

Экономико-математическое моделирование

УДК 519.21:330.4

ЯДЕРНАЯ ОЦЕНКА ВОЛАТИЛЬНОСТИ*

О. Л. КРИЦКИЙ,

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
и математической физики
E-mail: olegkol@tpu.ru

П. В. ТРЯСУЧЕВ,

ассистент кафедры высшей математики
и математической физики
E-mail: pet3001@yandex.ru

Е. О. САВЕЛЬЕВА,

студент физико-технического института
E-mail: olegkol@tpu.ru
Томский политехнический университет

Предложена непараметрическая оценка волатильности, построенная с использованием ядерных функций с шириной спектра плотности оценки h , зависящей от неприятия риска инвестора. Вычисленная оценка используется для нахождения справедливых цен деривативов российского фондового рынка.

Ключевые слова: волатильность, ширина спектра, ядерная оценка, цена, опцион, фьючерс.

Введение. Определение стоимости дериватива является классической задачей финансовой математики [5, 8]. Общий подход к ее решению заключается в выражении равновесной или справедливой цены дериватива через некоторые фазовые

переменные, например, через цену базового актива, безрисковую процентную ставку, цену исполнения, время до исполнения и др. К сожалению, развитая теория практически ничего не говорит о параметрическом оценивании или непараметрическом выборе извлеченной волатильности $\hat{\sigma}$, необходимой для репликации портфелей, содержащих деривативы высоких порядков (опционов на фьючерс, опционов на опцион и т. п.), для вычисления стохастического дисконтирующего фактора или предельной ставки замещения, а также для построения непрерывной риск-нейтральной плотности распределения вероятностей по известным ценам на эти деривативы. При этом приемлемое определение таких плотностей как непрерывных функций от цен исполнения X остается по большей части сложной задачей, так как, во-первых, значения X изменяются дискретно, во-вторых, они находятся на большом расстоянии друг от друга, равном 2–5 % цены базового актива,

* Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», контракт № П691, 2010–2012 гг.

и, наконец, в-третьих, плотности должны зависеть от восприимчивости инвестора к несению убытков от обесценения активов – от неприятия риска [6]. Этот коэффициент, абсолютный, относительный или условный, является важной характеристикой управления активами в условиях неопределенности рыночной конъюнктуры. Его значение помогает инвестору принять решение о вложении им финансовых средств в рискованные или безрисковые активы на краткосрочный или долгосрочный периоды, а также позволяет разделить совокупность профессиональных участников фондового рынка на риск-нейтральных, предпочитающих или отрицающих риск, что в свою очередь влияет на ликвидность и объем торговли ценными бумагами.

В работе проводится непараметрическое оценивание извлеченной волатильности с использованием ядерных функций [11] с шириной спектра плотности оценки h , зависимой от неприятия риска инвестора [1, 4]. Вычисленная $\hat{\sigma}$ используется для нахождения справедливых цен деривативов второго порядка, торгуемых на российском фондовом рынке.

Ядерная оценка волатильности. Рассмотрим портфель π , состоящий из проданных двух опционов покупателя с ценой исполнения X и купленных опционов покупателя с ценами исполнения $X - \varepsilon$ и $X + \varepsilon$ соответственно, где ε – некоторая бесконечно малая. Функция выплаты двух последних опционов устроена таким образом, что контрагент не получает ничего, если базовый актив имеет цену, выходящую за границы интервала $[X - \varepsilon; X + \varepsilon]$. Устремляя ε к нулю, замечаем, что функция выплаты f_T в момент времени T стремится к дельта-функции с центром в точке X . Так как цена опциона покупателя $C(S_T, X, \tau)$ с базовым активом стоимостью S_T , ценой исполнения X в произвольный момент времени τ равна

$$C(S_T, X, \tau) = E^* \left(\frac{f_T}{e^{r\tau}} \right),$$

где r – безрисковая процентная ставка;

E^* – риск-нейтральное математическое ожидание с плотностью f^* ,

то, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$C(S_T, X, \tau) = \exp(-r\tau) f^*(X).$$

С другой стороны, стоимость $C(S_T, X, \tau)$ этого же опциона равна

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} [-2C(S_T, X, \tau) + C(S_T, X - \varepsilon, \tau) + \\ & + C(S_T, X + \varepsilon, \tau)] \rightarrow C''_{XX}(S_T, X, \tau). \end{aligned}$$

Поэтому окончательно получаем

$$f^*(X) = e^{r\tau} C''_{XX}(S_T, X, \tau). \quad (1)$$

По формуле Блэка–Шоулса цена опциона в момент времени t с датой исполнения $T = t + \tau$, с ценой исполнения X , выпущенного на базовый актив ценой S_t с дивидендами $\delta_{t,\tau}$, безрисковой процентной ставкой $r_{t,\tau}$ и риск-нейтральной плотностью f_{BS}^* выражается формулой [5]

$$\begin{aligned} & C_{BS}(S_T, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}, \sigma) = \\ & = e^{-r_{t,\tau}\tau} \int_R \max[S_T - X, 0] f_{BS}^*(S_t) dS_t, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & C_{BS}(S_T, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}, \sigma) = S_t \Phi(d_1) - X e^{-r_{t,\tau}\tau} \Phi(d_2), \quad (2) \\ & \text{где } d_1 = \frac{\ln S_t - \ln X + (r_{t,\tau} - \delta_{t,\tau} + \sigma^2/2)\tau}{\sqrt{\tau} \sigma}; \end{aligned}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}.$$

В этом случае риск-нейтральная плотность f_{BS}^* цены актива S_t будет логнормальной со средним $[(r_{t,\tau} - \delta_{t,\tau}) - \sigma^2/2]\tau$ и дисперсией $\sigma^2\tau$:

$$\begin{aligned} & f_{BS}^*(S_T) = e^{r_{t,\tau}\tau} \left| \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial X^2} \right|_{X=S_T} = \\ & = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp \left\{ -\frac{[\ln(S_T/S_t) - (r_{t,\tau} - \delta_{t,\tau} - \sigma^2/2)\tau]^2}{2\sigma^2\tau} \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

В случае произвольного опциона плотность f^* не может быть представлена в виде явной аналитической формулы. В [6] предложено оценивать ее непараметрически. Для этого используется равенство (1), фиксируются рыночные цены опционов при различных ценах и сроках исполнения и по ним строится линейная регрессия. Однако для практических вычислений такой подход неудобен, так как необходимо восстановить непрерывную функцию f^* по значениям второй производной $C''_{XX}(S_T, X, \tau)$ лишь в нескольких известных точках X (согласно спецификации контрактов страйки фиксированы), что сопряжено с высокой вычислительной погрешностью. Поэтому для построения f^* будем использовать непрерывные цены фьючерсов $F_{t,\tau}$, обозначив через $Y \equiv [F_{t,\tau}, X, \tau, r_{t,\tau}]$ вектор характеристик дериватива или вектор регрессоров.

Пусть

$C(S_t, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}) = C_{BS}[F_{t,\tau}, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}, \sigma(X/F_{t,\tau}, \tau)]$ – цена опциона, которую найдем в соответствии с выражением (2), для чего оценим непараметрически извлеченную волатильность $\sigma(X/F_{t,\tau}, \tau)$. Предположим при этом, что функция $C(S_t, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau})$, определенная по формуле (2), удовлетворяет

всем необходимым условиям. Для оценивания $\hat{\sigma}(X/F_{t,\tau}, \tau)$ используем известную ядерную оценку Надарая–Уотсона [9, 12]:

$$\hat{\sigma}(X/F_{t,\tau}, \tau) = \frac{\sum_{i=1}^n k_{X/F} \left(\frac{X/F_{t,\tau} - X_i/F_{t_i,\tau_i}}{h_{X/F}} \right) k_{\tau} \left(\frac{\tau - \tau_i}{h_{\tau}} \right) \sigma_i}{\sum_{i=1}^n k_{X/F} \left(\frac{X/F_{t,\tau} - X_i/F_{t_i,\tau_i}}{h_{X/F}} \right) k_{\tau} \left(\frac{\tau - \tau_i}{h_{\tau}} \right)}, \quad (4)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$;

$n = \sum_{i=1}^J N_i$, N_i – количество наблюдений для i -го объекта, где J – количество опционов за рассматриваемый период;
 $k_{X/F}$, k_{τ} – значения некоторой одномерной ядерной функции $k(x)$, вычисленные в точках X/F и τ при значениях ширины спектра $h_{X/F}$, h_{τ} и порядке $q_{X/F}$, q_{τ} соответственно;
 σ_i – извлеченная из опциона C_i волатильность.

В целом выбор ядерной функции $\hat{\sigma}(X/F_{t,\tau}, \tau)$ и ширины спектра h является отдельной сложной задачей, на решении которой не будем останавливаться подробно. Наиболее полный, по мнению авторов, анализ различных способов такого выбора приведен в работе [10].

Для дальнейших расчетов используем ядерные функции $k(x)$ порядков $q = 2$ и $q = 4$ [6, 10, 11] соответственно

$$k_{(2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad k_{(4)}(z) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} (3 - z^2) e^{-\frac{z^2}{2}}$$

с шириной спектра

$$h_{X/F} = \gamma_{X/F} s_{X/F} n^{-1/(8+2q)} / \ln n, \\ h_{\tau} = \gamma_{\tau} s_{\tau} n^{-1/(2+2q)} / \ln n, \quad (5)$$

где $s_{X/F}$ и s_{τ} – безусловные стандартные отклонения для переменных X/F и τ ;

$\gamma_{X/F}$, γ_{τ} – фиксированные значения неприятия риска инвестора (о расчете неприятия риска см., например, в [1–3]).

Непараметрическое оценивание справедливой цены опциона на фьючерс. Для оценивания справедливой цены опциона на фьючерс докажем аналог формулы Блэка–Шоулса для этого опциона. Проверим справедливость теоремы.

Теорема. Пусть цена фьючерса в момент времени t со сроком до исполнения $\tau = (T - t)$ и ценой S_t базового актива есть $F_{t,\tau} = S_t e^{r_{t,\tau}\tau}$, где $r = r_{t,\tau}$ – стохастическая безрисковая процентная ставка. Тогда

формула Блэка–Шоулса имеет вид

$$C(F_{t,\tau}, X, \tau, r_{t,\tau}, \sigma) = F_{t,\tau} e^{-r_{t,\tau}\tau} \Phi(d_1) - X e^{-r_{t,\tau}\tau} \Phi(d_2), \quad (6)$$

$$\text{где } d_1 = \frac{\ln \frac{F_{t,\tau}}{X} + \frac{\sigma^2}{2} \tau}{\sqrt{\tau} \sigma};$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau};$$

$$X = F_{t,0}.$$

Доказательство. Продадим опцион покупателя на Δ фьючерсов со временем до исполнения τ за цену $C(F_{t,\tau}, \tau)$. Пусть эволюция цены рискованного актива S_t , являющегося базовым для фьючерса с ценой $F_{t,\tau}$, задается стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW.$$

К справедливой цене фьючерса со стохастической процентной ставкой $F_{t,\tau} = S_t e^{r_{t,\tau}\tau}$ применим формулу Ито [8]:

$$dF_{t,\tau} = \frac{\partial F_{t,\tau}}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{t,\tau}}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial F_{t,\tau}}{\partial S_t} dS_t.$$

$$\text{Так как } \frac{\partial F_{t,\tau}}{\partial t} = e^{r\tau}, \quad \text{а } \frac{\partial^2 F_{t,\tau}}{\partial S_t^2} = 0, \quad \text{то}$$

$$dF_{t,\tau} = \frac{\partial F_{t,\tau}}{\partial t} dt + e^{r\tau} dS_t = (-r S_t dt + dS_t) e^{r\tau}.$$

$$\text{Далее, } (dF_{t,\tau})^2 = (dS_t)^2 e^{2r\tau}, \quad (dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt.$$

Окончательно получим

$$(dF_{t,\tau})^2 = \sigma^2 S_t^2 e^{2r\tau} dt = \sigma^2 F_{t,\tau}^2 dt.$$

Применим к $C(F_{t,\tau}, \tau)$ формулу Ито:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2} (dF_{t,\tau})^2 + \frac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}} dF_{t,\tau} = \\ = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2} \sigma^2 F_{t,\tau}^2 dt + \frac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}} dF_{t,\tau}.$$

Рассмотрим портфель из опциона на фьючерс и Δ фьючерсов:

$$\Pi = C - \Delta F_{t,\tau}, \quad d\Pi = dC - \Delta dF_{t,\tau}.$$

Поэтому

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2} \sigma^2 F_{t,\tau}^2 dt + \frac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}} dF_{t,\tau} - \Delta dF_{t,\tau}.$$

Члены, содержащие $dF_{t,\tau}$ в последнем равенстве, отвечают за стохастическую часть, которую необходимо обнулить для получения безрискового портфеля

П. Потребуем, чтобы $\Delta = \frac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}}$. Следовательно,

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2} \sigma^2 F_{t,\tau}^2 dt.$$

Таким образом, задача сведена к определению цены опциона европейского типа, решением кото-

рой является известная формула Блэка–Шоулса с базовым активом S_t . Для нахождения окончательной цены используем формулу (2), положив $S_t = F_{t,\tau} e^{-r\tau}$. После несложных преобразований получим формулу (6), в которой

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\tau}\sigma} =$$

$$= \frac{\ln \frac{S_t e^{-r\tau}}{X} + \ln e^{-r\tau} + r\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sqrt{\tau}\sigma} = \frac{\ln \frac{F_{t,\tau}}{X} + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sqrt{\tau}\sigma}.$$

Что и требовалось доказать.

Проведем числовой расчет извлеченной волатильности $\hat{\sigma}$ для фьючерса на акции ОАО ЛУКОЙЛ. Для этого зафиксируем значения средневзвешенных котировок цен акций, фьючерсов на эти акции и цену опциона покупателя на такой фьючерс за период с 13.12.2010 по 01.03.2011. Пусть в (4) для активов ОАО ЛУКОЙЛ количество деривативов $J = 2$, а общее число торговых дней $n = 165$. Извлеченную волатильность σ , участвующую в определении правой части выражения (4), определяем по классической схеме [13], фиксируя соответствующий опцион на фьючерс. При этом записываем аппроксимацию Шапиро для функции распределе-

ния $\Phi(x)$ в формуле (6), для вычисления значений которой при $x \geq 0$ будет справедливо следующее приближенное равенство:

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (AD + BD^2 + CD^3),$$

где $A = 0,436183$; $B = -0,120167$; $C = 0,937298$; $D = (1 + 0,33267x)^{-1}$.

Неприятие риска $\gamma_{X/F}$ было найдено в каждый торговый день по методологии [1–3], а затем усреднено по совокупности. Рассчитанное таким образом функциональное изменение неприятия риска представлено на рисунке.

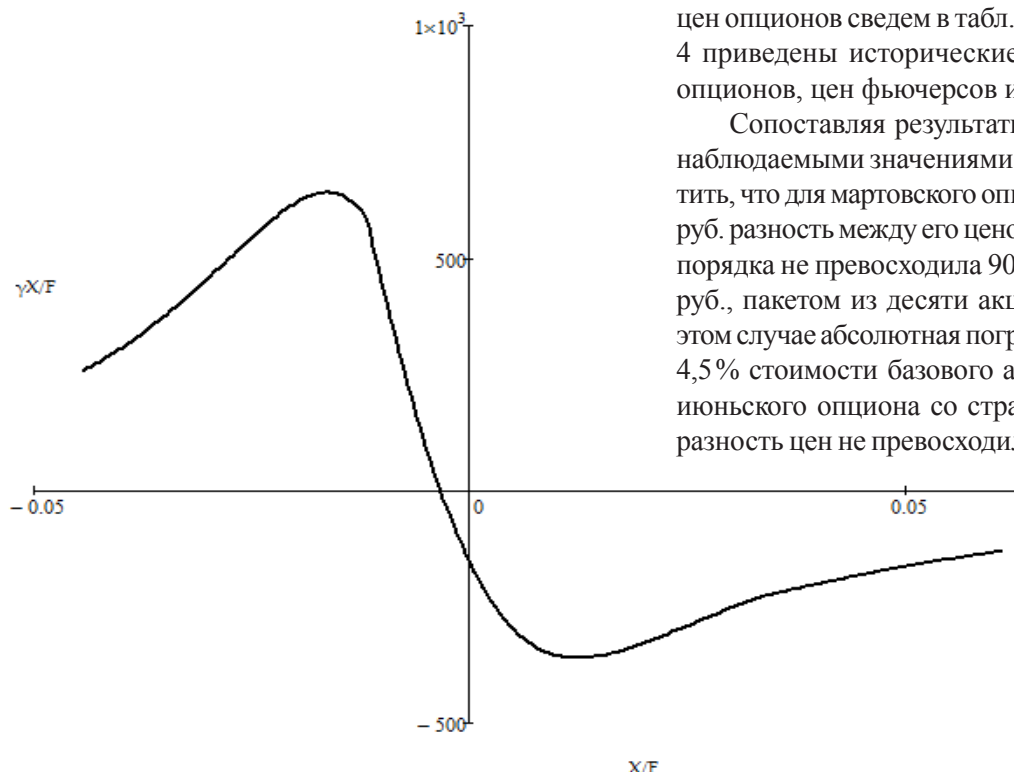
В дальнейшем коэффициент γ_τ для простоты изложения результатов численных экспериментов был принят за единицу. Исходные значения параметров финансовых инструментов представлены в табл. 1, результаты расчетов волатильностей сведены в табл. 2.

Воспользуемся рассмотренной теоремой. Подставляя в (6) найденные ранее оценки извлеченных волатильностей, вычислим цену опциона на фьючерс с моментом экспирации 15.03.11 с ценой исполнения $X = 19000$ руб. при $\tau = 12, 11, 10, 9, 5, 4$ дн., а также для фьючерса с моментом экспирации 15.06.11 с ценой исполнения $X = 19500$ руб. при $\tau = 104, 103, 102, 101, 97, 96$ дн. Найденные значения цен опционов сведем в табл. 3. Для сравнения в табл. 4 приведены исторические значения цен этих же опционов, цен фьючерсов и акций ОАО ЛУКОЙЛ.

Сопоставляя результаты сделанных расчетов с наблюдаемыми значениями котировок, можно заметить, что для мартовского опциона со страйком 19000 руб. разность между его ценой и деривативом второго порядка не превосходила 900 руб., фьючерсом – 800 руб., пакетом из десяти акций – 800 руб. Значит, в этом случае абсолютная погрешность не превосходит 4,5% стоимости базового актива. Аналогично, для июньского опциона со страйком 19500 руб. такая разность цен не превосходила 550 руб., 500 руб., 300

руб. соответственно, или 2,65% величины базового актива. Следовательно, предложенная методология обладает удовлетворительной точностью.

Уменьшение погрешности при



Значения коэффициента неприятия риска $\gamma_{X/F}$ для отношения X/F

Таблица 1

Исходные параметры расчетов

Актив	Дата начала расчетов	τ , дн.	T , дн.	C , руб.	S , руб.	F , руб.	X , руб.	σ , руб.	N , дн.
Фьючерс на акции ЛКОН 3.11	01.02.11	41	128	1215	1 904	18 765	18 000	27,76	41
Фьючерс на акции ЛКОН6.11	21.02.11	113	128	431	1 956,71	19 284	19 500	18,47	113

Таблица 2

Извлеченные волатильности σ и $\hat{\sigma}$ для опциона на фьючерс

Дата	LKON-3.11, $X = 19\,000$ руб.		LKON-6.11, $X = 19\,500$ руб.	
	Извлеченная волатильность σ , руб.	$\hat{\sigma}$, руб.	Извлеченная волатильность σ , руб.	$\hat{\sigma}$, руб.
02.03.2011	28,48342	23,874	20,82048	21,86
03.03.2011	29,80361	24,752	21,30841	22,079
04.03.2011	35,76987	22,874	20,25472	22,021
05.03.2011	36,87873	23,495	21,60334	22,128
09.03.2011	42,70936	23,809	23,61018	22,232
10.03.2011	31,84388	23,579	24,37756	21,989

Таблица 3

Рассчитанные цены опционов на фьючерсы

Дата расчета	Опцион на фьючерс ЛКОН 3.11, цена, руб.	Опцион на фьючерс ЛКОН 6.11, цена, руб.
02.03.2011	609,5	604
03.03.2011	682,3	680
04.03.2011	750,1	746
05.03.2011	835,5	832
09.03.2011	1252	1 247
10.03.2011	1 354	847

Таблица 4

Исторические данные цен опционов, фьючерсов, акций

Дата торгов	Опцион на фьючерс ЛКОН 3.11, цена, руб.	Опцион на фьючерс ЛКОН 6.11, цена, руб.	S_p , руб.	F_p , руб. (15.03.2011)	F_p , руб. (15.06.2011)
02.03.2011	1 265	1 018	2 018,8	20 207	19 834
03.03.2011	1 207	1 208	2 048,1	20 496	20 210
04.03.2011	1 565	1 215	2 036,1	20 391	20 082
05.03.2011	1 721	1 394	2 056	20 551	20 253
09.03.2011	1 525	1 290	2 059,1	20 639	20 353
10.03.2011	1 280	1 024	2013,6	20 198	19 892

переходе от мартовского к июньскому деривативу связано, скорее всего, с особенностью применения аппроксимации (6) при нахождении справедливой цены американского опциона. Известно [7], что аппроксимация (6) наилучшим образом выполняется для моментов времени $\tau > \frac{2}{3}T$, где T – срок действия опциона, что в случае проведенных расчетов выполняется только для актива со страйком 19 500 руб.

Выводы. Проведенный анализ показал, что предложенный непараметрический метод оценки волатильности, использующий математический аппарат ядерных функций и учитывающий как

ширину спектра плотности оценки, так и неприятие риска инвестора, позволяет получить численную оценку цены опциона второго порядка с низкой погрешностью (2,6–4,5 %) в сравнении со значениями цен акций и фьючерсов ОАО ЛУКОЙЛ, наблюдаемыми на фондовом рынке. Отмечается увеличение точности расчетов для случая раннего исполнения опциона $\left(\tau > \frac{2}{3}T\right)$.

Список литературы

1. Крицкий О. Л. Неприятие риска инвестиций при финансовом кризисе// Экономический анализ: теория и практика. 2009. № 20.

2. Крицкий О.Л. Неприятие риска и уровень потребления при инвестировании // Финансовая аналитика: проблемы и решения. 2011. № 31.
3. Крицкий О.Л., Ильина Т.А., Каменских Д.М. Расчет безрисковой стохастической процентной ставки и ее применение в модели Блэка–Кокса // Экономический анализ: теория и практика. 2010. № 15.
4. Крицкий О.Л., Трясучев П.В. О нелинейной краткосрочной процентной ставке доходности // Финансовая аналитика: проблемы и решения. 2011. № 12.
5. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Наука, 1998. Т. 2.
6. Ait-Sahalia Y., Lo A.W. Nonparametric risk management and implied risk aversion // Journal of Econometrics. 2000. Т. 94.
7. Baron-Adesi G., Whaley R. E. Efficient analytic approximation of American option value // Journal of Finance. 1987. Т. 42. № 2.
8. Hull J. Options, Futures, and Other Derivatives. New Jersey: Prentice-Hall, Saddle River, 2003. 5-ое изд.
9. Nadaraya E.A. On estimating regression // Theory of Probability and Its Applications. 1964. №. 10.
10. Scott D. W. Multivariate Density Estimation. Theory, practice and visualization. John Wiley & Sons Inc, 1992.
11. Stanton R. A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk // Journal of Finance. 1997. Т. 52.
12. Watson G. S. Smooth regression analysis // Sankhya Series A. 1964. Т. 26.
13. Wilmott P. Introduces Quantitative Finance. Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd., 2007. 2nd Edition.