Таким образом, реализация на уроках русского языка предложенных педагогических условий приведёт к повышению уровня развития познавательного интереса у младших школьников.

***Литература***


1. *Ермакова Т. Л.* Учить мыслить // Проблемы педагогики. № 1 (2), 2015. С. 31-33.
2. *Малаева Т. Х.* Формирование познавательного интереса учащихся на уроках математики // Проблемы педагогики. № 10 (11), 2015. С. 13-15.


---

# Задача о списывании

## Попов А. М.

*Попов Александр Михайлович / Popov Aleksandr Mihajlovich – кандидат технических наук, доцент,*
*кафедра высшей математики,*
*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова, г. Санкт-Петербург*



***Аннотация:*** *в статье изучается оптимальное поведение учащихся в ходе проведения группового тестирования.*
***Abstract:*** *this article examines the optimal behavior of students during group testing.*



***Ключевые слова:*** *теория игр, групповое тестирование.*
***Keywords:*** *game theory, group testing.*


Пусть $N$ студентов пишут тестовое задание. Исследуем оптимальное поведение студентов, когда каждый из них имеет два варианта поведения: списать или не списывать, при условии, что тяжесть наказания $C$ за списывание обратно пропорциональна числу списывающих. Построим математическую модель задачи в терминах статической игры с полной информацией, на случай двух студентов и затем обобщим результат.

***Определение***. Декартовым произведением $N$ множеств $S_1, \ldots, S_N$ называется множество

$$S = \prod_{i=1}^{N} S_i = \{(s_1, \ldots, s_N) | s_1 \in S_1, \ldots, s_N \in S_N\}.$$

Если $I = \{1, \ldots, N\}$ – множество игроков, $S_1, \ldots, S_N$ – множества стратегий игроков, то множество профилей стратегий, есть $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$. Для случая двух игроков множество профилей имеет вид

$$S = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\},$$

где каждый игрок выбирает одну из двух стратегий списать ($s_i = 1$) или не списывать ($s_i = 0$). Любой элемент $s_i \in S_i$ называется стратегией игрока $i$, любой элемент $s \in S$ – профилем стратегий игроков.

Обозначим через $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$ множество всех возможных профилей стратегий для всех игроков, кроме игрока $i$. Соответственно, $s_{-i} \in S_{-i}$, будет профилем стратегий всех игроков, кроме $i$.

Функция выигрыша игрока $i$ присваивает каждому профилю стратегий $s \in S$ некоторый выигрыш $u_i: S \to R$. В зависимости от выбранной стратегии выигрыш игрока $i$ при сделанных предположениях составит

$$u_i(s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{C}{\sum_{j=1}^{N} s_j}, & s_i = 1; \\ 0, & s_i = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь чистый выигрыш от списывания равен 1, суммарный объем наказания составляет $C$.

Назовем функцию $u: S \to R^N = (u_1, \dots, u_N)$ профилем функций выигрышей игроков. Таким образом, определен набор $G = \langle I, S, u \rangle$, называемый игрой в нормальной форме с матрицей функции выигрыша игроков в виде

*Таблица 1. Матрица функции выигрыша игроков*

| | | **Студент 2** | |
|---|---|---|---|
| | | «не списывать» 0 | «списывать» 1 |
| **Студент 1** | «не списывать» 0 | $0; 0$ | $0; 1 - C$ |
| | «списывать» 1 | $1 - C; 0$ | $1 - \frac{C}{2}; 1 - \frac{C}{2}$ |

В качестве оптимального поведения студентов будем искать такой профиль стратегий, при котором ни один отдельно взятый игрок не захочет изменить свою стратегию, если стратегии оставшихся игроков останутся неизменными. Такой профиль удовлетворяет условию равновесия Нэша.

***Определение.*** Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ – игра в нормальной форме. Тогда $s^* \in S$ – равновесие Нэша, если для всех $i$, для всех $s_i^{'} \in S_i$, мы имеем

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i}^*) \qquad (2)$$

Введем следующее определение:

***Определение.*** Функция реакции игрока $i$ есть точечно-множественное отображение $\check{s}_i$ между множествами $S_{-i}$ и $S_i$ (то есть правило, которое каждому элементу множества $S_{-i}$ ставит в соответствие какое-то подмножество множества $S_i$) такое, что для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ имеем

$$\check{s}_i(s_{-i}) = \left\{ s_i \in S_i | u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s_i^{'} \in S_i} u_i(s_i^{'}, s_{-i}) \right\}. \qquad (3)$$

Таким образом, функция реакции показывает, какие стратегии игрока максимизируют его выигрыш в зависимости от профиля стратегий других игроков.

Для поиска равновесия Нэша, в зависимости от параметра $C$, используем следующую лемму:

***Лемма.*** Профиль стратегий $s^*$ является равновесием Нэша в том и только том случае, если для всех $i$ имеем

$$s_i^* \in \check{s}_i(s_{-i}^*) \qquad (4)$$

Используем утверждение (4) для поиска равновесия Нэша, в зависимости от параметра $C$. В случае двух студентов, имеем:

Пусть $0 \leq C < 1$, тогда

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^* = \{0,0\}$ | $s_1^* = 0, s_{-1}^* = 0$<br>$s_2^* = 0, s_{-2}^* = 0$ | $s_1^* \notin \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{1\}$<br>$s_2^* \in \check{s}_2(s_{-2}^*) = \{1\}$ | Равновесия нет |
| $s^* = \{1,0\}$ | $s_1^* = 1, s_{-1}^* = 0$<br>$s_2^* = 0, s_{-2}^* = 1$ | $s_1^* \in \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{1\}$<br>$s_2^* \notin \check{s}_2(s_{-2}^*) = \{1\}$ | Равновесия нет |
| $s^* = \{0,1\}$ | $s_1^* = 0, s_{-1}^* = 1$<br>$s_2^* = 1, s_{-2}^* = 0$ | $s_1^* \notin \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{1\}$<br>$s_2^* \in \check{s}_2(s_{-2}^*) = \{1\}$ | Равновесия нет |
| $s^* = \{1,1\}$ | $s_1^* = 1, s_{-1}^* = 1$<br>$s_2^* = 1, s_{-2}^* = 1$ | $s_1^* \in \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{1\}$<br>$s_2^* \in \check{s}_2(s_{-2}^*) = \{1\}$ | Равновесие Нэша |

Пусть $1 \leq C \leq 2$, тогда

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^* = \{0{,}0\}$ | $s_1^* = 0,\ s_{-1}^* = 0$<br>$s_2^* = 0,\ s_{-2}^* = 0$ | $s_1^* \in \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0\}$<br>$s_2^* \in \check{s}_1(s_{-2}^*) = \{0\}$ | Равновесие Нэша |
| $s^* = \{1{,}0\}$ | $s_1^* = 1,\ s_{-1}^* = 0$<br>$s_2^* = 0,\ s_{-2}^* = 1$ | $s_1^* \notin \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0\}$<br>$s_2^* \in \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0{,}1\}$ | Равновесия нет |
| $s^* = \{0{,}1\}$ | $s_1^* = 0,\ s_{-1}^* = 1$<br>$s_2^* = 1,\ s_{-2}^* = 0$ | $s_1^* \in \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0{,}1\}$<br>$s_2^* \notin \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0\}$ | Равновесия нет |
| $s^* = \{1{,}1\}$ | $s_1^* = 1,\ s_{-1}^* = 1$<br>$s_2^* = 1,\ s_{-2}^* = 1$ | $s_1^* \in \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0{,}1\}$<br>$s_2^* \in \check{s}_2(s_{-2}^*) = \{0{,}1\}$ | Равновесие Нэша |

Пусть $C > 2$, тогда

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^* = \{0{,}0\}$ | $s_1^* = 0,\ s_{-1}^* = 0$<br>$s_2^* = 0,\ s_{-2}^* = 0$ | $s_1^* \in \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0\}$<br>$s_2^* \in \check{s}_1(s_{-2}^*) = \{0\}$ | Равновесие Нэша |
| $s^* = \{1{,}0\}$ | $s_1^* = 1,\ s_{-1}^* = 0$<br>$s_2^* = 0,\ s_{-2}^* = 1$ | $s_1^* \notin \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0\}$<br>$s_2^* \in \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0\}$ | Равновесия нет |
| $s^* = \{0{,}1\}$ | $s_1^* = 0,\ s_{-1}^* = 1$<br>$s_2^* = 1,\ s_{-2}^* = 0$ | $s_1^* \in \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0\}$<br>$s_2^* \notin \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0\}$ | Равновесия нет |
| $s^* = \{1{,}1\}$ | $s_1^* = 1,\ s_{-1}^* = 1$<br>$s_2^* = 1,\ s_{-2}^* = 1$ | $s_1^* \notin \check{s}_1(s_{-1}^*) = \{0\}$<br>$s_2^* \notin \check{s}_2(s_{-2}^*) = \{0\}$ | Равновесия нет |

Функция реакции студентов $i$, в общем случае $N$ студентов, будет [1].

$$\check{s}_i(s_{-i}^*) = \begin{cases} 0, & \sum_{j \neq i} s_j < C - 1\,; \\ \{0{,}1\}, & \sum_{j \neq i} s_j = C - 1\,; \\ 1, & \sum_{j \neq i} s_j > C - 1\,. \end{cases} \qquad (5)$$

Таким образом, в общем случае, в зависимости от значений параметра С, может быть несколько равновесий:

1. $C < 1$ - существует одно равновесие (все списывают);
2. $1 \leq C \leq N$ – существуют два равновесия (никто не списывает и все списывают);
3. $C > N$ – существует одно равновесие (никто не списывает).

Полученное решение позволяет сделать следующий вывод. В рассматриваемой задаче выигрыш от списывания каждого студента $1 - C/N$ увеличивается с числом списывающих. Таким образом, списывание может быть вызвано не столько институциональными причинами (такими как тяжесть наказания $C$, число студентов $N$ или их отношение к списыванию), а ожиданиями студентов относительно действий их товарищей. Если студент считает, что его товарищи списывать не будут, то его выигрыш от списывания будет меньше, чем тяжесть наказания, которое он понесет. Следовательно, он не станет списывать. Если у остальных студентов имеются такие же прогнозы относительно действий своих товарищей, то списывать не будет никто. Однако если же студент ожидает, что все остальные будут списывать, то ему будет выгодно списывать: наказание будет достаточно легким по сравнению с выигрышем.

### *Литература*


1. *Захаров А. В.* Теория игр в общественных науках. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. 304 с.