справедлива (см. § 6) факторизация

$$E(\sigma) = \Gamma_{12}\Gamma_{13}\Gamma_{23}E(\omega), \quad (1)$$

где

$$\Gamma_{ij} = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji}) \rangle.$$

Через $G(\omega)$ обозначается сетевая группа, определенная для сети ω .

Теорема 3. Пусть $t_{12}(\alpha) \in E(\sigma)$. Тогда

$$t_{12}(\alpha) = ah,$$

где $a \in \Gamma_{12}$, $h \in \Gamma_{13}\Gamma_{23}E(\omega)$, причем $h = bcb$, где $b \in \Gamma_{13} \cap G(\omega)$, $c \in \Gamma_{23} \cap G(\omega)$, $g \in E(\omega)$, и для матрицы

$$a = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 1 + a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

мы имеем $a_{11}, a_{22} \in \omega_{11}$, $a_{21} \in \omega_{21}$, $\alpha - a_{12} \in \omega_{12}$.

Следствие. Если σ — элементарная сеть порядка 3 и пара $(\sigma_{12}, \sigma_{21})$ дополняется до (полной) сети, то из того, что $t_{12}(\alpha) \in E(\sigma)$ следует, что $\alpha \in \sigma_{12}$.

Пример. Рассмотрим поле $k = F(x)$ рациональных функций $\frac{f}{g}$, $f, g \in F[x]$, с коэффициентами из поля F , $\text{char } F \neq 2$. Пусть ν — показатель нормирования,

$$\nu\left(\frac{f}{g}\right) = \deg g - \deg f.$$

Мы рассматриваем подкольцо R , следующего вида: ($m \geq 0$)

$$R_m = \left\{ \frac{f}{x^s} \in F(x) : \nu\left(\frac{f}{x^s}\right) \geq m \right\},$$

а также подгруппу B поля k следующего вида:

$$B = \frac{F}{x} + R_4.$$

Пара (B, B) является допустимой для любого поля F . Пусть $([s, t] = sts^{-1}t^{-1})$

$$a = [t_{21}(1/x)t_{12}(1/x)t_{21}(-1/x), t_{12}(-1/x)].$$

Тогда

$$a = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} & \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^7} \\ \frac{1}{x^7} & 1 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если рассматривать элементарную сеть

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & B & R_2 \\ B & * & R_2 \\ R_2 & R_2 & * \end{pmatrix},$$

которая очевидно $(1/x^3 \in B^3 \setminus B)$, является не дополняемой, и ей соответствующую производную сеть

$$\sigma^1 = \omega = \begin{pmatrix} R_4 & R_4 & R_3 \\ R_4 & R_4 & R_3 \\ R_3 & R_3 & R_4 \end{pmatrix},$$

то мы можем утверждать, что пара (B, B) не является ω -допустимой.

Рассмотрим матрицу $h^{-1} = t_{12}(-2/x^3)a$:

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{2}{x^{10}} & \frac{-2}{x^5} - \frac{1}{x^7} + \frac{2}{x^9} - \frac{2}{x^{11}} \\ \frac{1}{x^7} & 1 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} \end{pmatrix}.$$

Тогда очевидно (так как пара (B, B) — допустима), матрица h не содержится в группе Γ_{12} .

Для построения контрпримера (то есть не допустимости элементарной сети σ) нужно доказать включение $h \in E(\sigma)$, или $h \in \Gamma_{13}\Gamma_{23}E(\omega)$.

Литература

1. Борович З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семин. ЛОМИ. Т. 75. 1978. С. 22–31.
2. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
3. Койбаев В. А. Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавказский мат. ж. Т. 12. 2010. Вып. 4. С. 39–43.
4. Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах // Труды ИММ УрО РАН. Т. 17. 2011. № 4. С. 134–141.
5. Койбаев В. А. Разложение трансвекции в элементарной группе // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. Т. 5. 2012. Вып. 3. С. 388–392.
6. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп: 17-е изд. Новосибирск, 2010.
7. Левчук В. М. Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика. Т. 22. 1983. № 5. С. 504–517.
8. Нурушин Я. Н. Факторизация коловых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. Т. 4. 2011. Вып. 4. С. 527–535.
9. Нурушин Я. Н. Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца // Труды ИММ УрО РАН. Т. 18. 2012. № 3. С. 195–200.

Статья поступила в редакцию 20 сентября 2012 г.