УДК 51

# Всего лишь лекция

В. П. Норин

Речь о ТФКП. Одним из ключевых в курсе является понятие дифференцируемости функции комплексной переменной. Стандартное (в учебниках) определение производной комплекснозначной функции и вытекающие из него условия Коши–Римана и геометрический смысл производной оставляют ощущение некоторого фокуса, подоплека которого не вполне ясна. Однако, для понимания механизма, проясняющего ситуацию, нужно не слишком много усилий. По крайней мере, для Студентов (речь не о студентах, а именно о Студентах) некоторых специальностей, где курс линейной алгебры «доползает» до понятия линейного оператора. И не воспользоваться этим инструментом здесь...?!

Помимо большей ясности картины, плюсами такого подхода видится демонстрация связи различных областей математики: линейной алгебры — математического анализа — теории функции комплексного переменного.

Текст, приводимый ниже, вряд ли можно считать, вопреки названию статьи, лекцией в чистом виде. Скорее, это скелет изложения. Здесь есть некая структура, но нет формального членения материала на определения, теоремы и т. д. (хотя по сути они есть), что, конечно, необходимо для чтения нормальной лекции. Но если идея изложения покажется интересной, сделать такую формализацию не составит большого труда.

Понятия комплексных чисел, операций над ними обсуждаются (напоминаются) непосредственно перед лекцией. В частности, считаем известными геометрическую интерпретацию комплексных чисел (комплексную плоскость), а также геометрический смысл произведения комплексных чисел.

# 1. Линейные операторы. $\mathbb{R}$-линейность и $\mathbb{C}$-линейность

Напомним некоторые определения и расставим нужные акценты.

Рассмотрим два линейных (векторных) пространства. Первое — это $\mathbb{R}^2$, второе — $\mathbb{C}$.

Элементами $\mathbb{R}^2$ являются векторы плоскости, для которых определены операции сложения векторов и умножения векторов на действительные числа с известным набором аксиом.

Элементами пространства $\mathbb{C}$ являются комплексные числа $z = x + iy$, которые также можно интерпретировать как векторы $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ плоскости. Сумма комплексных чисел $\equiv$ векторов геометрически совпадает с соответствующей суммой векторов в $\mathbb{R}^2$. Отличие же $\mathbb{C}$ от $\mathbb{R}^2$ состоит *лишь* в том, что элементы $\mathbb{C}$ можно умножать не только на действительные, но и на комплексные числа (по правилу произведения комплексных чисел): для любого элемента $x + iy \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ пространства $\mathbb{C}$ и любого комплексного числа $a + ib$ определено произведение

$$(a+ib)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv (a+ib)(x+iy) = (ax-by)+i(ay+bx) \equiv \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix}.$$

Необходимый набор аксиом векторного пространства в этом случае также выполняется.

Далее. Пусть имеются линейные пространства $X$ и $Y$ (в дальнейшем это $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$) с одинаковым полем $\mathbb{P}$ коэффициентов, т. е. чисел, на которые можно умножать элементы этих пространств.

Отображение $A: X \to Y$ называется линейным оператором, если оно удовлетворяет условиям: $A(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = A\mathbf{a}_1 + A\mathbf{a}_2$ и $A(\alpha \mathbf{a}_1) = \alpha A \mathbf{a}_1$, где $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ — произвольные элементы пространства $X$, а $\alpha$ — произвольное число из $\mathbb{P}$.

Рассмотрим сначала линейный оператор $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Чтобы задать этот оператор, достаточно, выбрав в $\mathbb{R}^2$ базис (например, стандартный ортонормированный), определить результат действия оператора на базисных векторах $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Матрицу $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ называют матрицей линейного оператора (в выбранном базисе). Результат действия оператора на произвольном векторе $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ получается (что несложно показать, пользуясь линейностью оператора) умножением матрицы $A$ на этот вектор:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = xA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Обратимся теперь к линейному оператору $A: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Посмотрим как выглядит его матрица $A$. Выбрав естественный базис $\Gamma = \left\{ \mathbf{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \mathbf{i} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ в $\mathbb{C}$ (строго говоря, это базис в $\mathbb{R}^2$, с элементами которого ассоциируются элементы из

$\mathbb{C}$), определим произвольно действие линейного оператора на первом базисном векторе:

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Тогда в силу линейности оператора $A$ должно выполняться соотношение

$$A\mathbf{i}=A(i\cdot\mathbf{1})=i\cdot A\mathbf{1}=i\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\equiv i(a+ib)=-b+ia\equiv\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}.$$

Таким образом, результат действия оператора на первом базисном векторе автоматически определяет его действие на втором, и матрица такого оператора принимает следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}.$$

Операторы $A:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ называют $\mathbb{R}$-линейными, а операторы $A:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — соответственно, $\mathbb{C}$-линейными. Матрица $\mathbb{R}$-линейного оператора может быть произвольной; $\mathbb{C}$-линейного — нет.

Легко заметить, что геометрически $\mathbb{C}$-линейный оператор обеспечивает поворот векторов плоскости на угол $\varphi$ (где $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$) и растяжение их длин в $\sqrt{a^2+b^2}$ раз. Но в точности так же «работает» умножение комплексных чисел на фиксированное комплексное число $z_0=$ $=a+ib$. И, стало быть, все $\mathbb{C}$-линейные преобразования плоскости задаются равенством: $Az=z_0\cdot z$, для произвольного $z=x+iy\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{C}$.

Еще раз отметим, что все линейные преобразования комплексной плоскости исчерпываются растяжениями и поворотами (никаких зеркальных симметрий и более сложных $\mathbb{R}$-линейных преобразований).

## 2. Дифференцируемость действительнозначных и комплекснозначных функций

Для начала напомним определение дифференцируемости действительной функции двух переменных из курса анализа.

Пусть задана функция $u = u(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Мы называли такую функцию дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$, если ее приращение в этой точке могли записать в виде

$$\Delta u = a\Delta x + b\Delta y + \alpha\Delta\rho, \qquad (*)$$

где $\Delta x$, $\Delta y$ — приращения аргументов, $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $a$, $b$ — действительные числа, а $\alpha$ — бесконечно малая величина при $\Delta\rho \to 0$. В курсе анализа показывается, что числа $a$ и $b$ — суть частные производные функции $u$ в точке $M_0$: $a = u'_x(M_0)$, $b = u'_y(M_0)$.

Соотношение $(*)$ можно переписать в матричной форме:

$$\Delta u = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \alpha\,\Delta\rho\,.$$

Рассматривая последнее равенство, мы обнаруживаем линейный оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, задаваемый матрицей $A = \begin{pmatrix} u'_x \; u'_y \end{pmatrix}$ (эту матрицу называют градиентом функции $u$). И приращение функции аппроксимируется этим линейным оператором.

Рассмотрим теперь отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Это отображение можно задать парой функций двух переменных $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Определяя дифференцируемость отображения $f$ в точке, можно, конечно, просто сказать, что это означает дифференцируемость функций $u$ и $v$, т. е. их приращения в точке имеют вид:

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + \alpha_1\,\Delta\rho\,,$$

$$\Delta v = v'_x \cdot \Delta x + v'_y \cdot \Delta y + \alpha_2 \Delta\rho ,$$

где $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$.

Но, переписав эти соотношения в векторной форме

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Delta\rho ,$$

замечаем, как и ранее, что приращение $\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$ отображения аппроксимируется линейным оператором $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$.

Эту матрицу называют матрицей Якоби (кстати, градиент — это тоже матрица Якоби в случае отображения плоскости в прямую).

Теперь мы достаточно подготовлены, чтобы говорить о дифференцируемости функции комплексной переменной. Мы знаем, что такая функция может быть записана в виде: $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$, $u(x, y) = \operatorname{Re} w$, $v(x, y) = \operatorname{Im} w$.

Функции $u$ и $v$ задают отображение плоскости в плоскость. Как и в случае с отображением $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, мы хотим, чтобы наше отображение аппроксимировалось линейным оператором с матрицей Якоби $\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$. Однако, дополнительно мы хотим, чтобы этот оператор был $\mathbb{C}$-линейным (ведь мы рассматриваем отображение $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$).

Но тогда:

1) матрица Якоби должна иметь вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, что автоматически влечет условия Коши—Римана $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$;

2) действие такого оператора равносильно умножению на комплексное число $a + ib$, и мы получаем стандартное определение дифференцируемости функции комплексной переменной:

*функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если ее приращение в этой точке имеет вид $\Delta w = (a+ib)\cdot\Delta z + \alpha\cdot\Delta\rho$, где $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и $\alpha \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$;*

комплексное число $a+ib$ называем производной $f'(z_0)$ функции в точке $z_0$; и как бонус получаем равенства

$$f'(z_0) = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x = v'_y - iu'_y\,;$$

3) геометрический смысл модуля и аргумента производной теперь лежит на поверхности: $\arg f'(z_0)$ и $|f'(z_0)|$ — это, соответственно, угол поворота и коэффициент растяжения бесконечно малых векторов $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ при отображении $f$;

4) если есть желание, можно поговорить о конформности дифференцируемых отображений (все легко получается из предыдущего пункта).

Ну вот, собственно, и все.

Коллеги, спасибо, что дочитали сей opus до конца. Выражаю огромную признательность А. Н. Данилову, В. С. Куликову и Е. В. Чеснокову за полезные советы и замечания, без которых статья была бы иной. А также приношу благодарность А. Ю. Терской и В. В. Старинцу за помощь в наборе текста.

*Московский государственный университет печати*

*имени Ивана Федорова.*

*E-mail: hopin56@mail.ru.*

*Поступила 08 мая 2012 г.*