

УДК 519.17

Вполне регулярные графы с $b_1 = 6$

Константин С.Ефимов

Александр А.Махнев*

Институт математики и механики УрО РАН,

С.Ковалевской 16, Екатеринбург, 620219

Россия

Получена 10.09.2008, окончательный вариант 15.12.2008, принята к печати 15.01.2009

Неориентированный v -вершинный граф, в котором степени всех вершин равны k , а каждое ребро принадлежит точно λ треугольникам, называется реберно регулярным с параметрами (v, k, λ) . Положим $b_1 = k - \lambda - 1$. В монографии Броувера, Козна и Ноймайера доказано, что связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$ является многоугольником или полным многодольным с долями порядка 2. Кроме того, ранее исследовались реберно регулярные графы с $b_1 \leq 5$. В данной работе изучаются вполне регулярные графы с $b_1 = 6$.

Ключевые слова: неориентированный граф, вполне регулярный граф.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a . Под собственными значениями графа понимаются собственные значения его матрицы смежности. В дальнейшем слово "подграф" будет означать индуцированный подграф. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство графов. Граф Γ называется локально $\mathcal{F}$ графом, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро графа Γ лежит точно в λ треугольниках. Граф Γ называется *кореберно регулярным графом с параметрами (v, k, μ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин для любых несмежных вершин a, b . Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ -подграфом) λ -подграфом. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i(\Delta)$ обозначим множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ , и положим $x_i(\Delta) = |X_i(\Delta)|$.

*e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Через $K_{m_1, \dots, m_n}$ обозначим полный n -дольный граф, с долями порядков $m_1, \dots, m_n$. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$. Граф $K_{1, m}$ называется m -лапой. Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется $m \times n$ решеткой, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Граф Пэли $P(q)$ в качестве вершин имеет элементы поля F_q , $q \equiv 1 \pmod{4}$, и две вершины a, b смежны, только если $b - a$ является ненулевым квадратом в F_q . Граф Клебша (Шлефли) — это единственный сильно регулярный граф с параметрами $(16, 10, 6, 6)$ (с параметрами $(27, 16, 10, 8)$). Граф Шрикханде — это единственный сильно регулярный локально шестиугольный граф с параметрами $(16, 6, 2, 2)$.

Граф Тервиллигера — это неполный граф Γ такой, что для любых двух вершин a, b на расстоянии 2 подграф $[a] \cap [b]$ является кликой порядка μ для некоторого фиксированного $\mu > 0$.

Полный (вполне несвязный) подграф данного графа называется *кликой* (кликкой). Под кликовым (кликковым) α -расширением графа Γ будем понимать граф, полученный заменой каждой вершины a из Γ на клику (кликку) (a) , содержащую α вершин, при этом указанные клики (кликки) попарно не пересекаются, а вершины из (a) и (b) смежны тогда и только тогда, когда a и b смежны в Γ .

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1 = b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$. Дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ называется граф диаметра d , в котором значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w . Граф диаметра d называется антиподальным, если отношение — совпадать или находиться на расстоянии d — является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Антиподальным частным Γ' называется факторграф антиподального графа Γ , вершинами которого являются указанные классы эквивалентности и два класса смежны, если некоторая вершина одного класса смежна с вершиной другого. Если все классы эквивалентности состоят из r вершин, то Γ называется r -накрытием графа Γ' .

В следствии 1.1.6 из [1] доказано, что если Γ — связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф $K_{n \times 2}$. Реберно регулярные графы с $2 \leq b_1 \leq 4$ изучались в работе [2]. Реберно регулярные графы с $b_1 = 5$ исследовались в [3].

Следующий класс графов введен А.А.Махневым и Д.В.Падучих [4]. Для четного натурального числа ω через $MP(\omega)$ обозначим класс реберно регулярных графов Γ с параметрами $b_1 = 3\omega/2 - 3$, $k = \omega^2 - 3\omega/2$, $\lambda = \omega^2 - 3\omega + 2$, $v = \omega^2$, содержащими пару непересекающихся подграфов Ω и Ω' , изоморфных $K_{\omega \times \omega/2}$, причем любая вершина из Ω (из Ω') не смежна с единственной вершиной в каждой доле из Ω' (из Ω) и для любого ребра $\{d, e\}$ из Ω подграф $\Gamma - (d^\perp \cup e^\perp)$ является ребром из Ω' . Любой граф из $MP(2)$ состоит из двух изолированных ребер, а граф из $MP(4)$ совпадает с графом Клебша, имеющим параметры $(16, 10, 6, 6)$. Существование графов из $MP(\omega)$ с $\omega \geq 8$ неизвестно. Пример графа с $\omega = 6$ построен Д.В.Падучих с использованием компьютерных вычислений (см. [2]).

В данной работе рассматриваются вполне регулярные графы с $b_1 = 6$.

Теорема 1. Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и $b_1 =$

6. Тогда Γ является одним из следующих графов:

(1) полный многодольный граф $K_{7 \times 7}$, граф с параметрами $(25, 12, 5, 6)$, 7×7 -решетка, треугольный граф $T(9)$, дополнительный граф к 5×5 -решетке или к треугольному графу $T(7)$, граф Хофмана-Синглтона или его дополнение, граф с параметрами $(26, 10, 3, 4)$ или его дополнение;

(2) полный двудольный граф $K_{8,8}$ с удаленным максимальным паросочетанием, граф Тэйлора с параметрами $(28, 13, 6, 6)$, в котором окрестности вершин изоморфны графу Пэли $P(13)$, или граф Тэйлора с параметрами $(32, 15, 8, 6)$, в котором окрестности вершин изоморфны треугольному графу $T(6)$;

(3) $\mu = 4$, $k = 12$, $c_3(u, y) \geq 6$ для любых вершин u, y с $d(u, y) = 3$ и диаметр Γ равен 3;

(4) $\mu = 3$ и либо

(i) Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 3, 8\}$, либо

(ii) Γ — локально девятиугольный граф диаметра 3, каждый μ -подграф является 3-кликкой или объединением изолированной вершины и ребра, $b_2(u, x) \leq 3$ для любых вершин u, x с $d(u, x) = 2$ и $|\Gamma_3(u)| \leq 10$, либо

(iii) $k = 10$, либо

(iv) $k = 11$, Γ является графом диаметра 3 и $c_3(u, y) \geq 5$ для любых вершин u, y с $d(u, y) = 3$;

(5) $\mu = 2$ и либо

(i) Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$, граф Конвея-Смита или граф Доро, либо

(ii) Γ является ректаграфом с $v \leq 2^7$ и диаметра, не большего 7 (в случае $v = 2^7$ или $d(\Gamma) = 7$ граф Γ является 7-кубом), либо

(iii) окрестность каждой вершины в Γ является объединением четырех изолированных ребер;

(6) $\mu = 1$ и окрестность каждой вершины является 7-кликкой, или объединением изолированных n -клик для $n = 2, 3$ или 6.

1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $b_1 = k - \lambda - 1$. Если вершины u, w находятся на расстоянии 2 в Γ , то выполняются следующие утверждения:

(1) степень любой вершины в графе $[u] \cap [w]$ из Γ не меньше $k - 2b_1$;

(2) вершина d имеет степень α в графе $[u] \cap [w]$ тогда и только тогда, когда $[d]$ содержит точно $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$;

(3) если $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, то подграф $[u] \cap [w]$ является кликой и $[d] \subset u^\perp \cup w^\perp$ для любой вершины $d \in [u] \cap [w]$;

(4) если $\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$ содержит единственную вершину z , то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$.

Доказательство. Пусть $d \in [u] \cap [w]$. Тогда $||d] - [u|| = ||d] - [w|| = b_1$. Поэтому по крайней мере $k - 2b_1$ вершин из $[d]$ содержится в $[u] \cap [w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d \in [u] \cap [w]$ и степень d в этом μ -подграфе равна α . Тогда $k = \alpha + 2b_1 - |[d] - (u^\perp \cup w^\perp)|$. Поэтому $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$. Верно и обратное. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из (1), (2).

Пусть $\{z\} = \Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$. Так как число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1|[u] - [w]| - \mu(u, z)$, то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$. $\square$

Из леммы 1.1 следует, что в реберно регулярном графе для любых вершин u, w , находящихся на расстоянии 2, выполняется неравенство $\mu(u, w) \geq k - 2b_1 + 1$. Пару вершин (u, w) с $d(u, w) = 2$ назовем *хорошей*, если $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$. Если любая пара несмежных вершин графа Γ является хорошей, то Γ оказывается графом Тервиллигера без 3-лап и по теореме 1.2.3 из [1] получим, что Γ — граф прямых некоторого реберно регулярного графа Δ с $k_\Delta = 2(\lambda_\delta + 1)$ или граф икосаэдра.

Пусть до конца параграфа Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Число ребер в Γ (в окрестности вершины из Γ) равно $vk/2$ (равно $k\lambda/2$), поэтому vk и $k\lambda$ четны. Число треугольников в Γ равно $vk\lambda/6$, поэтому $vk\lambda$ делится на 3.

Лемма 1.2. Пусть (u, w) — хорошая пара и $\mu(u, z) \leq k - 2b_1 + 2$ для смежной с w вершины z из $\Gamma_2(u)$. Тогда $|[u] \cap [w] \cap [z]| < 2$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 1.6 работы [5]. $\square$

Лемма 1.3. Пусть $u \in \Gamma$ и w, z — несмежные вершины из $\Gamma_2(u)$ с $\mu(u, w) = \mu(u, z) = k - 2b_1 + 2$. Если $k \geq 3b_1 - 3$, то $|[u] \cap [w] \cap [z]| < 2$.

Доказательство. Утверждение следует из лемм 4, 5 работы [3]. $\square$

Лемма 1.4. Пусть Γ — реберно регулярный граф с $k \geq 3b_1 - 3$, $\mu(u, w) + \mu(u, z) = 2k - 4b_1 + 4$ для смежных вершин w, z из $\Gamma_2(u)$, $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ и $\delta = |\Delta|$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) Δ содержит две несмежные вершины и $\delta = 2$;
- (2) вершины w, z смежны, Δ является кликой и если $\delta > 1$, то либо
 - (i) подграф Δ содержит единственную вершину d , смежную с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, $\delta = 2$ и для $e \in \Delta(d)$ подграф $[d] \cup [e]$ содержит $[w] \cap [z] - [u]$, а $[d] \cap [e]$ содержится в $\{u, w, z\} \cup ([u] \cap ([w] \cup [z])) \cup ([w] \cap [z] - [u])$, либо
 - (ii) подграф Δ не содержит вершин, смежных с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, и для любых двух вершин $d, e \in \Delta$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит $\lambda - 1 + \gamma$ вершин из $\{u, w, z\} \cup ([u] \cap ([w] \cup [z])) \cup ([w] \cap [z] - [u])$, где $\gamma = |\Delta - ([d] \cup [e])|$.

Доказательство. Это лемма 1.7 из [5]. $\square$

Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем (теорема 3.12.4 [1]). Любой Зейделев граф — это либо полный многодольный граф $K_{r \times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли.

Лемма 1.5. Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий целочисленные собственные значения, и $b_1 = k - \lambda - 1$. Тогда

- (1) если b_1 — простое число, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times (b_1 + 1)}$ или Зейделевым графом;

(2) если $b_1 = 2p$, p — простое число, то Γ либо является полным многодольным графом, либо имеет собственное значение -2 или -3 , либо является дополнительным к Зейделеву графу;

(3) если $b_1 = 6$, то Γ является полным многодольным графом $K_{7 \times 7}$, графом с параметрами $(25, 12, 5, 6)$, 7×7 -решеткой, треугольным графом $T(9)$, дополнительным графом к 5×5 -решетке или к треугольному графу $T(7)$, графом Хофмана-Синглтона или его дополнением, графом с параметрами $(26, 10, 3, 4)$ или его дополнением.

Доказательство. Утверждения (1–2) следуют из леммы 4 работы [2]. Пусть $b_1 = 6$. Если Γ является Зейделевым графом или дополнительным к Зейделеву графу, то заключение леммы выполняется. Пусть Γ имеет собственное значение -3 . Тогда $b_1 = 6 = 2(n - 2)$, $n = 5$, $k = \lambda + 7$ и $\mu = \lambda + 1$. Из прямоугольного соотношения и условия целочисленности следует, что $\lambda + 1$ делит $6(\lambda + 7)$ и $5(\lambda + 1)$ делит $2(\lambda + 7)(\lambda + 10)$. Отсюда $\lambda \in \{0, 3, 5, 8, 35\}$. В случае $\lambda = 0$ граф Γ является графом Хофмана-Синглтона. В случае $\lambda = 3$ граф Γ является графом Пэли с параметрами $(26, 10, 3, 4)$. В случае $\lambda = 5$ граф Γ имеет параметры $(25, 12, 5, 6)$. В случае $\lambda = 8$ граф Γ является дополнительным к графу с параметрами $(26, 10, 3, 4)$. Наконец, в случае $\lambda = 35$ граф Γ является дополнительным к графу Хофмана-Синглтона. $\square$

Лемма 1.6. Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $b_1 = 6$. Если $k \geq 25$, то либо граф Γ сильно регулярен, либо Γ принадлежит $MP(6)$.

Доказательство. Пусть Γ — неполный связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , не являющийся сильно регулярным. Ввиду теоремы 1.4.3 из [1] имеем $k < (b_1^2 + 3b_1 + 2)/2$ и $v < 1 + k + kb_1/(k - 2b_1 + 1)$. В случае $b_1 = 6$ имеем $k \leq 27$ и $v < 1 + k + 6k/(k - 11)$.

Если $k \geq 25$, то ввиду следствия из [5] либо граф Γ принадлежит $MP(6)$, либо для графа $\Delta = \bar{\Gamma}$ выполняется одно из следующих утверждений:

(i) граф Δ разбивается дополнительными графами для 4-трапов Мебиуса $\Phi_1, \dots, \Phi_r$, где $r = v/8$ и граф Δ^* на множестве вершин $\{\Phi_1, \dots, \Phi_r\}$, в котором вершины Φ_i и Φ_j смежны, если некоторая вершина из Φ_i смежна с вершиной из Φ_j в графе Δ , является сильно регулярным с параметрами $(v/8, t^2 - 9, 6, 16)$ и $t = 12$ или 36 ;

(ii) граф Δ разбивается 3×3 решетками $\Omega_1, \dots, \Omega_s$, где $s = v/9$ и граф Δ° на множестве вершин $\{\Omega_1, \dots, \Omega_s\}$, в котором вершины Ω_i и Ω_j смежны, если некоторая вершина из Ω_i смежна с вершиной из Ω_j в графе Δ , является сильно регулярным с параметрами $(v/9, t^2 - 7, 8, 18)$ и $t = 7, 14$ или 28 ;

(iii) граф Λ на множестве вершин графа Δ , в котором вершины u, w смежны, если они смежны в Δ и $|\Delta(u) \cap \Delta(w)| = 0$, — дистанционно регулярный граф диаметра 4 либо имеющий массив пересечений $\{136, 135, 6, 1; 1, 2, 135, 136\}$ и являющийся антиподальным 4-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(2432, 136, 0, 8)$, либо имеющий массив пересечений $\{x, x - 1, 4, 1; 1, 2, x - 1, x\}$ и являющийся антиподальным 3-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $((x + 2)(x + 3)/6, x, 0, 6)$.

Так как $v \leq 38$, то граф Γ принадлежит $MP(6)$. $\square$

Лемма 1.7. Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Если $k \geq 3b_1$, то диаметр Γ не больше 2.

Доказательство. Это лемма 1.4.1 из [1]. $\square$

Лемма 1.8. Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами $\lambda \leq \mu \neq 1$. Если $d(u, w) = i$, $i \geq 2$ и $x \in [w] \cap \Gamma_{i-1}(u)$, то $c_i(u, w) \geq c_{i-1}(u, x) + 1$ и $c_i(u, w) \geq \mu - 2 + i$.

Доказательство. Доказательство леммы следует из доказательства предложения 1.9.1 [1]. $\square$

2. Графы с $b_1 = 6$, μ -подграфы большие или кокликовые

В этом параграфе Γ – связный вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) диаметра, большего 2 и $b_1 = 6$. В этом случае $\mu \leq b_1$. Если $\mu \leq k - 2b_1 + 2$, то либо $\mu = k - 2b_1 + 1 = k - 11$ и Γ – граф с $\mu = 1$, в котором окрестность любой вершины – объединение двух изолированных 6-клик, либо $\mu = k - 2b_1 + 2$ и, по следствию из [6], либо диаметр Γ равен 2, либо $k = 3$. Поэтому можно считать, что $\mu \geq k - 2b_1 + 3$. Пусть $uwxy$ – геодезический путь, $c_3(u, y) = t$, $[u] \cap \Gamma_2(y) = \{w_1, \dots, w_t\}$ и $[y] \cap \Gamma_2(u) = \{x_1, \dots, x_t\}$.

Лемма 2.1. *Если $\mu = 6$, то Γ является либо полным двудольным графом $K_{8,8}$ с удаленным максимальным паросочетанием, либо графом Тэйлора с параметрами $(28, 13, 6, 6)$, в котором окрестности вершин изоморфны графу Пэли $P(13)$, либо графом Тэйлора с параметрами $(32, 15, 8, 6)$, в котором окрестности вершин изоморфны треугольному графу $T(6)$.*

Доказательство. Пусть $\mu = 6$. По теореме 1.5.5 из [1] граф Γ является многоугольником или графом Тэйлора. По теореме 1.5.3 из [1] окрестности вершин в Γ являются коклика-ми или сильно регулярными графами с параметрами (v', k', λ', μ') и $k' = 2\mu'$. В первом случае $k = 7$ и Γ является полным двудольным графом $K_{8,8}$ с удаленным максимальным паросочетанием.

Во втором случае $k' = \lambda$ и $v' = k$. Если $\mu' = 2$, то $k' = 4$ и $v' = k = 9$. Противоречие с тем, что в этом случае $b_1 = 4$. Если $\mu' = 3$, то $k' = 6$ и $v' = k = 13$. В этом случае $18 = 6(5 - \lambda')$, поэтому $\lambda' = 2$ и окрестности вершин в Γ изоморфны графу Пэли $P(13)$.

Если $\mu' = 4$, то $k' = 8$ и $k = 15$. В этом случае окрестность каждой вершины в Γ изоморфна треугольному графу $T(6)$. $\square$

Лемма 2.2. *Параметр μ не равен 5.*

Доказательство. Пусть $\mu = 5$. По прямоугольному соотношению $kb_1 = k_2\mu$ параметр k делится на 5 и по лемме 1.7 имеем $k \leq 15$. Если $k = 15$, то $\mu = k - 2b_1 + 2$, противоречие.

Пусть $k = 10$. Тогда $|\Gamma_2(u)| = 12$ и по лемме 1.8 имеем $t \geq 6$. В случае $t = 6$ каждая вершина из $\{w_1, \dots, w_6\}$ смежна с 5 вершинами из $\{x_1, \dots, x_6\}$, поэтому $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и не менее 4 вершин из $\{x_1, \dots, x_t\}$. В частности, $\{w_1, \dots, w_6\}$ является кокликой. Теперь число ребер между $[w_1] \cap \{x_1, \dots, x_6\}$ и $[w_1] - [y]$ равно 15, поэтому некоторая вершина из $[w_1] - (\{u\} \cup [y])$ смежна с 4 вершинами из $[w_1] \cap \{x_1, \dots, x_6\}$, противоречие.

В случае $t = 7$ подграф $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и не менее 3 вершин из $\{x_1, \dots, x_7\}$. В частности, $\{w_1, \dots, w_7\}$ является кокликой. Противоречие как и выше. Итак, $c_3(u, y) \geq 8$ для любой вершины $y \in \Gamma_3(u)$. Если y, z – различные вершины из $\Gamma_3(u)$, то $[y] \cap [z]$ содержит не менее 4 вершин из $\Gamma_2(u)$. Отсюда $\Gamma_3(u)$ состоит из вершин, расстояние между которыми равно 2, и $c_3(u, y) = 10$. Поэтому $|\Gamma_3(u)| = 1$, $|\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)| = 2$ и $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y) = \{p, q\}$. Далее, каждая вершина из $[u] \cup [y]$ смежна с единственной вершиной из $\{p, q\}$ и каждая из вершин p, q смежна с 10 вершинами из $[u] \cup [y]$. Поэтому $d(p, q) = 3$, и подграф $\{u, y, p, q\}$ однозначно восстанавливается по любой его вершине. Таким образом, множество вершин графа Γ разбивается шестью 4-коклика-ми $C_1, \dots, C_6$, где $C_1 = \{u, y, p, q\}$. Если $a \notin C_i$, то вершина a смежна точно с 2 вершинами из C_i .

Для вершины $a \in [u] \cap [p]$ ее антипод a^* принадлежит $[q] \cap [y]$. Противоречие с тем, что $[p] \cap [y]$ содержит не менее 4 вершин, не лежащих в $[a] \cup [a^*]$. $\square$

Лемма 2.3. Если $\mu = 4$, то $k = 12$, $c_3(u, y) \geq 6$ и диаметр Γ равен 3.

Доказательство. Пусть $\mu = 4$. По прямоугольному соотношению k четно и $v - k - 1$ делится на 3. Если Γ — граф с $k \geq 3b_1 - 2$, то, по следствию из [7], либо $b_1 \leq 2$, либо диаметр Γ равен 2. Отсюда $k \leq 15$, причем в случае $k = 14$ имеем $\mu = k - 2b_1 + 2$.

Пусть $k = 8$. Тогда окрестность любой вершины в Γ является объединением 4 изолированных ребер и диаметр Γ равен 2.

Пусть $k = 10$. Тогда $\lambda = 3$, $|\Gamma_2(u)| = 15$ и по лемме 1.8 имеем $t \geq 5$. В случае $t = 5$ каждая вершина из $\{w_1, \dots, w_5\}$ смежна с 4 вершинами из $\{x_1, \dots, x_5\}$, поэтому $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и не менее 3 вершин из $\{x_1, \dots, x_5\}$. В частности, $\{w_1, \dots, w_5\}$ является коккликой. Теперь $\{w_1, \dots, w_5\} \cap [x_1]$ содержит 6 пар вершин, каждая из которых лежит в пересечении окрестностей 2 вершин из $\Gamma - \{u, x_1\}$. С другой стороны, каждая из вершин $\{x_2, \dots, x_5\}$ смежна с 3 вершинами из $\{w_1, \dots, w_5\} \cap [x_1]$, поэтому каждая вершина из $[x_1] - [u]$ смежна не более чем с одной вершиной из $\{w_1, \dots, w_5\} \cap [x_1]$. Противоречие с тем, что число ребер между $\{w_1, \dots, w_5\} \cap [x_1]$ и $[x_1] - [u]$ равно 4λ и не больше $\lambda + 2$.

В случае $t = 6$ каждая вершина из $\{w_1, \dots, w_6\}$ смежна с 4 вершинами из $\{x_1, \dots, x_6\}$, поэтому для смежных вершин w_i, w_j подграф $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и 2 вершины из $\{x_1, \dots, x_6\}$. В частности, $[w_i] \cup [w_j]$ содержит $\{x_1, \dots, x_6\}$ и $\{w_1, \dots, w_6\}$ не содержит треугольников. Если $w_1 w_2 w_3$ является 2-путем, то $[w_1] \cap [w_3]$ содержит u, w_2 и 2 вершины из $\{x_1, \dots, x_6\}$.

Пусть $z \in [y] \cap \Gamma_3(u)$. Тогда $[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)$ содержит 2 вершины w_i, w_j . Далее, $[w_i]$ содержит по 4 вершины из $[y]$, $[z]$ и не менее 2 вершин из $[y] \cap [z]$. Без ограничения общности, $x_1, x_2 \in [w_i] \cap [y] \cap [z]$. Тогда $[x_1] \cap [x_2]$ содержит y, z и 2 из $\{w_1, \dots, w_6\}$, поэтому $[x_1] \cup [x_2]$ содержит $\{w_1, \dots, w_6\}$ и $\{w_1, \dots, w_6\} = [u] \cap \Gamma_2(z)$. Теперь можно считать, что $[y] \cap [z] \cap \Gamma_2(u) = \{x_1, x_2, x_3\}$, $[x_1] \cap [x_2] - \{y, z\} = \{w_1, w_2\}$, $[x_1] \cap [x_3] - \{y, z\} = \{w_3, w_4\}$ и $[x_2] \cap [x_3] - \{y, z\} = \{w_5, w_6\}$. Противоречие с тем, что $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u, x_1, x_2 и по вершине из $[y] \cap \Gamma_2(u) - [z]$ и из $[z] \cap \Gamma_2(u) - [y]$.

Значит, $[y] \cap \Gamma_4(u)$ является 4-кликкой и $[y] \cap \Gamma_3(u)$ — призма или полный двудольный граф $K_{3,3}$. Противоречие с тем, что $[y] \cap \Gamma_2(u)$ не содержит четырехугольников.

Пусть $t = 7$, $z \in [y] \cap \Gamma_3(u)$. Тогда $[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)$ содержит 4 вершины и число ребер между $\{w_1, \dots, w_7\} \cap \Gamma_2(z)$ и $\{x_1, \dots, x_7\} \cap [z]$ не меньше 8. Если $|[z] \cap \{x_1, \dots, x_7\}| = 2$, то $|[u] \cap \Gamma_2(z)| = 4$ и для различных вершин $a, e \in [z] \cap \{x_1, \dots, x_7\}$ подграф $[a] \cap [e]$ содержит y, z и 4 вершины из $[u] \cap \Gamma_2(z)$, противоречие. Если $|[z] \cap \{x_1, \dots, x_7\}| = 3$, то снова $|[u] \cap \Gamma_2(z)| = 7$ и некоторая вершина из $[z] \cap \{x_1, \dots, x_7\}$ смежна с 5 вершинами из $\{w_1, \dots, w_7\}$, противоречие.

Пусть $t = 8$, $z \in [y] \cap \Gamma_3(u)$. Тогда $[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)$ содержит 6 вершин и число ребер между $\{w_1, \dots, w_8\} \cap \Gamma_2(z)$ и $\{x_1, \dots, x_8\} \cap [z]$ не меньше 12. Поэтому $|[z] \cap \{x_1, \dots, x_7\}| = 3$ и каждая вершина из $\Gamma - (\{y, z\} \cup \{w_1, \dots, w_8\} \cap \Gamma_2(z))$ смежна не более чем с одной вершиной из $[z] \cap \{x_1, \dots, x_7\}$. Для отличной от z вершины z' из $[y] \cap \Gamma_3(u)$ подграф $[z'] \cap \Gamma_2(u)$ содержит 2 вершины вне $[y] \cup [z]$ и по 3 вершины из $[y] - [z]$ и из $[z] - [y]$. Поэтому для отличной от y вершины y' из $[z] \cap \Gamma_3(u)$ подграф $[y'] \cap [z'] \cap \Gamma_2(u)$ содержит 2 вершины вне $[y] \cup [z]$ и по вершине из $[y] - [z]$ и из $[z] - [y]$. Далее, $\{w_1, \dots, w_8\} \cap \Gamma_2(z) \cap \Gamma_2(y') \cap \Gamma_2(z')$ содержит 2 вершины w_i, w_j и $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и 4 вершины из $\{x_1, \dots, x_8\} \cap ([z] \cup ([y'] \cap [z']))$, противоречие.

Как и ранее доказывается, что $c_3(u, y) \neq 9$. Поэтому $c_3(u, y) = 10$, $|\Gamma_3(u)| = 1$ и $|\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)| = 5$. Так как для любой вершины $p_i \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$ подграф $[p_i]$ содержит по 4

вершины из $[u]$, $[y]$ и 2 вершины из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$, то $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$ является пятиугольником. Противоречие с тем, что для каждой вершины u найдется единственный антипод u^* , а число вершин v нечетно.

Пусть $k = 12$. Тогда $\lambda = 5$ и $|\Gamma_2(u)| = 18$. В случае $t = 4$ каждая вершина из $\{w_1, \dots, w_4\}$ смежна с 4 вершинами из $\{x_1, \dots, x_4\}$, поэтому $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и 4 вершины из $\{x_1, \dots, x_4\}$. Поэтому $\{w_1, \dots, w_4\}$ является кликой. Противоречие с тем, что $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u, w_3, w_4 и 4 вершины из $\{x_1, \dots, x_4\}$.

В случае $t = 5$ каждая вершина из $\{w_1, \dots, w_5\}$ смежна с 4 вершинами из $\{x_1, \dots, x_5\}$, поэтому $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и не менее 3 вершин из $\{x_1, \dots, x_5\}$. Без ограничения общности, вершина w_i не смежна с x_i . Пусть степень вершины w_1 в графе $\{w_1, \dots, w_5\}$ равна α . Если $\alpha = 4$, то степень вершины w_i в графе $\{w_2, \dots, w_5\}$ не больше 1 и число ребер между $\{w_2, \dots, w_5\}$ и $[u] - \Gamma_2(y)$ не меньше 12. Противоречие с тем, что $[u] - \Gamma_2(y)$ содержит не менее 5 вершин, смежных с парами вершин из $\{w_2, \dots, w_5\}$.

Если $\alpha = 3$ и вершина w_5 не смежна с w_1 , то вершина w_1 изолирована в графе $\{w_1, \dots, w_5\}$ и число ребер между $\{w_1, \dots, w_4\}$ и $[u] - (\Gamma_2(y) \cup [w_5])$ не меньше 11, противоречие.

Если $\alpha = 2$ и если вершины w_4, w_5 не смежны с w_1 , то $[w_4] \cap [w_5]$ содержит u , 3 вершины из $\{x_1, \dots, x_5\}$ и вершину из $[u] - \{w_1, \dots, w_5\}$. В этом случае $[u] - \{w_1, \dots, w_5\}$ содержится в $[w_4] \cup [w_5]$, противоречие с тем, что $[w_2]$ содержит не менее 3 вершин из $[u] - \{w_1, \dots, w_4\}$.

Если $\alpha = 1$ и вершины $w_3, \dots, w_5$ не смежны с w_1 , то можно считать, что вершина w_5 изолирована в графе $\{w_1, \dots, w_5\}$ и число ребер между $\{w_1, \dots, w_4\}$ и $[u] - (\Gamma_2(y) \cup [w_5])$ не меньше 16, противоречие.

Значит, подграф $\{w_1, \dots, w_5\}$ является кокликой и $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и 3 вершины из $\{x_1, \dots, x_5\}$. Противоречие с тем, что число ребер между $\{w_1, \dots, w_5\}$ и $[u] - \Gamma_2(y)$ равно 25.

В случае $t = 6$ каждая вершина из $\{w_1, \dots, w_6\}$ смежна с 4 вершинами из $\{x_1, \dots, x_6\}$. Для вершин $w_i, w_j \in \{w_1, \dots, w_6\} - [x_6]$ подграф $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и не менее 3 вершин из $\{x_1, \dots, x_5\}$.

Покажем, что подграф $[u] \cap [x_i]$ получается удалением из 4-клики не менее двух ребер. Без ограничения общности, $[u] \cap [x_i] = \{w_1, \dots, w_4\}$. Если $\{w_1, \dots, w_4\}$ является кликой, то $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u, x_i, w_3, w_4 и не более одной вершины из $[y] \cap \Gamma_2(u) - \{x_i\}$. Поэтому $[w_1] \cup [w_2]$ содержит $[y] \cap \Gamma_2(u)$. Противоречие с тем, что $[w_3] \cap [w_4]$ содержит u, x_i, w_1, w_2 и 2 вершины из $[y] \cap \Gamma_2(u) - [w_1]$. Пусть подграф $[u] \cap [x_i]$ получается удалением из 4-клики ребра $\{w_1, w_2\}$. Тогда $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u, x_i, w_3, w_4 и вершину из $[y] \cap \Gamma_2(u) - \{x_i\}$, противоречие.

Заметим теперь, что диаметр Γ равен 3. В противном случае для геодезического пути $uwxyz$ число ребер между $([u] \cap [x]) \cup ([x] \cap [z])$ и $[x] - ([u] \cup [z])$ не меньше 24 и некоторая вершина из $[x] - ([u] \cup [z])$ смежна с 6 вершинами из $([u] \cap [x]) \cup ([x] \cap [z])$, противоречие. $\square$

В леммах 2.4–2.6 предполагается, что каждый μ -подграф является кокликой. Тогда окрестность любой вершины является объединением изолированных клик и $\lambda + 1$ делит 6. Если окрестность каждой вершины в Γ является объединением двух изолированных 6-клик, то $\mu = 1$.

Лемма 2.4. *Если Γ является регулярным графом без треугольников, то либо $\mu = 1$, либо $\mu = 2$, граф Γ является прямоугофом с $v \leq 2^7$ и диаметра, не большего 7 (в случае $v = 2^7$ или $d(\Gamma) = 7$ граф Γ является 7-кубом).*

Доказательство. Если $\lambda = 0$, то $\mu \in \{1, 2, 3\}$. В случае $\mu = 2$ граф Γ является прямоугофом, по предложению 1.13.1 из [1] имеем $v \leq 2^7$ и в случае $v = 2^7$ граф Γ является 7-кубом. По теореме 1.13.2 из [1] диаметр Γ не больше 7 и в случае $d(\Gamma) = 7$ граф Γ является 7-кубом.

Если диаметр Γ равен 6 и $pquwxyz$ — геодезический путь в Γ , то $c_3(p, w) + c_3(z, w) \leq 7$, поэтому можно считать, что $c_3(p, w) = 3$.

В случае $\mu = 3$ по предложению 1.9.1 из [1] имеем $c_i(e, f) \geq 1 + i$ для вершин e, f с $d(e, f) = i$.

Пусть $c_3(u, y) = t = 4$. Тогда $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и 2 вершины из $[y] \cap \Gamma_2(u)$. Если $z \in [y] \cap \Gamma_4(u)$, то $[x] \cap [z]$ содержит различные вершины y, y' . В этом случае $\{w_1, \dots, w_3\} = [u] \cap [x]$ содержится в $\Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(y')$. Поэтому $[y'] \cap \Gamma_2(u) - \{x\}$ содержит по 2 вершины из $[w_i]$ для $i = 1, 2, 3$. Отсюда $|[y'] \cap \Gamma_2(u)| \geq 7$, противоречие.

Положим $\{y_1, y_2, y_3\} = [y] \cap \Gamma_3(u)$. Тогда $[u] \cap \Gamma_2(y_1)$ содержит единственную вершину из $\Gamma_2(y)$, в частности, $c_3(u, y_i) = 4$. Аналогично, $[u] \cap \Gamma_2(y_2)$ содержит единственную вершину из $\Gamma_2(y)$ и $\Gamma_2(y_1) \cap \Gamma_2(y_2) \cap \Gamma_2(y_3)$ содержит $[u] - \Gamma_2(y)$. Противоречие с тем, что для двух вершин $w_5, w_6 \in [u] - \Gamma_2(y)$ подграф $[w_5] \cap [w_6]$ содержит 2 вершины из $[y_1] \cap [y_2]$.

Пусть $t = 5$. Тогда для $w_i, w_j \in [u] \cap \Gamma_2(y) - [x_1]$ подграф $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и 2 вершины из $[y] \cap \Gamma_2(u)$. Если $z \in [y] \cap \Gamma_4(u)$, то $[x] \cap [z]$ содержит 3 вершины y, y', y'' . Если $[y] \cap [y']$ содержит 2 вершины x, x' , то $[x] \cap [x']$ содержит y, y' и вершину из $[u] \cap \Gamma_2(y)$. В этом случае $[u] \cap \Gamma_2(y) = [u] \cap \Gamma_2(y')$ и для $w_i, w_j \notin [x]$ подграф $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u, x' и по вершине из $\Gamma_2(u) - [y]$ и из $\Gamma_2(u) - [y']$, противоречие. Значит, $[y] \cap [y']$ содержит единственную вершину из $\Gamma_2(u)$. Противоречие с тем, что для $w \in [u] \cap [x]$ подграф $[w] \cap \Gamma_2(u) - \{x\}$ содержит по 2 вершины из $[y]$, $[y']$ и из $[y'']$.

Положим $\{y_1, y_2\} = [y] \cap \Gamma_3(u)$. Тогда $[u] \cap \Gamma_2(y_1)$ содержит не менее 3 вершин из $\Gamma_2(y)$. Отсюда $[u] \cap \Gamma_2(y)$ содержит вершину w из $\Gamma_2(y_1) \cap \Gamma_2(y_2)$. Подграф $[w] \cap \Gamma_2(u)$ содержит по 3 вершины из $[y]$ и из $[y_1] \cap [y_2]$, противоречие.

Пусть $t = 7$. Если $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(y)$ содержит вершину z , то Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 1; 1, 3, 7\}$. Противоречие с тем, что некоторое собственное значение графа имеет не целочисленную кратность.

Положим $\Delta = \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$. Если $p \in \Delta$, то $[p]$ содержит по 3 вершины из $[u]$, $[y]$ и вершину из $\Delta \cup \Gamma_3(u) \cup \Gamma_3(y)$. Далее, для любой вершины $x \in [y]$ подграф $[x]$ содержит y и по 3 вершины из $[u]$ и из Δ . Так как $|\Delta| = 7$, то можно считать, что $[p]$ содержит вершину z из $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_2(y)$. В этом случае $[z]$ содержит 3 вершины из $[y]$ и 3 или 4 вершины из Δ , противоречие.

Итак, Γ — граф с $c_3 = 6$. Если $z \in [y] \cap \Gamma_3(u)$, то $[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)$ содержит не менее 5 вершин, каждая из которых смежна с 3 вершинами из $[y]$ и с 3 из $[z]$. Для вершины $q \in \Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$ подграф $[q]$ содержит не более 2 вершин из $[u]$, противоречие. Итак, в случае $\lambda = 0$ выполняется заключение леммы. $\square$

Лемма 2.5. *Если окрестность каждой вершины в Γ является объединением четырех изолированных ребер, то либо Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 3, 8\}$, либо $\mu \leq 2$.*

Доказательство. Пусть Γ — граф с $\lambda = 1$. Если $\mu = 2$, то по предложению 1.9.1 из [1] имеем $c_i(e, f) \geq i$ и диаметр Γ не больше 7.

Пусть $\mu = 3$. Тогда $|\Gamma_2(u)| = 16$ и $c_3(u, y) \geq 4$. Далее, любая вершина из $\Gamma_2(u)$ смежна с единственной вершиной или с ребром из $\Gamma_3(u)$. Если $c_3(u, y) = t = 4$, то $[x_i] \cap [x_j]$ содержит y и 2 вершины из $\Gamma_2(y) \cap [u]$, поэтому подграф $[u] \cap \Gamma_2(y)$ является кокликкой. Для $z \in \Gamma_3(u) \cap [y]$ подграф $[u] \cap \Gamma_2(z)$ содержит 3 вершины w_1, w_2, w_3 из $[u] \cap [x]$, где $x \in [y] \cap [z]$. Так как $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и 2 вершины из $[y] \cap \Gamma_2(u)$, то $[z] \cap \Gamma_2(u) - \{x\}$ содержит по 2 вершины из $[w_1]$, $[w_2]$, $[w_3]$ и $c_3(u, z) = 7$.

Для $z' \in \Gamma_3(u) \cap [y] - \{z\}$ подграф $[u] \cap \Gamma_2(z')$ содержит 3 вершины w_1, w_2, w_4 из $[u] \cap [x']$, где $x' \in [y] \cap [z]$, причем $[z'] \cap \Gamma_2(u) - \{x'\}$ содержит 2 вершины из $[w_1]$ и $|[w_1] \cap \Gamma_2(u)| \geq 7$, противоречие.

Значит, $t \geq 5$ и $[y] \cap \Gamma_2(u)$ содержит ребро $\{x_1, x_2\}$ и $t \geq 6$.

Допустим, что $\Gamma_3(u)$ содержит 2 несмежные вершины y, z . Если $d(y, z) = 2$, то $[y] \cap [z] \subset \Gamma_3(u) \cup \Gamma_4(u)$, противоречие с тем, что $c_3(u, y) \geq 6$. Значит, $d(y, z) \geq 3$ и диаметр Γ равен 3 (иначе для $o \in [y] \cap \Gamma_4(u)$ подграф $[o] \cap \Gamma_3(u)$ содержит несмежную с y вершину y' , противоречие). Далее, $c_3(u, y) = 8$. В противном случае для $o \in [y] \cap \Gamma_3(u)$ подграф $\Gamma_2(u)$ содержит не менее 11 вершин из $[o] \cap [y]$ и не менее 6 вершин из $[z]$. Таким образом, Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 3, 8\}$, и выполняется заключение леммы.

Пусть $\Gamma_3(u)$ является кликой. Если $|\Gamma_3(u)| = 1$, то $v = 26$, противоречие с тем, что $vk\lambda$ делится на 3. Если $\Gamma_3(u) = \{y, z\}$, то $c_3 = 7$ и $|[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)| \geq 6$. Противоречие с тем, что для вершины o из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$ получим $|[u] \cap [o]| \leq 2$. $\square$

Замечание. Каждый дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 3, 8\}$ отвечает спреду обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$ и $GQ(2, 4)$ с точностью до изоморфизма имеет 2 спреда.

Лемма 2.6. Если окрестность каждой вершины в Γ является объединением трех изолированных треугольников, то либо Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$, либо $\mu = 1$.

Доказательство. Пусть Γ — граф с $\lambda = 2$ и $\mu = 2$. Тогда диаметр Γ равен 3, $|\Gamma_2(u)| = 27$, и любая вершина из $\Gamma_2(u)$ смежна с n -кликой из $\Gamma_3(u)$, $n \leq 3$. По лемме 1.8 имеем $c_3(f, g) \geq 3$ для любых вершин f, g с $d(f, g) = 3$.

Покажем, что $\Gamma_2(u) \cap [y]$ содержит 3-кликку. Если $c_3(u, y) = t = 3$, то $[x_i] \cap [x_j]$ содержит y и вершину из $\Gamma_2(y) \cap [u]$, поэтому подграф $[u] \cap \Gamma_2(y)$ является кликой. Симметрично, подграф $[y] \cap \Gamma_2(u)$ является кликой. Если $t \geq 5$, то $[y] \cap \Gamma_2(u)$ содержит 3-кликку. Пусть $t = 4$ и подграф $[y] \cap \Gamma_2(u)$ содержит изолированные ребра $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_3, x_4\}$. Так как подграфы $[u] \cap [x_1] = \{w_1, w_2\}$ и $[u] \cap [x_2] = \{w_3, w_4\}$ являются непересекающимися 2-кликками, то можно считать, что вершина w_1 смежна с вершиной w_3 и подграф $[u] \cap \Gamma_2(y)$ является объединением изолированного ребра $\{w_1, w_3\}$ и подграфа $\{w_2, w_4\}$. Повторив рассуждения для ребра $\{x_3, x_4\}$, убедимся, что единственная пара вершин из $\{w_1, \dots, w_4\}$, попадающая в окрестность вершины из $\Gamma - (u^\perp \cup \{x_1, \dots, x_4\})$, — это $\{w_2, w_4\}$ (при условии, что вершины w_2, w_4 не смежны). Пусть $\{z_1, z_2, z_3\} = [y] \cap \Gamma_3(u)$, Δ состоит из вершин в $\Gamma_3(u) - \{y, z_1, z_2, z_3\}$, смежных с вершиной из $\{y, z_1, z_2, z_3\}$. Тогда $|\Delta| = 8$ и Δ имеет 12 ребер. Пусть Σ состоит из вершин в $\Gamma_2(u)$, не смежных с вершинами из $\{y, z_1, z_2, z_3\}$. Тогда $|\Sigma| = 11$, $c_3(u, z) \geq 5$ для $z \in \Delta$ и число ребер между Σ и Δ не меньше 24. Пусть γ_i — число вершин из Σ , смежных точно с i вершинами из Δ . Тогда $\sum \gamma_i = 11$, $\sum i\gamma_i \geq 24$. Так как $\gamma_i = 0$ для $i > 3$ и $\gamma_3 \leq 3$, то либо $\gamma_3 = 3, \gamma_2 = 7$ и $\gamma_1 = 1$, либо $\gamma_3 = 2$ и $\gamma_2 = 9$. В любом случае число ребер в Δ больше 12, противоречие.

Допустим, что $\Gamma_3(u)$ содержит 3-кликку $\{y_1, \dots, y_3\}$. Тогда $\{y_1, \dots, y_3\} \subset [x]$ для некоторой вершины $x \in \Gamma_2(u)$, и $4 \leq c_3(u, y_i) \leq 7$. Положим $\{w_1, w_2\} = [u] \cap [x]$. Тогда $[w_1]$ содержит по треугольнику из $u^\perp$, $x^\perp$ и еще один треугольник $\{r_1, r_2, r_3\}$ из $\Gamma_2(u)$. Аналогично $[w_2]$ содержит треугольник $\{s_1, s_2, s_3\}$ из $\Gamma_2(u) - x^\perp$. Далее, $[w_1] \cap [y_i]$ содержит x и вершину из $\{r_1, r_2, r_3\}$. Без ограничения общности, вершина y_i смежна с r_i и с s_i .

Заметим, что треугольник $[w_1] \cap x^\perp$ изолирован от $\{r_1, r_2, r_3\}$ и от $\{s_1, s_2, s_3\}$ (например,

$[r_i] \cap [x] = \{w_1, y_i\}$. Более того, вершины s_i, r_j не смежны для различных $i, j \in \{1, 2, 3\}$ (например, $[r_1] \cap [y_2] = \{r_2, y_1\}$ и вершины r_1, s_2 не смежны). Положим $[u] \cap w_1^\perp = \{w_3, w_4\}$. Если вершины r_1, s_1 смежны, то $[w_1] \cap [s_1]$ содержит вершину из $\{w_3, w_4\}$. Если вершины r_i, s_i смежны для всех i , то одна из вершин в $\{w_3, w_4\}$ смежна с 2 вершинами из $\{s_1, s_2, s_3\}$, противоречие. Пусть, для определенности, вершины r_1, s_1 не смежны. Заметим, что $[w_3] \cap [x]$ содержит w_1 и вершину из треугольника $[w_2] \cap x^\perp$, поэтому треугольник $[u] - (w_1 \perp \cup w_2^\perp)$ попадает в $\Gamma_3(x)$.

Допустим, что $[y_1] \cap \Gamma_3(u)$ содержит вершину z_1 . Тогда $[x] \cap [z_1]$ содержит y_1 и вершину o из $[x] \cap ([w_1] \cup [w_2])$. Без ограничения общности, $o \in [w_1]$ и $[w_1] \cap [z_1]$ содержит o и вершину из $\{r_1, r_2, r_3\}$. Так как для $i > 1$ подграф $[y_1] \cap [r_i]$ содержит r_1, y_i , то $z_1 \in [r_1]$. Более того, для любого i вершины r_i, s_i не смежны.

Для $i > 1$ подграф $[y_i] \cap [z_1]$ содержит y_1 и вершину $z_i \in \Gamma_3(u)$. Так как вершины z_2, z_3 не попадают в $(z_1^\perp \cap y_1^\perp) \cup (z_1^\perp \cap r_1^\perp)$, то $z_2, z_3 \in [o]$, вершина z_2 смежна с r_2 и z_3 смежна с r_3 . Значит, клика $\{z_1, z_2, z_3\}$ содержится в $[o]$ и $[u] \cap [o] = \{w, w_1\}$. Напомним, что $[u] - (w_1 \perp \cup w_2^\perp)$ содержится в $\Gamma_3(x)$, поэтому $w \in [w_2]$. Отсюда $[u] - (w_1 \perp \cup w_2^\perp)$ содержится в $\Gamma_3(x) \cap \Gamma_3(o)$.

Заметим, что $[w_2]$ не пересекает $\{r_1, r_2, r_3\}$, иначе $s_i \in \{r_1, r_2, r_3\}$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$. Положим $[u] \cap w_2^\perp = \{w_2, w, w'\}$. Так как $[u] \cap [r_i]$ содержит вершину из $\{w_2, w, w'\}$, то $r_1, r_2, r_3 \in [w']$, противоречие.

Итак, треугольник $\{y_1, y_2, y_3\}$ изолирован в $\Gamma_3(u)$, $|\Gamma_2(u) \cap (\cup_i [y_i])| = 19$ и $c_3(u, y_i) = 7$. Если $\Gamma_3(u) - \{y_1, y_2, y_3\}$ содержит вершину z , то $d(y_i, z) = 3$ и $\Gamma_3(u) = \{y_1, y_2, y_3, z\}$, противоречие с тем, что $[z]$ пересекает $\Gamma_2(u) \cap (\cup_i [y_i])$. Таким образом, $\Gamma_3(u) = \{y_1, y_2, y_3\}$. Положим $\Sigma = [x] \cap \Gamma_2(u)$, $\Sigma' = \Gamma_2(u) - ((\cup_i [y_i]) \cup [x])$. Тогда $|\Sigma| = |\Sigma'| = 4$, для любой вершины $p \in \Sigma$ подграф $[p] \cap \Sigma'$ является ребром, и для любой вершины $q \in \Sigma'$ подграф $[q]$ содержит по 2 вершины из $[u]$, Σ и четное число вершин из $\Gamma_2(u) \cap (\cup_i [y_i])$. Поэтому Σ' является 4-кликкой. Противоречие с тем, что каждая вершина из Σ' смежна с 2 вершинами из $[u] - [x]$, и некоторая вершина из $[u] - [x]$ смежна с 2 вершинами из Σ' .

Мы доказали, что для любой вершины u подграф $\Gamma_3(u)$ не содержит треугольников. Поэтому, в частности, $c_3(u, y) \leq 2$. Допустим, что $\Gamma_3(u)$ содержит 2-путь. Тогда связная компонента Δ графа $\Gamma_3(u)$, содержащая этот путь, является ректаграфом степени, не большей 3. Отсюда Δ — четырехугольник или куб. Если же $\Gamma_3(u)$ не содержит 2-путей, то $\Gamma_3(u)$ является объединением изолированных вершин и ребер.

Если Δ — куб, то число ребер между Δ и $\Gamma_2(u)$ равно 48, причем каждая вершина из Δ смежна с 3 изолированными ребрами из $\Gamma_2(u)$. Поэтому $\Gamma_2(u)$ содержит ровно 3 вершины p_1, p_2, p_3 , не смежные с вершинами из Δ и $\Gamma_3(u) = \Delta$. Если q, q^* — антиподы графа $\Gamma_3(u)$, то $\Gamma_3(q)$ — куб, антиподами в котором являются u, q^* . Поэтому p_1, p_2, p_3 лежат в $\Gamma_2(q)$ для любой вершины q из $\Gamma_3(u)$. Противоречие с тем, что $[p_1]$ содержит не менее 8 вершин из $\Gamma_2(u)$.

Через $P(u)$ обозначим множество вершин из $\Gamma_2(u)$, не смежных с вершинами из $\Gamma_3(u)$. Тогда для любой вершины $p \in P(u)$ подграф $p^\perp$ содержит единственную 4-кликку из $\Gamma_2(u)$, причем каждая вершина из этой 4-клики принадлежит $P(u)$. Поэтому $P(u)$ имеет разбиение 4-кликками, и $|P(u)|$ делится на 4.

Если Δ является 4-циклом y_1, y_2, y_3, y_4 , то число ребер между Δ и $\Gamma_2(u)$ равно 28, причем каждая вершина y_i из Δ смежна в $\Gamma_2(u)$ с 2 изолированными ребрами и треугольником. Поэтому $\Gamma_2(u)$ содержит 7-вершинный подграф $P(u) = \{p_1, \dots, p_7\}$, противоречие.

Если $|\Gamma_3(u)| = 1$, то $|P(u)| = 18$, противоречие.

Пусть $|\Gamma_3(u)| = 2$. Если $\Gamma_3(u)$ является кокликкой, то $|P(u)| = 9$, а если $\Gamma_3(u)$ является

кликой, то $|P(u)| = 13$. В любом случае имеем противоречие.

Пусть $|\Gamma_3(u)| = 3$. Если $\Gamma_3(u)$ является кокликкой для любой вершины u , то Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$ и выполняется заключение леммы. Если $\Gamma_3(u)$ является объединением ребра $\{y, y'\}$ и изолированной вершины z , то $|P(u)| = 4$. В этом случае $\Gamma_3(z) = \{u, y, y'\}$ и $|[u] \cap \Gamma_2(y)| = |[z] \cap \Gamma_2(y)| = 8$, противоречие.

Пусть $|\Gamma_3(u)| = 4$. Если $\Gamma_3(u)$ является кокликкой, то $|\Gamma_2(u)| \geq 36$. Значит, $\Gamma_3(u)$ содержит ребро $\{y, y'\}$. Число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\{y, y'\}$ равно 14. Если $\Gamma_3(u) - \{y, y'\}$ является кокликкой, то $|\Gamma_2(u)| \geq 32$, а если $\Gamma_3(u) - \{y, y'\}$ является ребром, то $|\Gamma_2(u)| \geq 28$. В любом случае имеем противоречие. $\square$

Замечание. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений

$\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$ существует. Он получается удалением спреда из обобщенного четырехугольника $GQ(3, 3)$.

3. Графы с $b_1 = 6$, μ -подграфы малые, но не все кокликовые

До конца работы будем предполагать, что некоторый μ -подграф не является кокликкой. Зафиксируем геодезический путь $uwxy$ и положим $[u] \cap \Gamma_2(y) = \{w_1, \dots, w_t\}$, $[y] \cap \Gamma_2(u) = \{x_1, \dots, x_t\}$. В случае $t = 4$ либо $\{w_1, \dots, w_4\}$ является кокликкой, либо для смежных вершин w_i, w_j подграф $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и не менее двух вершин из $\{x_1, \dots, x_4\}$. В последнем случае $\lambda \geq 3$ и $k \geq 10$.

Пусть $\mu = 2$. Так как $k - 2b_1 + 2 \leq 2$, то $k \leq 12$. В случае $k = 12$ имеем $\mu = k - 2b_1 + 2$ и, по следствию из [9], Γ является графом Зейделя. Если $k \leq 8$, то каждый μ -подграф является кокликкой. Поэтому $9 \leq k \leq 11$.

Лемма 3.1. Если $\mu = 2$ и $k \leq 10$, то Γ — граф Конвея-Смит или граф Доро.

Доказательство. Пусть $\mu = 2$ и $k = 9$. Тогда окрестность каждой вершины является одним из графов:

- (i) девятиугольником;
- (ii) объединением треугольника и шестиугольника;
- (iii) объединением четырехугольника и пятиугольника.

Пусть $[a]$ содержит треугольник $\{b_1, b_2, b_3\}$ и 6-цикл $c_1c_2\dots c_6$. Тогда $\Gamma_2(a)$ имеет разбиение на 3 шестивершинных подграфа $\{[c_i] - a^\perp \mid i = 1, 3, 5\}$. Противоречие с тем, что $\Gamma_2(a) \cap [c_2]$ содержит по вершине из $[c_1], [c_3]$ и не более 2 вершин из $[c_5]$.

Если $[a]$ содержит 4-цикл $b_1b_2\dots b_4$, то $\mu(b_1, b_3) = 3$, противоречие.

Итак, в случае $k = 9$ граф Γ является локально девятиугольным. Пусть $[a]$ содержит 9-цикл $b_1b_2\dots b_9$. Положим $B_i = [b_i] - a^\perp$. Тогда B_3 не пересекает B_1, B_5 и $|B_1 \cap B_5| \leq 1$. Противоречие с тем, что B_2 содержит по вершине из B_1, B_3 и не более 2 вершин из B_5 .

Пусть $\mu = 2$ и $k = 10$. Тогда окрестность каждой вершины является регулярным графом степени 3 на 10 вершинах. Ввиду теоремы 1.16.3 из [1] граф Γ является локально Петерсеновским графом Тервиллигера, поэтому Γ — граф Конвея-Смит или граф Доро. $\square$

Лемма 3.2. Если $\mu = 2$, то $k \neq 11$.

Доказательство. Пусть $\mu = 2$ и $k = 11$. Тогда окрестность Σ вершины a является регулярным графом степени 4 на 11 вершинах с $\mu_\Sigma = 1$.

Если Σ содержит 5-клику K , то $\Sigma - K$ является октаэдром, противоречие. Если Σ содержит 4-клику $L = \{b_1, \dots, b_4\}$, то $\Sigma - L$ содержит 4 вершины $c_1, \dots, c_4$, такие, что c_i смежна с b_i . Для несмежной с c_1 вершины $b_i \in L$ получим $[b_i] \cap [c_1] = \{a, b_1\}$, поэтому $L \cap [c_i] = \{b_i\}$. Если вершины c_1, c_2 смежны, то $[b_2] \cap [c_1]$ содержит вершину c_2 , противоречие. Поэтому подграф $\{c_1, \dots, c_4\}$ является кокликкой, и $[c_1] \cap [c_2]$ содержит 3 вершины из $\Sigma - \{b_1, \dots, b_4, c_1, \dots, c_4\}$, противоречие.

Заметим, что число ребер между $\Sigma(b)$ и $\Sigma_2(b)$ не больше 6. Так как $\mu_\Sigma = 1$, то $\Sigma(b)$ является объединением изолированных клик порядка, не большего 2. Противоречие с тем, что число ребер между $\Sigma(b)$ и $\Sigma_2(b)$ не меньше 8. $\square$

Пусть $\mu = 3$. Так как $k - 2b_1 + 2 \leq 3$, то $k \leq 13$. В случае $k = 13$ имеем $\mu = k - 2b_1 + 2$ и, по следствию из [9], Γ является графом Зейделя. Если $k \leq 8$, то каждый μ -подграф является кокликкой. Поэтому $9 \leq k \leq 12$.

Лемма 3.3. *Если $\mu = 3$ и $k = 9$, то Γ является локально девятиугольным графом диаметра 3, каждый μ -подграф является 3-кокликкой или объединением изолированной вершины и ребра, $b_2(u, x) \leq 3$ для любых вершин u, x с $d(u, x) = 2$ и $|\Gamma_3(u)| \leq 10$.*

Доказательство. Пусть $k = 9$. Тогда окрестность каждой вершины является одним из графов:

- (i) девятиугольником;
- (ii) объединением треугольника и шестиугольника;
- (iii) объединением четырехугольника и пятиугольника.

Пусть $[a]$ содержит треугольник $\{b_1, b_2, b_3\}$ и 6-цикл $c_1c_2\dots c_6$. Тогда $\Gamma_2(a)$ имеет разбиение на 3 шестиугольника $\{[b_i] - a^\perp \mid i = 1, 2, 3\}$. Для любой вершины e из $\Gamma_2(a) \cap [b_1]$ подграф $[e]$ содержит 3 вершины из $[a]$, и по 2 вершины из $[b_i] - a^\perp$ для $i = 1, 2, 3$. Противоречие с тем, что тогда $|\Gamma_3(a)| = 0$.

Пусть $[a]$ содержит 4-цикл $b_1b_2\dots b_4$ и 5-цикл $c_1c_2\dots c_5$. Тогда $\Gamma_2(a)$ содержит 4 вершины, смежные с ребрами из $\{b_1, \dots, b_4\}$, и 16 вершин, каждая из которых смежна с единственной вершиной из $\{b_1, \dots, b_4\}$, противоречие.

Итак, в случае $k = 9$ граф Γ является локально девятиугольным. Если попарные расстояния между вершинами из $[w] \cap [y]$ в графе $[y]$ равны 3, то $|[y] \cap \Gamma_3(w)| = 0$. Заметим, что $[u] \cap [x] = \{w_1, w_2, w_3\}$ не является 2-путем. В противном случае подграф $\{w_1, w_2, w_3\}$ содержит вершину w_i степени 2. Тогда $[w_i]$ содержит 2-путь из $u^\perp$ и 5-путь из $\Gamma_2(u)$, противоречие с тем, что $[x] \cap \Gamma_2(u)$ не пересекает $[w_i]$. Таким образом, любой μ -подграф является 3-кокликкой или объединением изолированной вершины и ребра. Отсюда $b_2(u, x) \leq 3$ и $|\Gamma_3(u)| \leq 10$.

Заметим, что диаметр графа Γ равен 3. Иначе для геодезического пути $uwxyz$ подграф $[x]$ содержит два изолированных 3-вершинных подграфа $[u] \cap [x]$ и $[x] \cap [z]$. Противоречие с тем, что число ребер между $([u] \cap [x]) \cup ([x] \cap [z])$ и $[x] - ([u] \cup [z])$ не меньше 8. $\square$

Случаю $\mu = 3$ и $k = 10$ будет посвящена специальная статья.

Лемма 3.4. *Если $\mu = 3$ и $k = 11$, то Γ является графом диаметра 3 и $c_3(u, y) \geq 5$ для любых вершин u, y с $d(u, y) = 3$.*

Доказательство. Пусть $\mu = 3$ и $k = 11$. Тогда окрестность любой вершины является регулярным графом степени 4 на 11 вершинах, и $|\Gamma_2(u)| = 22$. Если $[u]$ содержит 5-клику L , то $[u] - L$ является октаэдром, противоречие.

В случае $t = 3$ имеем $[w_i] \cap [y] = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $[x_j] \cap [u] = \{w_1, w_2, w_3\}$, поэтому подграфы $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{w_1, w_2, w_3\}$ являются кликами и $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u, w_3, x_1, x_2, x_3 , противоречие.

Покажем, что диаметр Γ равен 3. Пусть $uwxyz$ — геодезический путь в Γ , $\Lambda = [x] - ([u] \cup [z])$. Тогда $|\Lambda| = 5$. Если $[u] \cap [x]$ содержит изолированную вершину w , то для $p \in [u] \cap [x] - \{w\}$ подграф $[w] \cap [p]$ содержит u, x и не менее 2 вершин из Λ . Если $[u] \cap [x]$ содержит геодезический 2-путь pwq , то $[p] \cap [q]$ содержит u, w, x и вершину из Λ . Таким образом, $[u] \cap [x]$ и $[x] \cap [z]$ являются 3-кликами. Если вершина x' из Λ смежна с 2 вершинами p, q из $[u] \cap [x]$, то $[p] \cap [q]$ содержит u, x, x' и вершину из $[u] \cap [x]$. Если $d(x', z) = 2$, то по доказанному $[u] \cap [x']$ является 3-кликой, противоречие. Значит, $d(x', z) = 3$ и Λ содержит 2 вершины x_1, x_2 , смежные с парами вершин из $[x] \cap [z]$. Как и ранее, $d(u, x_1) = d(u, x_2) = 3$. Теперь любая вершина x' из $\Lambda - \{x_1, x_2\}$ смежна с 2 вершинами из $[u] \cap [x]$. Противоречие с тем, что x_1, x_2 смежны с тройками вершин из $[x] \cap [z]$.

Пусть $t = 4$. Тогда можно считать, что вершины w_i, x_i не смежны для любого $i \in \{1, \dots, 4\}$. Если $[w_1]$ содержит w_2, w_3 , то $[w_2] \cap [w_3]$ содержит u, w_1, x_1, x_4 , поэтому вершины w_2, w_3 смежны. В этом случае вершины w_1, w_2, w_3 не смежны с w_4 , иначе $\{w_1, \dots, w_4\}$ является кликой и $[w_2] \cap [w_3]$ содержит u, w_1, w_4, x_1, x_4 , противоречие. Заметим, что число ребер между $\{w_1, \dots, w_4\}$ и $[u] - \{w_1, \dots, w_4\}$ равно $4 + 3 \cdot 2$, поэтому некоторая вершина из $[u] - \{w_1, \dots, w_4\}$ смежна с 2 вершинами w_i, w_j из $\{w_1, \dots, w_4\}$. Противоречие с тем, что $[w_i] \cap [w_j]$ содержится в $\{u\} \cup \{w_1, \dots, w_4\} \cup \{x_1, \dots, x_4\}$. Итак, степень каждой вершины в графе $\{w_1, \dots, w_4\}$ не больше 1. Теперь число ребер между $[u] - \{w_1, \dots, w_4\}$ и $\{w_1, \dots, w_4\}$ не меньше 12. Если $z \in [u] - \{w_1, \dots, w_4\}$ и вершина z смежна с 2 вершинами w_i, w_j , то $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u, z и 2 вершины из $\{x_1, \dots, x_4\}$, поэтому вершины w_i, w_j смежны. Противоречие с тем, что $[u] - \{w_1, \dots, w_4\}$ содержит не менее 5 вершин, смежных с парами вершин из $\{w_1, \dots, w_4\}$, а число ребер в $\{w_1, \dots, w_4\}$ не больше 2. Итак, $t \geq 5$. $\square$

Лемма 3.5. Если $\mu = 3$, то $k \neq 12$.

Доказательство. Пусть $\mu = 3$ и $k = 12$. Тогда окрестность вершины u является регулярным графом степени 5 на 12 вершинах, причем пересечение окрестностей двух несмежных вершин в графе $[u]$ содержит не более 2 вершин.

Пусть $d(u, x) = 2$. Если $[u] \cap [x]$ содержит изолированную вершину w , то для $z, z' \in [u] \cap [x] - \{w\}$ подграф $[w] \cap [z]$ содержит не менее 3 вершин в каждом из подграфов $[x] - [u]$ и из $[u] - [x]$. Противоречие с тем, что $[z] \cap [z']$ содержит u, x и по 2 вершины из $[x] - [u]$ и из $[u] - [x]$.

Если $[u] \cap [x]$ содержит геодезический путь $w_1 w_2 w_3$, то $[w_1] \cup [w_3]$ содержит 8 из 9 вершин в $[x] - [u]$. Далее, $[w_2]$ содержит 2 вершины p, p' вне $u^\perp \cup x^\perp$ и 2 вершины q, q' вне $w_1^\perp \cup w_3^\perp$.

Если $\{p, p'\}$ не пересекает $\{q, q'\}$, то $[w_2]$ содержит по 1 вершине, смежной с ребрами четырехугольника $\{u, x, w_1, w_3\}$, и можно считать, что p смежна с w_1 , q смежна с u . Заметим, что $[p] \cap [u]$ содержит w_1, w_2 и еще не более одной вершины. Симметрично, $[p] \cap [x]$ содержит w_1, w_2 и еще не более одной вершины. Противоречие с тем, что степень p в графе $[w_2]$ не больше 4.

Пусть $\{p, p'\}$ пересекает $\{q, q'\}$ точно по 1 вершине, скажем, $p = q$. Без ограничения общности, p' смежна с w_1 , q' смежна с u . Повторив рассуждения из предыдущего абзаца, убедимся, что степень p' в графе $[w_2]$ не больше 4.

Если $\{p, p'\} = \{q, q'\}$, то $[w_2] \cap [w_i]$ содержит 3 вершины из $([x] - [u]) \cup ([u] - [x])$ для $i = 1, 3$, для определенности, $[u] \cap [w_1]$ и $[x] \cap [w_3]$ содержат по 2 вершины из $[w_2]$. Далее, вершины

p, p' смежны (иначе $[p] \cap [p']$ содержит w_2 и не менее 4 вершин из $[w_2] - \{p, p', u, x, w_1, w_3\}$). Положим $\Phi = [w_2] - \{p, p', u, x, w_1, w_3\}$ и $[p] \cap [p'] - w_2^\perp = \{z_1, z_2\}$. Тогда число ребер между Φ и $[w_2] - \Phi$ равно 20, поэтому Φ является 6-кликкой. Для $w' \in \Phi - [p]$ подграф $[w'] \cap [p]$ содержит w_2, p и вершину из $\{z_1, z_2\}$. Поэтому число ребер между $\Phi - ([z_1] \cap [z_2])$ и $\{z_1, z_2\}$ равно 4, можно считать, что z_1 смежна с 2 вершинами из $\Phi - ([z_1] \cap [z_2])$ и $\mu(w_2, z_1) \geq 4$, противоречие.

Таким образом, любой μ -подграф является 3-кликкой и Γ — граф Тервиллигера. Поэтому $\Delta = [u]$ — регулярный граф Тервиллигера диаметра 2, степени 5 на 12 вершинах с $\mu_\Delta = 2$. Так как $\Delta(w)$ — граф на 5 вершинах с $\mu(\Delta(w)) = 1$, то $\Delta(w)$ является 4-лапой или пятиугольником. Так как Δ — граф Тервиллигера, то Δ — локально пятиугольный граф и Δ — граф икосаэдра. Противоречие с тем, что диаметр Δ равен 2. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00009) и РФФИ-БРФФИ (грант 08-01-90006).

Список литературы

- [1] А.Е.Броувер, А.М.Коэн, А.Неумаиер, Distance-regular graphs, Berlin etc, Springer-Verlag, 1989.
- [2] А.А.Махнев, О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов, *Известия РАН. Сер. матем.*, **68**(2004), №6, 159-172.
- [3] В.И.Казарина, А.А.Махнев, О реберно регулярных графах с $b_1 = 5$, *Межд. конф. "Алгебра, логика и кибернетика"*. Тез. докл. Иркутск, 2004, 159-161.
- [4] А.А.Махнев, Д.В.Падучих, Об одном классе кореберно регулярных графов, *Известия РАН. Сер. матем.*, **69**(2005), №6, 95-114.
- [5] А.А.Махнев, Д.В.Падучих, Новая оценка для числа вершин реберно регулярных графов, *Сиб. матем. журн.*, **48**(2007), №4, 817-832.
- [6] И.Н.Белоусов, А.А.Махнев, О почти хороших парах вершин в реберно регулярных графах, *Известия Уральского госуниверситета*, **36**(2005), №7, 35-48.
- [7] А.А.Махнев, И.М.Минакова, Об одном классе реберно регулярных графов, *Известия Гомельского госуниверситета. Вопросы алгебры*, **3**(2000), №16, 145-154.

AmPLY Regular Graphs with $b_1 = 6$

Konstantin S.Efimov
Alexander A.Makhnev

The unoriented graph with v vertices of valency k , such that every edge belongs to λ triangles, is called an edge regular graph with the parameters (v, k, λ) . Let $b_1 = k - \lambda - 1$. In [1] it is proved that a connected edge regular graph with $b_1 = 1$ is either a polygon or a complete multipart graph all of whose parts have order 2. Edge regular graphs with $b_1 \leq 5$ have been studied in previous work. In the present paper we investigate amply regular graphs with $b_1 = 6$.

Keywords: amply regular graph, unoriented graph.