

А. А. ЕРШОВ

ЗАДАЧА ОБ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ДИСКА*

Найдена равномерная асимптотика внешней задачи Дирихле с уравнением Лапласа вне тонкого диска в трехмерном пространстве. Малым параметром является толщина диска. Физической интерпретацией данной задачи является обтекание диска ламинарным потоком жидкости.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Лапласа, асимптотическое разложение, тонкий диск, ламинарный поток, обтекание.

Введение

Здесь будет рассмотрена внешняя краевая задача для трехмерного уравнения Лапласа вне малой окрестности диска, которая физически интерпретируется как модель обтекания тонкого диска ламинарным потоком жидкости. Заметим, что ранее в работе [1] была рассмотрена двумерная задача обтекания тонкого тела ламинарным потоком жидкости. Построение и обоснование асимптотики в обоих случаях довольно похожи, но есть и некоторые отличия. В данной работе сохранена структура доказательства из [1], на отличиях трехмерного случая от двумерного мы остановимся более подробно, некоторые построения приведем повторно, а часть схожих доказательств будет опущена.

1. Постановка задачи

Математическая постановка задачи следующая. Пусть σ — диск $\{x_1, x_2, x_3 : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, $\bar{\sigma}$ — его замыкание, а σ_ε — окрестность диска σ (рис. 1).

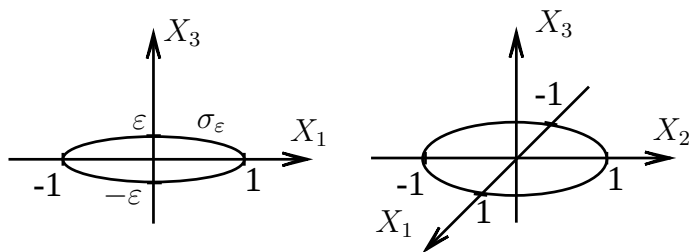


Рис. 1.

*Работа выполнена при поддержке гранта НШ-6249.2010.1, ФЦП-02.740.11.0612, РФФИ (проект 10-01-96012-р_урал_а).

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий ширину окрестности σ_ε , так что $\bigcap_{\varepsilon>0} \sigma_\varepsilon = \sigma$. Точный вид σ_ε будет указан ниже. Примем, что край диска образует окружность $C \{x_1, x_2, x_3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$. Всюду в этой статье будут употребляться обозначения $x = (x_1, x_2, x_3)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $r_2 = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $r_c = \sqrt{r_2^2 + x_3^2}$. Посредством $u(x, \varepsilon) = u(x_1, x_2, x_3)$ будем обозначать функцию, которая удовлетворяет условиям $u(x, \varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \sigma_\varepsilon)$,

$$\Delta u = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \sigma_\varepsilon, \quad (1)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \text{ при } x \in \partial\sigma_\varepsilon, \quad (2)$$

$$u(x, \varepsilon) = x_3 + o(1) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Гидродинамическая интерпретация задачи (1)–(3) следующая. Рассматривается обтекание тела σ_ε безвихревым потоком жидкости. Пусть u — потенциал скоростей или функция тока, т. е. скорость жидкости $V = \text{grad } u$. Условие несжимаемости означает, что $\text{div } V = 0$. Тогда функция u удовлетворяет уравнению Лапласа [2, с. 164]. В силу даже сколь угодно малой вязкости скорость жидкости $V = 0$ на поверхности $\partial\sigma_\varepsilon$ и, соответственно, $u = \text{const}$. Без ограничения общности можно считать выполненным условие (2). Для однозначного определения течения надо задать еще скорость набегающего потока на бесконечности. Течение с постоянной единичной скоростью, параллельной оси x_3 , удовлетворяет решению $u(x) = x_3$, что соответствует условию (3).

Описанная здесь интерпретация полезна, но не является обязательной для понимания исследования. В дальнейшем будем всюду опираться на чисто математическую постановку задачи (1)–(3).

Будем искать асимптотику $u(x, \varepsilon)$ — решения задачи (1)–(3) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предварительно уточним вид окрестности σ_ε . Пусть $\sigma_\varepsilon = \{x : 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1, \varepsilon g_-(r_2) < x_3 < \varepsilon g_+(r_2)\}$, где $g_\pm(r_2) \in C^\infty(0, 1]$. Иначе говоря, σ_ε получается из тела вращения σ_1 сжатием к плоскости $x_3 = 0$ с коэффициентом ε^{-1} . Вблизи краев диска $\bar{\sigma}$ также будем предполагать поверхность $\partial\sigma_\varepsilon$ гладкой. Это означает, что вблизи окружности C уравнение границы σ_1 имеет вид $r_2 = \psi(x_3)$, где $\psi(x_3) \in C^\infty$. Ясно, что $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, $\psi''(0) \geq 0$, и дополнительно предположим, что $\psi''(0) > 0$, т. е. что кривизна кривой $\partial\sigma_1 \cup \{x_2 = 0\}$ в точке $(-1, 0, 0)$ отлична от нуля. Без ограничения общности будем считать, что $\psi''(0) = 2$. Нетрудно показать, что указанные предположения эквивалентны следующим условиям на $g_\pm(r_2)$:

$$g_\pm(r_2) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, r_2 \rightarrow 0, g_1 = 1. \quad (4)$$

2. Внешнее разложение

Внешнее разложение задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad (5)$$

$$\text{где } \Delta u_k = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}. \quad (6)$$

Условие (3) переходит в условие

$$u_0(x) = x_3 + o(1) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$$u_k(x) = o(1) \text{ при } r \rightarrow \infty, k > 0. \quad (8)$$

А граничные условия на σ для функций $u_k(x)$ получаются немного сложнее. Условие (2) можно переписать в следующем виде: $u(x_1, x_2, \varepsilon g_{\pm}(r_2, \varepsilon)) = 0$. Подставляя сюда ряд (5) и разлагая функции по степеням ε , придем к соотношениям

$$\begin{aligned} u_0(x_1, x_2, \pm 0) = 0, \quad u_1(x_1, x_2, \pm 0) + g_{\pm}(r_2) \frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x_1, x_2, \pm 0) = 0, \\ u_k(x_1, x_2, \pm 0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} [g_{\pm}(r_2)]^j \frac{\partial^j u_{k-j}}{\partial x_3^j}(x_1, x_2, \pm 0) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из уравнения (6) и условий (7), (9) следует, что $u_0(x) = x_3$. Остальные функции $u_k(x)$ — это гармонические в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}$ функции, удовлетворяющие условиям (9) на σ и стремящиеся к нулю на бесконечности. Решение таких задач не представляло бы серьезных трудностей, если бы граничные значения на $\bar{\sigma}$ для функций $u_k(x)$ были непрерывны. Но оказывается, что функции $u_k(x)$ имеют особенности на краях диска $\bar{\sigma}$. Порядок этих особенностей растет с ростом k .

Начнем с изучения функции $u_1(x)$. Граничное условие (9) имеет для нее вид

$$u_1(x_1, x_2, \pm 0) = -g_{\pm}(r_2), 0 < r_2 \leq 1. \quad (10)$$

Таким образом, $u_1(x)$ — это гармоническая в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}$, стремящаяся к нулю на бесконечности функция, которая удовлетворяет условию (10). Решение такой задачи существует и непрерывно всюду, если считать различными разные берега разреза по диску σ (это следует, например, из полноты системы функций $\{\tilde{C}_{j/2}(\rho_c, \Theta), \tilde{S}_{j/2}(\rho_c, \Theta)\}_{j=0}^{\infty}$ в надрезанном торе $S(\delta)$, которые будут рассмотрены ниже). Пространство $\mathbb{R}^3$ с разрезом σ будем обозначать Ω .

Удобно ввести естественные обозначения для классов функций. Классы $C(\bar{\Omega})$ ($C^N(\bar{\Omega})$) — множества определенных в $\bar{\Omega}$ и непрерывных (N раз непрерывно дифференцируемых) всюду, включая границу Ω . При этом точки на разных берегах разреза σ считаются различными точками (т. е. $(x_1, x_2, +0) \neq (x_1, x_2, -0)$ при $0 < r_2 \leq 1$). Если рассматриваемые функции определены лишь при $r_c < \delta$, то их множества обозначим через $C(\bar{\Omega}_{\delta})$ ($C^N(\bar{\Omega}_{\delta})$). Посредством $C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus C)$ обозначаются классы функций, бесконечно дифференцируемых всюду, кроме края диска $\bar{\sigma}$, а посредством $C^{\infty}(\bar{\Omega}_{\delta} \setminus C)$ — такие же функции, определенные при $r_c < \delta$. При этом берега разреза по-прежнему считаются различными.

Итак, $u_1(x) \in C(\bar{\Omega}) \cup C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus C)$, но вблизи краев σ функция $u_1(x)$ не является гладкой функцией. Из (4) и (10) следует, что

$$u_1(x_1, x_2, \pm 0) = -\left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j\right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, r_2 \rightarrow +0. \quad (11)$$

Исходя из этого граничного условия можно определить асимптотическое разложение функции $u_1(x)$ при $r_c \rightarrow 0$. Однако, так как в дальнейшем появятся более общие граничные условия, найдем асимптотику при $r_c \rightarrow 0$ для гармонических функций, удовлетворяющих более широкому классу граничных условий.

Замечание 1. (Об обозначениях). Поскольку все условия первоначальной задачи не зависят от угла поворота относительно оси Ox_3 , все функции u_k , а в дальнейшем и функции внутреннего разложения v_i , на самом деле зависят только от r_2 и x_3 (ρ_2 и ξ_3 соответственно), однако для удобства не будем менять обозначения этих функций в зависимости от смены координат.

Лемма 1. Пусть k — целое число, $h_+(r_2)$ и $h_-(r_2)$ — две функции, заданные при $0 < r_2 \leq \delta$ и такие, что $h_{\pm}(r_2) \in C^\infty(0, \delta]$,

$$h_{\pm}(r_2) = \left(\sum_{j=-k}^{\infty} \hat{d}_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, r_2 \rightarrow 0. \quad (12)$$

И пусть это равенство допускает многократное почленное дифференцирование. Тогда существует гармоническая в $\Omega_\delta \setminus C$ функция $u(x)$ такая, что $u(x_1, x_2, \pm 0) = h_{\pm}(r_2)$, $r_2 \in (0, \delta]$, $u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}_\delta \setminus C)$,

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} d_j \tilde{C}_{j/2}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \tilde{S}_{j/2}(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} r_c^{j/2} \tilde{\Phi}_k(\Theta), r_c \rightarrow 0, \quad (13)$$

где Θ — угол, измеряемый для произвольной точки x следующим образом:

1) построим перпендикуляр из точки x на плоскость Ox_1x_2 , обозначим его основание x' ;

2) пусть x'' — точка пересечения луча Ox' и окружности C (точка O — начало координат);

3) $\Theta = \angle xx''O$.

Доказательство. В двумерном случае доказано [1, лемма 2.1, следствие], что коэффициенты внешнего разложения разлагаются в ряды вида

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} d_j r^{j/2} \cos \frac{j\Theta}{2} + \sum_{j=-k}^{\infty} c_j r^{j/2} \sin \frac{j\Theta}{2}. \text{ Однако эти функции не являются}$$

гармоническими в трехмерном случае. Взамен найдем пригодные гармонические функции.

Введем систему криволинейных координат:

$$\begin{cases} x_1 = (1 - r_c \cos \Theta) \cos \varphi, \\ x_2 = (1 - r_c \cos \Theta) \sin \varphi, \\ x_3 = r_c \sin \Theta. \end{cases}$$

В ней уравнение Лапласа примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r_c} \left(r_c (1 - r_c \cos \Theta) \frac{\partial u}{\partial r_c} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{r_c}{1 - r_c \cos \Theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{1 - r_c \cos \Theta}{r_c} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right) = 0.$$

В нашем случае в силу центральной симметрии оно несколько упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial r_c} \left(r_c (1 - r_c \cos \Theta) \frac{\partial u}{\partial r_c} \right) + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{1 - r_c \cos \Theta}{r_c} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right) = 0.$$

Искать решение этого уравнения будем в виде двух типов рядов:

$$\tilde{C}_\alpha = r_c^\alpha \cos(\alpha\Theta) + r_c^{\alpha+1} \Phi_1(\Theta) + r_c^{\alpha+2} \Phi_2(\Theta) + \dots;$$

$$\tilde{S}_\alpha = r_c^\alpha \sin(\alpha\Theta) + r_c^{\alpha+1} F_1(\Theta) + r_c^{\alpha+2} F_2(\Theta) + \dots$$

Положим $\tilde{C}_0 = 1$ и $\tilde{S}_0 = 0$.

Подставим ряд $\tilde{C}_\alpha$ в уравнение Лапласа:

$$\begin{aligned} (1 - 2r_c \cos \Theta) & \left(\alpha r_c^{\alpha-1} \cos(\alpha\Theta) + (\alpha+1)r_c^\alpha \Phi_1(\Theta) + (\alpha+2)r_c^{\alpha+1} \Phi_2(\Theta) + \dots \right) + \\ & + r_c(1 - r_c \cos \Theta) \left(\alpha(\alpha-1)r_c^{\alpha-2} \cos(\alpha\Theta) + (\alpha+1)\alpha r_c^{\alpha-1} \Phi_1(\Theta) + \right. \\ & \quad \left. + (\alpha+2)(\alpha+1)r_c^\alpha \Phi_2(\Theta) + \dots \right) + \\ & + \left(\frac{1}{r_c} - \cos \Theta \right) \left(-\alpha^2 r_c^\alpha \cos(\alpha\Theta) + r_c^{\alpha+1} \Phi_1''(\Theta) + r_c^{\alpha+2} \Phi_2''(\Theta) + \dots \right) + \\ & + \sin \Theta \left(-\alpha r_c^\alpha \sin(\alpha\Theta) + r_c^{\alpha+1} \Phi_1'(\Theta) + r_c^{\alpha+2} \Phi_2'(\Theta) + \dots \right) = 0. \end{aligned}$$

Затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{aligned} r_c^{\alpha-1} : 0 &= 0, \\ r_c^\alpha : \Phi_1''(\Theta) + (\alpha+1)^2 \Phi_1(\Theta) &= \alpha \cos((\alpha-1)\Theta). \end{aligned}$$

Общим решением является

$$\Phi_1(\Theta) = C_1 \cos((\alpha+1)\Theta) + C_2 \sin((\alpha+1)\Theta) + \frac{1}{4} \cos((\alpha-1)\Theta).$$

Однако функции $r_c^{\alpha+1} \cos((\alpha+1)\Theta)$ и $r_c^{\alpha+1} \sin((\alpha+1)\Theta)$ являются главными членами разложения при $r_c \rightarrow 0$ следующего члена ряда разложения асимптотического коэффициента также при $r_c \rightarrow 0$, коэффициенты перед которыми однозначно определяются из условия согласования, поэтому с точностью до переобозначения коэффициентов можно положить $C_1 = C_2 = 0$:

$$\begin{aligned} r_c^{\alpha+1} : \Phi_2''(\Theta) + (\alpha+2)^2 \Phi_2(\Theta) &= \frac{2\alpha+1}{4} \cos(\alpha\Theta) + \frac{3\alpha}{4} \cos((\alpha-2)\Theta) \\ \Phi_2(\Theta) &= \frac{2\alpha+1}{16(\alpha+1)} \cos(\alpha\Theta) + \frac{3}{32} \cos((\alpha-2)\Theta). \\ &\dots \end{aligned}$$

Для того чтобы доказать, что построенный таким образом ряд действительно является решением уравнения Лапласа, необходимо исследовать его на сходимость. Кроме того, неприятность может возникнуть, например, при появлении уравнений вида $\Phi''(\Theta) + \beta^2 \Phi(\Theta) = \cos(\beta\Theta)$.

Выпишем уравнение при произвольной степени радиуса:

$$\begin{aligned} r_c^{\alpha+k} : \Phi_{k+1}''(\Theta) + (\alpha+k+1)^2 \Phi_{k+1}(\Theta) &= ((\alpha+k)(\alpha+k+1) \Phi_k(\Theta) + \\ &+ \Phi_k''(\Theta)) \cos \Theta - \Phi_k'(\Theta) \sin \Theta. \end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим вначале случай, когда $\alpha > 0$.

По индукции легко доказывается, что

$$\Phi_k(\Theta) = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ki} \cos((\alpha - (k-1) + 2i)\Theta).$$

Чтобы доказать абсолютную сходимость ряда $\tilde{C}_\alpha$, надо показать, что сумма $\sum_{i=0}^{k-1} |c_{ki}|$ не увеличивается слишком быстро при $k \rightarrow \infty$.

Поскольку уравнение (14) линейное, возьмем вместо $\Phi_k(\Theta)$ в правой части любой косинус $\cos \beta\Theta$, где $\alpha - (k-1) \leq \beta \leq \alpha + k - 1$, и посмотрим, как изменится абсолютная сумма коэффициентов. Вычисленное в таком случае Φ_{k+1} будет равно $c_1 \cos((\beta+1)\Theta) + c_2 \cos((\beta-1)\Theta)$, где

$$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\alpha + k + \beta + 2)},$$

$$c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\alpha + k + \beta + 2)} + \frac{\beta}{(\alpha + k - \beta)(\alpha + k + \beta + 2)}.$$

Если $c_1 \cdot c_2 < 0$, то $|c_1| + |c_2| = \left| \frac{\beta}{(\alpha + k - \beta)(\alpha + k + \beta + 2)} \right| \sim \frac{1}{k}$ в худшем случае.

Если $c_1 \cdot c_2 \geq 0$, то $|c_1| + |c_2| = \left| 1 + \frac{\alpha + k}{(\alpha + k - \beta)(\alpha + k + \beta + 2)} \right| \sim 1 + O(\frac{1}{k})$.

Следовательно, $\sum_{i=0}^{k-1} |c_i| = 1 + O(\frac{1}{k})$ при $k \rightarrow \infty$.

Заметим, что при $\beta = 0$ все формулы дифференцирования и тригонометрии остаются верными в прежнем виде, также все знаменатели не равны нулю в силу ограничения на β (второй знаменатель в выражении для c_2 можно представить в виде $(\alpha + k + 1)^2 - (\beta + 1)^2$).

Таким образом, ряд $\tilde{C}_\alpha = r_c^\alpha \cos \alpha\Theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(r_c^{\alpha+k} \sum_{i=0}^{k-1} c_{ki} \cos((\alpha - (k-1) + 2i)\Theta) \right)$ сходится при $r_c < 1$.

То же можно доказать и для ряда

$$\tilde{S}_\alpha = r_c^\alpha \sin \alpha\Theta + \sum_{k=0}^{\infty} \left(r_c^{\alpha+k} \sum_{i=0}^{k-1} c_{ki} \sin((\alpha - (k-1) + 2i)\Theta) \right).$$

Заметим, что ряд $\tilde{S}_\alpha$ получается из ряда $\tilde{C}_\alpha$ заменой косинусов на синусы, коэффициенты остаются прежними.

Рассмотрим случай, когда $\alpha < 0$. Пока $\alpha + k < 0$, вид коэффициентов остается прежним. Однако при $r_c^{\alpha+k=0}$ возникает уравнение вида $\Phi''_{-\alpha} + \beta^2 \Phi_{-\alpha} = \cos \beta\Theta$, после чего вид коэффициентов резко усложняется. Тем не менее, ряды при $\alpha = -1/2$ легко выписываются в явном виде:

$$\tilde{C}_{-1/2} = r_c^{-1/2} \cos \frac{\Theta}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^j \frac{2k-1}{2k} \right) r_c^{-1/2+j} \cos \frac{(j+1)\Theta}{2},$$

$$\tilde{S}_{-1/2} = r_c^{-1/2} \sin \frac{\Theta}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^j \frac{2k-1}{2k} \right) r_c^{-1/2+j} \sin \frac{(j+1)\Theta}{2}.$$

Докажем сходимость рядов $\tilde{C}_\alpha$ и $\tilde{S}_\alpha$ в случае целых отрицательных α . Заметим, что в этом случае в рядах одновременно появляются слагаемые с косинусами и синусами. В общем случае на k -м шаге

$$\begin{aligned}\Phi_k(\Theta) = & \sum_{\substack{0 \leq i \leq k+|\alpha| \\ i \neq k+\alpha, k+\alpha+2}} \left(A_i \cos(i\Theta) + B_i \sin(i\Theta) \right) + \\ & + A_{\alpha+k} \cos((\alpha+k)\Theta) + B_{\alpha+k} \sin((\alpha+k)\Theta) + \\ & + A_{\alpha+k+2} \cos((\alpha+k+2)\Theta) + B_{\alpha+k+2} \sin((\alpha+k+2)\Theta) + \\ & + \sum_{\substack{0 \leq i \leq k+\alpha-1 \\ 1 \leq j \leq k+\alpha}} \left(A_{ij} \Theta^j \cos(i\Theta) + B_{ij} \Theta^j \sin(i\Theta) \right),\end{aligned}$$

а функция $\Phi_{k+1}(\Theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{k+1}(\Theta)'' + (\alpha+k+1)^2 \Phi_{k+1}(\Theta) = ((\alpha+k)(\alpha+k+1)\Phi_k(\Theta) + F_k''(\Theta)) \cos \Theta - \Phi_k'(\Theta) \sin \Theta.$$

Заметим, что частное решение этого уравнения в некотором смысле линейно по $\Phi_k(\Theta)$, поэтому для изучения роста суммы коэффициентов при построении ряда по нашему алгоритму достаточно рассмотреть всего четыре случая.

$$1) \quad \Phi_k(\Theta) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k+|\alpha| \\ i \neq k+\alpha, k+\alpha+2}} \left(A_i \cos(i\Theta) + B_i \sin(i\Theta) \right). \text{ Данный случай уже рас-}$$

сматривался при построении функций $\tilde{C}_\alpha$ и $\tilde{S}_\alpha$ при $\alpha > 0$, в этом случае сумма коэффициентов при переходе к следующей функции Φ_{k+1} растет достаточно медленно.

$$2) \quad \Phi_k(\Theta) = \cos((\alpha+k)\Theta). \text{ При таком } \Phi_k \text{ функция}$$

$$\Phi_{k+1}(\Theta) = \frac{1}{4} \cos((\alpha+k-1)\Theta).$$

$$3) \quad \Phi_k = \cos((\alpha+k+2)\Theta). \text{ В этом случае}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1}(\Theta) = & \frac{1}{4(\alpha+k+2)} \left(2(\alpha + \frac{3}{2} + k)(\alpha+k+1) \cos((\alpha+k+3)\Theta) \right) - \\ & - \frac{1}{2}(\alpha+k+1)\Theta \sin((\alpha+k+1)\Theta) - \frac{\alpha+k+2}{4} \cos((\alpha+k+1)\Theta).\end{aligned}$$

Сумма коэффициентов растет со скоростью, эквивалентной линейной, что не мешает сходимости наших степенных рядов.

$$4) \quad \Phi_k(\Theta) = \Theta^j \cos(i\Theta). \text{ В общем случае}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1}(\Theta) = & P_{j+1}^1(\Theta) \cos(i\Theta) + P_{j+1}^2(\Theta) \sin(i\Theta) + P_{j+1}^3(\Theta) \cos((i+1)\Theta) + \\ & + P_{j+1}^4(\Theta) \sin((i+1)\Theta) + P_{j+1}^5(\Theta) \cos((i-1)\Theta) + P_{j+1}^6(\Theta) \sin((i-1)\Theta),\end{aligned}$$

где $\{P_{j+1}^l\}_{l=1}^6$ — полиномы степени не выше $j+1$. Вычисление точного вида Φ_{k+1} довольно громоздко, но можно заметить, что сумма коэффициентов $\{P_{j+1}^l\}_{l=1}^6$ в данном случае растет при $k \rightarrow \infty$ со скоростью, не более чем полиномиальной.

Таким образом, ряды $\tilde{C}_\alpha$ и $\tilde{S}_\alpha$ сходятся по крайней мере при $r_c < \frac{1}{2\pi}$.

При дробных отрицательных α доказательство сходимости аналогично.

Перейдем к определению коэффициентов d_j и c_j в формуле (13). Коэффициенты $d_{-k}, \dots, d_{-1}$ последовательно определяются из граничных условий и ряда (4).

В трехмерном случае в отличие от двумерного конформные отображения можно построить лишь в нескольких вырожденных случаях, поэтому явное определение коэффициентов $\{c_j, d_j\}_{j=0}^{\infty}$ тем же методом невозможно. Докажем лишь, что такие коэффициенты существуют, т. е. система функций $\{\tilde{C}_{j/2}, \tilde{S}_{j/2}\}_{j=0}^{\infty}$ линейно полна в множестве решений задачи Дирихле в области $C^\infty(\bar{\Omega}_\delta \setminus C)$ с краевыми условиями нашего типа, т. е. на границе тора $\bar{\Omega}_\delta$ задана некоторая непрерывная функция с возможным разрывом на линии пересечения с диском σ и на самом краю диска σ ширины δ задана непрерывная функция, разлагающаяся в ряд вида (4).

Вначале рассмотрим двумерный случай. Хотя в нем уже все доказано, но мы приведем другое доказательство. В двумерном случае аналогичную задачу можно поставить следующим образом. Надо доказать, что система функций $\{r^{j/2} \cos \frac{j\Theta}{2}, r^{j/2} \sin \frac{j\Theta}{2}\}_{j=0}^{\infty}$ полна в множестве решений задачи Дирихле в круге с одним вырезанным радиусом, как показано на рисунке, и фактически с теми же краевыми условиями, только r_2 в ряде (4) надо заменить на двумерный радиус r .

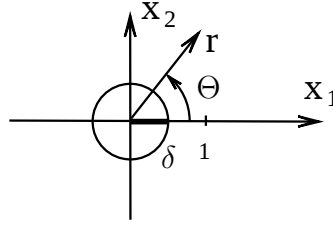


Рис. 2.

Далее, поскольку косинусы $\{\cos \frac{j\Theta}{2}\}_{j=0}^{\infty}$ принимают на вырезанном отрезке значения ± 1 , то можно подобрать коэффициенты перед функциями $\{r^{j/2} \cos \frac{j\Theta}{2}\}_{j=0}^{\infty}$, чтобы выполнялись краевые условия вида (4) на вырезанном отрезке с обеих сторон. Заметим, что там же функции $\{r^{j/2} \sin \frac{j\Theta}{2}\}_{j=0}^{\infty}$ тождественно равны нулю, зато система синусов $\{\sin \frac{j\Theta}{2}\}_{j=0}^{\infty}$ полна на отрезке $[0, 2\pi]$, благодаря чему с помощью системы $\{r^{j/2} \sin \frac{j\Theta}{2}\}_{j=0}^{\infty}$ можно выполнить любые непрерывные краевые условия на границе круга при $r = \delta$. Заметим, что они могут быть изменены системой $\{r^{j/2} \cos \frac{j\Theta}{2}\}_{j=0}^{\infty}$, но на конечную величину, поскольку ряд (4) сходится.

Вернемся к трехмерному случаю. Заметим, что в нашей системе координат и в осесимметричном случае краевые условия практически такие же. Доказательство полноты абсолютно аналогично, однако определение коэффициентов немного более громоздко, поскольку у каждой функции $\tilde{C}_j$ (или $\tilde{S}_j$) за первым

«главным» косинусом (синусом) следует ряд «поправочных», которые уже были в $\tilde{C}_{j-1}$ (или $\tilde{S}_{j-1}$) и поэтому не влияют на полноту.

Таким образом, мы нашли гармонические функции, которые пригодны для построения асимптотики в трехмерном случае. Перейдем непосредственно к доказательству леммы. Заметим, что оно практически ничем не отличается от двумерного случая.

Продолжим функции $h_{\pm}(r_2)$ гладко на отрезок $[\delta, \delta_1]$ так, чтобы они тождественно равнялись нулю в окрестности точки δ_1 , и обозначим $w_N(x) = \sum_{j=-k}^N d_j \tilde{C}_{j/2}$, где N — достаточно большое число. Очевидно, что можно подобрать коэффициенты d_j , чтобы $w_N(r_2, \pm 0) = h_{\pm}(r_2) + O(r_2^{(N+1)/2})$, $r_2 \rightarrow 0$ и аналогичные оценки были верны для производных этой разности. Далее построим функцию $v_N(x)$, которая гармонична в Ω_{δ_1} и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} v_N(r_2, \pm 0) &= h_{\pm}(r_2) - w_N(r_2, \pm 0), \quad 0 \leq r_2 < \delta_1, \\ v_N|_{r_c=\delta_1} &= -w_N|_{r_c=\delta_1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что решение такой задачи в классе $C(\overline{\Omega}_{\delta_1}) \cup C^{\infty}(\Omega)$ существует. На краях разреза при $0 < r_2 < \delta_1$ оно остается гладким, и нужно только выяснить поведение функции $v_N(r_2, x_3)$ на окружности C . В двумерном случае это было сделано с помощью конформного отображения, в нашем случае воспользуемся полнотой нашей построенной системы функций. Исходя из нее v_N можно представить в следующем виде:

$$v_N(x) = \sum_{j=1}^{N_2} \left(\tilde{d}_j \tilde{C}_{j/2} + \tilde{c}_j \tilde{S}_{j/2} \right) + O(r_c^{(N_2+1)/2}), \quad r_c \rightarrow 0, \quad (16)$$

где N_2 достаточно велико.

Определим функцию $u_N(x) = v_N(x) + w_N(x)$. По построению и в силу (15) эта функция гармонична в Ω_{δ_1} , равна $h_{\pm}(r_2)$ при $0 < r_2 \leq \delta_1$ и равна нулю при $r = \delta_1$. Так как при достаточно больших N разность $u_N(x) - u_{N+1}(x) \in C(\overline{\Omega}_{\delta_1})$ гармонична и равна нулю на границе $\overline{\Omega}_{\delta_1}$, то, следовательно, $u_N(x)$ не зависит от N . Из вида $w_N(x)$ и асимптотического разложения (16) вытекает (13). $\square$

Следствие 1. Пусть выполнены все условия леммы 1 и заданы постоянные $c_{-1}, c_{-2}, \dots, c_{-k}$, $k > 0$. Тогда существует функция $u(x)$, которая удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 1, только вместо асимптотического разложения (13) для нее справедливо асимптотическое разложение

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} d_j \tilde{C}_{j/2} + \sum_{j=-k}^{\infty} c_j \tilde{S}_{j/2}, \quad r_c \rightarrow 0. \quad (17)$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1. В качестве $w_N(x)$ возьмем функцию

$$\sum_{j=-k}^N d_j \tilde{C}_{j/2} + \sum_{j=-k}^{-1} c_j \tilde{S}_{j/2}.$$

$\square$

Теорема 1. Пусть k — целое число, функции $h_{\pm}(r_2) \in C^{\infty}(0, 1]$, для них справедливы асимптотические разложения (12) при $r_2 \rightarrow +0$. В случае $k > 0$ пусть заданы постоянные $c_{-1}, c_{-2}, \dots, c_{-k}$. Тогда существует функция $u(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus C)$, гармоничная в Ω , стремящаяся к нулю на бесконечности и удовлетворяющая условиям

$$u(x_1, x_2, \pm 0) = h_{\pm}(r_2) \text{ при } 0 < r_2 \leq 1. \quad (18)$$

При $r_c \rightarrow 0$ функции $u(x)$ справедливо асимптотическое разложение (13) при $k \leq 0$ и асимптотическое разложение (17) при $k > 0$.

Доказательство. В соответствии с леммой 1 и ее следствием построим в $\Omega_{\delta} \setminus C$ функцию $\tilde{u}(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega}_{\delta} \setminus C)$, гармоническую в $\Omega_{\delta} \setminus C$, удовлетворяющую условию (18) и имеющую асимптотическое разложение (13) и (17) в зависимости от знака k . Затем построим финитную функцию $\bar{u}(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus C)$, которая в окрестности окружности совпадает с $\tilde{u}(x)$.

Для окончания доказательства осталось построить функцию $v(x)$ такую, что

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= -\Delta \tilde{u}(x) \text{ в } \Omega, \\ v(x_1, x_2, \pm 0) &= h_{\pm}(r_2) - \tilde{u}(x_1, x_2, \pm 0) \text{ при } 0 < r_2 \leq 1, \end{aligned} \quad (19)$$

$v(x) \in C(\bar{\Omega})$, $v(x)$ стремится к нулю на бесконечности. Как известно, такая задача разрешима, поскольку граничная функция в правой части равенства (19) непрерывна на диске $\bar{\sigma}$ и, более того, тождественно равна нулю в окрестности его краев. Очевидно, что сумма $v(x) + \bar{u}(x)$ является искомой функцией $u(x)$. В окрестности краев диска σ функция $v(x)$ разлагается в ряд (13), где все $d_j = 0$, так что в асимптотическом разложении (17) суммы $v(x) + \bar{u}(x)$ по сравнению с тем же асимптотическим разложением функции $\bar{u}(x)$ (или, что то же самое, функции $\tilde{u}(x)$) изменятся лишь коэффициенты c_j при $j > 0$. $\square$

Итак, согласно теореме 1 и условию (11),

$$u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} d_{j,1} \tilde{C}_{j/2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{j,1} \tilde{S}_{j/2}, r_c \rightarrow 0 \quad (20)$$

Граничное условие для функции $u_2(x)$ имеет следующий вид:

$$u_2(x_1, x_2, \pm 0) = -g_{\pm}(r_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{[g_{\pm}(r_2)]^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, \pm 0). \quad (21)$$

Если учесть асимптотическое разложение (10) и то, что $u_0(x) = x_3$, то можно найти

$$u_2(x_1, x_2, \pm 0) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} d_{j,2} z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, r_2 \rightarrow 0.$$

В соответствии с теоремой 1 построим гармоническую в Ω и стремящуюся к нулю на бесконечности функцию $u_2(x)$, которая удовлетворяет условию (21).

Функция $u_2(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus C)$ и $u_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,2} \tilde{C}_{j/2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{j,2} \tilde{S}_{j/2}, r_c \rightarrow 0$.

Граничная функция для решения $u_3(x)$ уже имеет особенности на краях диска σ . Действительно, согласно условию (9),

$$u_3(x_1, x_2, \pm 0) = -g_{\pm}(r_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, \pm 0) - \frac{g_{\pm}^2(r_2)}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, \pm 0) - \frac{g_{\pm}^3(r_2)}{3!} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_3^3}(x_1, x_2, \pm 0) = \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \tilde{d}_{j,3} z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, r_2 \rightarrow 0.$$

Следовательно, функция $u_3(x)$ не ограничена около окружности C ; при приближении к краю диска она растет по крайней мере как $r_c^{-1/2}$. В классе таких функций, в соответствии с теоремой 1, существует решение $u_3(x)$, определенное с точностью до произвольной постоянной c_{-1} .

Теорема 2. *Существуют функции $u_k(x)$, которые удовлетворяют соотношениям (6), (8), (9) и при $k \geq 1$ имеют асимптотические разложения*

$$u_k(x) = \sum_{j=-k+2}^{\infty} d_{j,k} \tilde{C}_{j/2}(r_c, \Theta) + c_{j,k} \tilde{S}_{j/2}(r_c, \Theta) = \sum_{j=-k+2}^{\infty} r_c^{j/2} \Phi_j(\Theta), r_c \rightarrow 0. \quad (22)$$

При определении каждой функции $u_k(x)$ для $k \geq 3$ имеются произвольные постоянные $c_{-1,k}, c_{-2,k}, \dots, c_{-k+2,k}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы в [1]. $\square$

3. Внутреннее разложение

Итак задача (1)–(3), как и предыдущие задачи, бисингулярна: коэффициенты внешнего разложения (5) имеют нарастающие особенности около краев диска $\bar{\sigma}$. Ясно, что вблизи этих краев требуется использовать другое асимптотическое разложение. Будем рассматривать подробно окрестность точки $(-1, 0, 0)$. Вблизи этой точки уравнение границы $\partial\sigma_{\varepsilon}$ имеет вид $x_3 = \varepsilon g_{\pm}(r_2) = \varepsilon(\pm\sqrt{r_2} + O(r_2))$. Внутренние, растянутые переменные надо выбрать так, чтобы сохранилось уравнение Лапласа и уравнение границы в главном члене не зависело от параметра ε . Ясно, что внутренние переменные — это $\rho_2 = \varepsilon^{-2}r_2$ и $\xi_3 = \varepsilon^{-2}x_3$ или $\rho_c = \varepsilon^{-2}r_c$ и тот же угол Θ . Будем использовать обе системы координат без изменения обозначений функций. Обозначим вектором $\xi = (\rho_2, \xi_3)$. Также отметим, что выполняются соотношения $\rho_2 = \rho_c \cos \Theta$, $\xi_3 = \rho_c \sin \Theta$. В переменных ρ_2, ξ_3 уравнение границы $\partial\sigma_{\varepsilon}$ выглядит следующим образом:

$$\xi_3 = \pm\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_{\pm}(\rho_2, \varepsilon), \quad (23)$$

где

$$\Phi_{\pm}(\rho_2, \varepsilon) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+2} \varepsilon^j z^{j+2} \right)_{z=\pm\sqrt{\rho_2}}, \varepsilon\sqrt{\rho_2} \rightarrow 0. \quad (24)$$

Граничное условие (2) для функции $v(\rho_2, \xi_3, \varepsilon) \equiv u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ переходит в равенство

$$v(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_{\pm}(\rho_2, \varepsilon), \varepsilon) = 0. \quad (25)$$

Внутреннее разложение будем искать в виде

$$V = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\rho_2, \xi_3). \quad (26)$$

Ряд начинается с $i = 2$, так как $u_0|_{x \in C} = 0$, $u_0(x) \in C^\infty$.

Подставляя ряд (26) в граничное условие (25), формально приходим к граничным условиям для $v_i(\rho_2, \xi_3)$:

$$v_2(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2}) = 0, \quad (27)$$

$$v_i(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2}) - \left(\sum_{l=2}^{i-1} \sum_{q=1}^{i-l} c_{q,l,i} \frac{\partial^q v_l(\rho_2, z)}{\partial \eta^q} z^{i-l+q} \right)_{z=\pm\sqrt{\rho_2}} = 0, i \geq 3. \quad (28)$$

Здесь $c_{q,l,i}$ — некоторые постоянные, которые выражаются через g_j ; явный вид этих постоянных не играет никакой роли.

Перепишем уравнение Лапласа в координатах ρ_c и Θ :

$$\frac{\partial}{\partial \rho_c} \left(\rho_c (1 - \varepsilon^2 \rho_c \cos \Theta) \frac{\partial v}{\partial \rho_c} \right) + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\left(\frac{1 - \varepsilon^2 \rho_c \cos \Theta}{\rho_c} \right) \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right) = 0.$$

Подставим в него ряд $V = \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \varepsilon^4 v_4 + \dots$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_c} \left(\rho_c \left(\varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial \rho_c} + \varepsilon^3 \frac{\partial v_3}{\partial \rho_c} + \varepsilon^4 \frac{\partial v_4}{\partial \rho_c} \right) - \varepsilon^2 \rho_c \cos \Theta \left(\varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial \rho_c} + \varepsilon^3 \frac{\partial v_3}{\partial \rho_c} + \varepsilon^4 \frac{\partial v_4}{\partial \rho_c} + \dots \right) \right) + \\ + \frac{1}{\rho_c} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial \Theta^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial \Theta^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v_4}{\partial \Theta^2} + \dots \right) - \\ - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\cos \Theta \left(\varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial \Theta} + \varepsilon^3 \frac{\partial v_3}{\partial \Theta} + \varepsilon^4 \frac{\partial v_4}{\partial \Theta} + \dots \right) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\varepsilon^2 : \frac{\partial}{\partial \rho_c} \left(\rho_c \frac{\partial v_2}{\partial \rho_c} \right) + \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \Theta^2} = 0 \text{ или } \Delta_2 v_2 = 0, \quad (29)$$

$$\varepsilon^3 : \frac{\partial}{\partial \rho_c} \left(\rho_c \frac{\partial v_3}{\partial \rho_c} \right) + \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \Theta^2} = 0 \text{ или } \Delta_2 v_3 = 0,$$

$$\varepsilon^4 : \Delta_2 v_4 = \rho_c \cos \Theta \frac{\partial v_2}{\partial \Theta} + \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\cos \Theta \frac{\partial v_2}{\partial \Theta} \right),$$

...

$$\varepsilon^k : \Delta_2 v_k = \rho_c \cos \Theta \frac{\partial v_{k-2}}{\partial \Theta} + \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\cos \Theta \frac{\partial v_{k-2}}{\partial \Theta} \right). \quad (30)$$

...

Рассмотрим структуру этих коэффициентов. В качестве v_2 и v_3 можно взять любую двумерную гармоническую функцию, удовлетворяющую соответствующим краевым условиям. Например, ее можно искать в виде $v_2 = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \rho_c^{\alpha} \cos \alpha \Theta + d_{\alpha} \rho_c^{\alpha} \sin \alpha \Theta$. Коэффициент v_4 является уже решением двумерного уравнения Пуассона, поэтому его можно представить в виде суммы решения уравнения Лапласа и частного решения уравнения Пуассона, т. е.

$v_4 = \sum_{\beta} c_{\beta} \rho_c^{\beta} \cos \beta \Theta + d_{\beta} \rho_c^{\beta} \sin \beta \Theta + v_{4\text{ч.н.}}$. Причем коэффициенты c_{β} и d_{β} могут определяться только в зависимости от краевых условий, а $v_{4\text{ч.н.}}$ можно определять только в зависимости от v_2 . Именно таким образом мы и будем определять коэффициенты; конкретнее, если коэффициент v_2 включает некоторое слагаемое $c_{\alpha} \rho_c^{\alpha} \cos \alpha \Theta$, то мы включим в состав $v_{k\text{ч.н.}}$ коэффициент при ε^k от разложения гармонической функции $w_{\alpha 2} = c_{\alpha} \tilde{G}_{\alpha}(\rho_c, \Theta) = c_{\alpha} \varepsilon^{-2\alpha} \tilde{C}_{\alpha}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)$, а если коэффициент v_2 включает некоторое слагаемое $d_{\alpha} \rho_c^{\alpha} \sin \alpha \Theta$, то мы включим в состав всех $v_{k\text{ч.н.}}$ коэффициент при ε^k от разложения функции $\tilde{w}_{\alpha 2} = d_{\alpha} \tilde{P}_{\alpha}(\rho_c, \Theta) = d_{\alpha} \varepsilon^{-2\alpha} \tilde{S}_{\alpha}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)$.

Поскольку у нас есть прямая зависимость всех $w_{\alpha 2}$ и $\tilde{w}_{\alpha 2}$ от v_2 , то для удобства процесса согласования может иметь смысл считать все $w_{\alpha 2}$ и $\tilde{w}_{\alpha 2}$ частью v_2 , а $w_{\alpha i}$ и $\tilde{w}_{\alpha i}$ — частью v_i . Тогда вместе с рядом V можно рассматривать ряд $W = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\rho_c, \Theta, \varepsilon)$, коэффициенты которого зависят от ε , но являются гармоническими в трехмерном пространстве и имеют вид $w_i = \sum_{\gamma} c_{\gamma} \tilde{G}_{\gamma} + d_{\gamma} \tilde{P}_{\gamma}$, кроме того, ряд W является перегруппировкой ряда V и $A_N V = A_N W + O(\varepsilon^{N+1})$.

Приближенно заменяя границу (2) на «почти» параболический цилиндр $\xi_3 = \pm \sqrt{\rho_2}$, будем искать функции $v_i(\rho_2, \xi_3, \varepsilon)$ при $\rho_2 < \xi_3^2$. Так же, как и в других бисингулярных задачах, функции $v_i(\xi, \varepsilon)$ растут на бесконечности. К тому же в данном случае решения задач (27)–(30) не единственны. Можно было бы найти общий вид решений этих задач и установить степень определенности решений. Но удобнее при нахождении $v(\xi, \varepsilon)$ опираться на уже построенные функции $u_k(x)$ и на условие согласования рядов U и V . Поэтому для дальнейшего достаточно установить асимптотику на бесконечности решения уравнения Пуассона с правой частью, быстро стремящейся к нулю. Посредством D будем обозначать область $\{(\rho_2, \xi_3) : \rho_2 < \xi_3^2, \xi_3 \in \mathbb{R}^1\}$.

Лемма 2. Пусть функция $F(\rho_2, \xi_3) \in C^{\infty}(\bar{D})$ и

$$F(\rho_2, \xi_3) = O(\rho_c^{-2N}) \text{ при } \rho_c \rightarrow \infty, N > 0, \quad (31)$$

где $\rho_c = \sqrt{\rho_2^2 + \xi_3^2}$, функции $h_{\pm}(\xi_3) \in C([0, \infty))$, $h(\xi_3)_{\pm} = O(|\xi_3|^{-2N})$, $h_-(0) = h_+(0)$, $v(\rho_2, \xi_3)$ — стремящееся к нулю решение следующей краевой задачи:

$$v(\rho_2, \xi_3) \in C^{\infty}(\bar{D}), v|_{\partial D} = h_{\pm}(\xi_3) + O(\varepsilon), \quad (32)$$

$$\Delta_{\rho_2, \xi_3} v = F(\rho_2, \xi_3) \text{ при } (\rho_2, \xi_3) \in D. \quad (33)$$

Тогда равномерно в области $\bar{D}$

$$v(\rho_2, \xi_3) = \sum_{j=1}^{2N_1} c_j \tilde{G}_{-j/2} + d_j \tilde{P}_{-j/2} + O(\rho_c^{-N_1}) + O(\sqrt{\rho_c} \varepsilon), \quad (34)$$

где $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{-j/2}(\rho_c, \Theta) &= \varepsilon^j \tilde{C}_{-j/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta) = \rho_c^{-j/2} \cos \frac{j\Theta}{2} + \varepsilon \rho_c^{-j/2+1} \Phi_1(\Theta) + \dots \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \tilde{P}_{-j/2}(\rho_c, \Theta) &= \varepsilon^j \tilde{S}_{-j/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta) = \rho_c^{-j/2} \sin \frac{j\Theta}{2} + \varepsilon \rho_c^{-j/2+1} F_1(\Theta) + \dots \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и равенство (34) можно почленно дифференцировать достаточно большое число раз.

Доказательство. Для доказательства достаточно подставить в формулировку аналогичной двумерной леммы [1] вместо $\rho^{-j/2} \cos(\frac{j\Theta}{2})$ функцию $\tilde{G}_{-j/2}$, а вместо $\rho^{-j/2} \sin(\frac{j\Theta}{2})$ — функцию $\tilde{P}_{-j/2}$. $\square$

Лемма 3. Пусть ряд $\tilde{v} = \sum_{j=-k}^{\infty} \rho_c^{-j/2} \psi_j(\Theta, \varepsilon)$ является ф. а. р. краевой задачи

$$\Delta \tilde{v} = F(\rho_2, \xi_3) \text{ в области } D, \quad (35)$$

$$\tilde{v}(\xi_3^2, \xi_3) = \varphi(\xi_3), \quad \xi_3 \in \mathbb{R}^1 \quad (36)$$

при $\rho \rightarrow \infty$, где $F(\rho_2, \xi_3) \in C^\infty(\overline{D})$, $\varphi(\xi_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\psi_j(\Theta) \in C^\infty[0, 2\pi]$. Предположим также, что равенства (35) и (36) допускают дифференцирование любого порядка в том смысле, что правые части этих равенств разлагаются в асимптотические ряды, полученные соответствующим почленным дифференцированием ряда $\tilde{v}$. Тогда существует функция $v(\rho_2, \xi_3) \in C^\infty(\overline{D})$, которая удовлетворяет соотношению (35) и с точностью до $O(\varepsilon)$ соотношению (36) и такая, что

$$v(\rho_2, \xi_3) = \tilde{v} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(C_j \tilde{P}_{-j/2}(\rho_c, \Theta) + D_j \tilde{G}_{-j/2}(\rho_c, \Theta) \right), \quad \rho_c \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Повторяя соответствующее доказательство в [1], в качестве w_N надо брать не ограниченное решение, а стремящееся к нулю на бесконечности. $\square$

4. Согласование

При построении коэффициентов рядов (5) и (26) — функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ воспользуемся табл. 1 согласования этих рядов. Второй индекс i берется по номеру раскладываемой функции внутреннего разложения.

Табл. 2 получается из табл. 1 путем перемещения определенных слагаемых из ячеек в ячейки, расположенные левее. В результате такого перемещения в каждой ячейке оказывается гармоническая функция, имеющая известное асимптотическое разложение по ε . Вторая таблица используется для доказательства леммы 4 и иллюстрирует доказательство теоремы.

Построим, в соответствии с теоремой 2, функции u_k при $k \geq 1$. При этом функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определены однозначно, а для $k \geq 3$ при определении каждой функции имеется $k - 2$ произвольных постоянных $c_{-1,k}, c_{-2,k}, \dots, c_{-k+2,k}$. Фиксируем пока эти постоянные каким-нибудь образом и выпишем в нижних частях клеток каждой строки в табл. 1 асимптотическое разложение функции $\varepsilon^k u_k(x)$ при $r \rightarrow 0$. После перехода к внутренним переменным ρ_2, ξ_3 (так что $r_c = \varepsilon^2 \rho_c$, а угол Θ сохраняет свое значение) в столбцах табл. 1 появятся ряды $\varepsilon^i V_i$.

Таблица 1

$U \setminus V$	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$	$\varepsilon^3 v_3(\xi)$	$\varepsilon^4 v_4(\xi)$	...
$u_0(x)$	$\varepsilon^2 \xi_3 = \varepsilon^2 \rho_c \sin \Theta$	0	0	...
	$x_3 = r_c \sin \Theta$	0	0	
$\varepsilon u_1(x)$	$\varepsilon^2 \rho_c^{1/2} (d_{1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^3 \rho_c (d_{2,3} \cos \Theta + c_{2,3} \sin \Theta)$	$\varepsilon^4 \rho_c^{3/2} [(d_{3,4} \cos \frac{3\Theta}{2} + c_{3,4} \sin \frac{3\Theta}{2}) + (\frac{1}{4} d_{1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{4} c_{1,2} \sin \frac{\Theta}{2})]$	...
	$\varepsilon r_c^{1/2} (d_{1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon r_c (d_{2,3} \cos \Theta + c_{2,3} \sin \Theta)$	$\varepsilon r_c^{3/2} [(d_{3,4} \cos \frac{3\Theta}{2} + c_{3,4} \sin \frac{3\Theta}{2}) + (\frac{1}{4} d_{1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{4} c_{1,2} \sin \frac{\Theta}{2})]$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\varepsilon^2 d_{0,2}$	$\varepsilon^3 \rho_c^{1/2} (d_{1,3} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,3} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^4 \rho_c (d_{2,4} \cos \Theta + c_{2,4} \sin \Theta)$	...
	$\varepsilon^2 d_{0,2}$	$\varepsilon^2 r_c^{1/2} (d_{1,3} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,3} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^2 r_c (d_{2,4} \cos \Theta + c_{2,4} \sin \Theta)$	
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\varepsilon^2 \rho_c^{-1/2} (d_{-1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{-1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^3 d_{0,3}$	$\varepsilon^4 \rho_c^{1/2} [(d_{1,4} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,4} \sin \frac{\Theta}{2}) + (\frac{1}{4} d_{-1,4} \cos \frac{3\Theta}{2} + \frac{1}{4} c_{-1,4} \sin \frac{3\Theta}{2})]$	...
	$\varepsilon^3 r_c^{-1/2} (d_{-1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{-1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^3 d_{0,3}$	$\varepsilon^3 r_c^{1/2} [(d_{1,4} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,4} \sin \frac{\Theta}{2}) + (\frac{1}{4} d_{-1,4} \cos \frac{3\Theta}{2} + \frac{1}{4} c_{-1,4} \sin \frac{3\Theta}{2})]$	
...	...	...	...	...

Лемма 4. Ряды V_i являются ф. а. р. краевых задач (27)–(30).

Доказательство. Доказательство получается из доказательства двумерного случая практически простой заменой $\xi \rightarrow \rho_2$, $\eta \rightarrow \xi_3$. Здесь ξ , η — координаты двумерного пространства из [1]. $\square$

Далее, опираясь на лемму 3, можно по асимптотическим рядам V_i построить функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ — решения задач (27)–(30). Если бы ряды V_i являлись асимптотическими рядами для функций $v_i(\rho_2, \xi_3)$ при $\rho_c \rightarrow \infty$, то по построению рядов V_i было бы выполнено условие согласования рядов (5)–(26). Но, как следует из леммы 3, асимптотический ряд для функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$, вообще говоря, отличается от ряда V_i на ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \rho_c^{-j/2} (c_{j,i} \sin \frac{j\Theta}{2} + d_{j,i} \cos \frac{j\Theta}{2}) = A_{1,\xi} \sum_{j=1}^{\infty} (c_{j,i} \tilde{P}_{-j/2} + d_{j,i} \tilde{G}_{-j/2})$. (Так как этот ряд удовлетворяет однородному граничному условию $V_i(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2}) = 0$, то $d_{1,i} = 0$.) Поэтому построение функций $v_i(\rho_2, \xi_3)$ надо проводить последовательно.

Таблица 2

$U \setminus W$	$\varepsilon^2 w_2(\xi)$	$\varepsilon^3 w_3(\xi)$	...
$u_0(x)$	$\varepsilon^2 \left(\frac{\tilde{S}_1(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)}{\varepsilon^2} \right)$	0	...
	$\tilde{S}_1(\rho_c, \Theta)$	0	
$\varepsilon u_1(x)$	$\varepsilon^2 \left(d_{1,2} \frac{\tilde{C}_{1/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)}{\varepsilon} + c_{1,2} \frac{\tilde{S}_{1/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)}{\varepsilon} \right)$	$\varepsilon^3 \left(d_{2,3} \frac{\tilde{C}_1(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)}{\varepsilon^2} + c_{2,3} \frac{\tilde{S}_1(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)}{\varepsilon^2} \right)$	...
	$\varepsilon(d_{1,2} \tilde{C}_{1/2}(r_c, \Theta) + c_{1,2} \tilde{S}_{1/2}(r_c, \Theta))$	$\varepsilon r_c(d_{2,3} \tilde{C}_1(r_c, \Theta) + c_{2,3} \tilde{S}_1(r_c, \Theta))$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\varepsilon^2 d_{0,2}$	$\varepsilon^3 \left(d_{1,3} \frac{\tilde{C}_{1/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)}{\varepsilon} + c_{1,3} \frac{\tilde{S}_{1/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)}{\varepsilon} \right)$	...
	$\varepsilon^2 d_{0,2}$	$\varepsilon^2 r_c^{1/2} (d_{1,3} \tilde{C}_{1/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta) + c_{1,3} \tilde{S}_{1/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta))$	
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\varepsilon^2 (d_{-1,2} \varepsilon \tilde{C}_{-1/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta) + c_{-1,2} \varepsilon \tilde{S}_{-1/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta))$	$\varepsilon^3 d_{0,3}$	...
	$\varepsilon^3 (d_{-1,2} \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) + c_{-1,2} \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta))$	$\varepsilon^3 d_{0,3}$	
...	...	...	...

Сначала построим функцию $v_2(\rho_2, \xi_3)$ по ряду V_2 . В результате первый столбец в табл. 1 изменится, начиная с члена $\varepsilon^2 \rho_c^{1/2} (d_{1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$: изменится $c_{1,2}$. В результате, опираясь на теорему 2, окончательно построим функцию $u_3(x)$.

Так как изменение функции $u_3(x)$ влечет за собой изменения в граничных условиях для следующих функций, то все они, вообще говоря, изменятся. Но их главные члены асимптотики, стоящие в первом столбце таблицы, уже окончательно определены. Ряды при $i \geq 3$ также изменятся, но в силу леммы 4 они по-прежнему останутся ф. а. р. задач (27)–(30). Далее в соответствии с леммой 3 построим функцию $v_3(\rho_2, \xi_3)$ по ряду V_3 , стоящему во втором столбце. Теперь этот столбец изменится, начиная с члена $\varepsilon^3 \rho_c^{1/2} (d_{1,3} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,3} \sin \frac{\Theta}{2})$; что дает возможность окончательно определить $u_4(x)$ и т. д.

В итоге построены функции $u_k(x)$ — решения задач (6)–(9) и функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ — решения задач (27)–(30), так что для рядов (5) и (26) выполнено условие согласования

$$A_{N_1, \xi} A_{N_2, x} U = A_{N_2, x} A_{N_1, \xi} V \quad \forall N_1, N_2. \quad (37)$$

По существу, построение асимптотических разложений решения задачи (1)–(3) закончено. Надо только отметить, что функции $u_k(x)$ определены в $\bar{\Omega} \setminus C$, т. е. в более широкой области, чем $\Omega \setminus \sigma_\varepsilon$, а функции $v_i(\xi)$ определены только в области D , т. е. при $\rho_2 < \xi_3^2$. Однако даже в окрестности окружности $\rho_c = 0$ требуется

приблизить решение $u(x, \varepsilon)$ при $-\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_-(\rho_2, \xi_3, \varepsilon) \leq \xi_3 \leq \sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_+(\rho_2, \xi_3, \varepsilon)$, т. е. может быть, в более широкой области, чем в D . Для простоты будем считать, что в некоторой фиксированной окрестности нуля $g_+(r_2) \leq \sqrt{r_2}$ и $g_-(r_2) \geq -\sqrt{r_2}$, так что функции $v_i(\xi)$ определены всюду в пересечении этой окрестности с Ω_ε . (Если указанные условия не выполнены, то для построения асимптотики надо продолжить функции $v_i(\xi)$ вне области D . Как указано в [1], в двумерном случае это не влечет за собой существенных трудностей, но данный случай мы не будем рассматривать.)

Обозначим через $S(\delta)$ пересечение области Ω_ε с тором радиуса δ вокруг окружности C . (Множество $S(\delta)$ зависит, конечно, и от ε , но эту зависимость не будем включать в обозначение.)

Введем обозначения

$$\begin{aligned} T_N(x, \varepsilon) &= A_{N,x}U + A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U - u(x, \varepsilon), \\ R_N(x, \varepsilon) &= A_{N,x}U + A_{N,\xi}W - A_{N,x}A_{N,\xi}W - u(x, \varepsilon), \\ \text{где } U &\text{ — ряд (5), } V \text{ — ряд (26), } W = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i w_i(\xi, \varepsilon), \\ w_i &= \sum_{j=-i}^{\infty} (d_{-j/2,i} \tilde{G}_{-j/2} + c_{-j/2,i} \tilde{P}_{-j/2}). \end{aligned}$$

Теорема 3. Для всех достаточно больших N всюду в $\overline{\Omega}_\varepsilon$ справедлива оценка $|T_N(x, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{N/2}$, где постоянная M не зависит от x и ε .

Доказательство. Из соотношений (3), (7) и (8) следует, что

$$A_{N,x}U - u(x, \varepsilon) = o(1) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Поскольку разность $A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U$ занимает клетки таблицы с убывающими функциями, то она также стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$T_N(x, \varepsilon) = o(1) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Далее докажем, что граничные значения $T_N(x, \varepsilon)$ на $\partial\sigma_\varepsilon$ малы. При $x \in \partial\sigma_\varepsilon \setminus S(\varepsilon)$ функция $A_{N,x}U = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k(x_1, x_2, \varepsilon g_\pm(x_1, x_2)) =$
 $= O(\varepsilon^{N+1} u_{N+1}(x_1, x_2, \varepsilon g_\pm(r_2))) = O(\varepsilon^{N+1} \cdot r_c^{1-\frac{N+1}{2}}) = O(\varepsilon^{N+1} \cdot \varepsilon^{1-\frac{N+1}{2}}) = O(\varepsilon^{\frac{N+4}{2}})$
 в силу условий (9) и равномерной гладкости функций $g_\pm(x_1, x_2)$ на этом участке границы или просто по построению функций u_k .

$$\begin{aligned} \text{Из таблицы } A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U &= \sum_{i=2}^N \varepsilon^i v_i - A_{N,x} \left(\sum_{i=2}^N \varepsilon^i v_i \right) = \\ &= \sum_{i=2}^N \varepsilon^i \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{i,j}(\Theta) \rho_c^{\frac{i-j}{2}} - \sum_{i=2}^N \varepsilon^i \sum_{j=1}^N \varphi_{i,j}(\Theta) \rho_c^{\frac{i-j}{2}} = \\ &= \sum_{i=2}^N \varepsilon^i \sum_{j=N+1}^{\infty} \varphi_{i,j}(\Theta) \rho_c^{\frac{i-j}{2}} = O \left(\sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \varphi_{i,N+1}(\Theta) \rho_c^{\frac{i-N-1}{2}} \right) = \\ &= O \left(\sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \cdot \varepsilon^{\frac{N+1-i}{2}} \right) = O \left(\varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \right) = O \left(\varepsilon^{\frac{N+4}{2}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, при $x \in \partial\sigma_\varepsilon \setminus S(\varepsilon)$

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U = O(\varepsilon^{\frac{N+4}{2}}). \quad (39)$$

По построению ряда V , а точнее, из леммы 4 следует, что на участке границы $\sigma_\varepsilon \cap S(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} A_{N,\xi}V - u &= O(\varepsilon^{N+1}v_{N+1}(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_\pm(\rho_2, \varepsilon)) = O(\varepsilon^{N+1}v_{N+1}) = \\ &= O(\varepsilon^{N+1} \cdot \rho_c^{-\frac{1}{2} + \frac{N+1}{2}}) = O(\varepsilon^{N+1}\varepsilon^{\frac{1}{2} - \frac{N+1}{2}}) = O(\varepsilon^{\frac{N+1}{2} + \frac{1}{2}}) = O(\varepsilon^{\frac{N+2}{2}}). \end{aligned}$$

Также благодаря асимптотическому разложению функций u_k при $r_c \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U &= \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k - A_{N,\xi}(\sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=N+1}^{\infty} f_{k,j}(\Theta) \cdot r^{-\frac{k}{2} + \frac{j}{2}} = O(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \varepsilon^{-\frac{k}{2} + \frac{N+1}{2}}) = O(\varepsilon^{\frac{N+2}{2}}). \end{aligned}$$

Следовательно, при $x \in \partial\sigma_\varepsilon \cap S(\varepsilon)$

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U = O(\varepsilon^{\frac{N+2}{2}}). \quad (40)$$

Заметим, что $\Delta T_N \neq 0$, поэтому рассмотрим наряду с T_N ряд R_N . Он является гармоническим, но также удовлетворяет оценкам (38), (39) и (40). Кроме того,

$$R_N = T_N + O(\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}). \quad (41)$$

Из оценок (38), (39), (40) и (41) вытекает утверждение теоремы. $\square$

Следствие 2. В области $\Omega_\varepsilon \setminus S(\varepsilon^\gamma)$ ряд (5) является равномерным асимптотическим разложением решения задачи (1)–(3). В области $\Omega_\varepsilon \cap S(\varepsilon^\gamma)$ ряд (26) является равномерным асимптотическим разложением той же задачи, где γ — любое число, такое, что $0 < \gamma < 2$.

Доказательство. Достаточно проверить, что в области $\Omega_\varepsilon \setminus S(\varepsilon^\gamma)$ равномерно мала разность $A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U$, а в области $\Omega_\varepsilon \cap S(\varepsilon^\gamma)$ равномерно мала разность $A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U$. Действительно, в первой области $|A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U| \leq M \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i |v_i(\xi) - B_{\frac{N-i}{2}} v_i(\xi)| \leq M \sum_{i=2}^N \varepsilon^i \rho_c^{-\frac{N-1-i}{2}} \leq \sum_{i=2}^N \varepsilon^{i + \frac{N-1-i}{2}(2-\gamma)} \leq M \varepsilon^{(N+1)(1-\frac{\gamma}{2})}$.

А во второй области

$$|A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U| \leq M \sum_{k=1}^N \varepsilon^k r_c^{\frac{N-k+1}{2}} \leq M \sum_{k=1}^N \varepsilon^{k+\gamma\frac{N-k+1}{2}} \leq M \varepsilon^{\gamma\frac{N+1}{2}}. \quad \square$$

Автор благодарит акад. А. М. Ильина за постановку задачи и полезные обсуждения работы.

Список литературы

1. **Ильин, А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А. М. Ильин. — М. : Наука, 1989.
2. **Лойцянский, Л. Г.** Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М. : Наука, 1987.