$$\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \; u = 1+\sqrt{1-x^2-y^2},$$

и, таким образом, устранить особенность параметризации, то найденные выше векторные функции $\bar{z}$ и $\overset{2}{\bar{z}}$ будут аналитичны по x и y в окрестности полюса $u = 2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Liebmann H. Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen // Münchener Berichte. 1920. S. 21−48.
2. Rembs E. Über Gleitverbiegungen // Math. Ann. 1935. Bd. 111, № 4. S. 587−595.
3. Марков П.Е. Бесконечно малые изгибания высших порядков многомерных поверхностей в пространствах постоянной кривизны // Мат. сборник. 1987. Т. 133. № 1. С. 64−85.
4. Климентов С.Б. О продолжении бесконечно малых изгибаний высших порядков односвязной поверхности положительной кривизны // Мат. заметки. 1984. Т. 36. в. 3. С. 393−403.
5. Климентов С.Б. Варьированное уравнение Бианки-Дарбу // Настоящий сборник. С. 41–44.
6. Моденов П.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии. М.: Учпедгиз, 1949. С. 230.

О.Б. Кожевников

ВПОЛНЕ ПРОСТЫЕ ПОЛУГРУППОИДЫ

В.В. Вагнер для геометрических целей ввел и подробно исследовал понятие полугруппоида, как нулевого ограничения [1] произвольной полугруппы с нулем. Иными словами, полугруппоид – это частичный группоид S, (заданный в мультипликативной терминологии), удовлетворяющий следующему условию сильной ассоциативности

$$(\forall x, y, z \in S)\;\; (xy)z \neq \varnothing \vee x(yz) \neq \varnothing \;\to\; (xy)z = x(yz)$$

Для любой полугруппы S обозначим

$$S^* = \begin{cases} S \setminus \{0\}, \textit{если } S \textit{ содержит ноль, не являющийся внешним,} \\ S, \textit{если } S \textit{ содержит внешний ноль, либо нуля не содержит.} \end{cases}$$

Тогда S^* – полугруппоид.

Для любого полугруппоида S обозначим

$$S^0 = \begin{cases} S \cup \{0\}, \textit{нулевое расширение } S, \textit{если операция в } S \textit{ не всюду определена,} \\ S, \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда S^0 – полугруппа.

Операторы (*), $\circ$ взаимно обратны в следующем смысле: $S^{*\,0} = S$ для любой полугруппы S и $S^{0\,*} = S$ для любого полугруппоида S.

Полугруппы – это в точности те полугруппоиды, операция в которых всюду определена. При изучении полугруппы S при помощи соответствующего полугруппоида S^* часто возникающий вопрос: содержит S нуль или нет, становится не существенным. Рассматривая, например, так называемые вполне простые полугруппоиды, мы одновременно рассматриваем вполне простые полугруппы с нулем и вполне простые полугруппы без нуля.

Иногда предпочтительнее изучать полугруппоид S^*, а не полугруппу S, т.к. в S^*, как частичном группоиде, как правило, значительно больше конгруенций, чем в полугруппе S: далеко не каждая конгруенция полугруппоида S^* сводится к полугрупповой.

Полугруппоид S называется вполне ***простым полугруппоидом***, если S^0 – вполне простая или вполне 0-простая полугруппа.

В настоящей заметке изучаются разложения вполне простых полугруппоидов в объединение попарно не пересекающихся группоидов Брандта [2], что приводит в частном случае к известным разложениям вполне простых полугрупп в объединение групп.

Для краткости будем говорить «группоид» вместо «частичный группоид», а группоид в принятом понимании этого слова (когда операция всюду определена) – *полным группоидом*.

Если $\mathrm{P} = \| p_{\lambda i} \|$ – произвольная $\Lambda \times Y$ – матрица над группой G^0 с внешним нулем, то, заменяя нули в Р пустыми символами, получаем частичное отображение из $\Lambda \times Y$ в G, которое обозначим через P^* и назовем ***частичной*** $\Lambda \times Y$ – ***матрицей над группой*** G. Если $\mathrm{M} = \mathrm{M}(G^0; Y, \Lambda; \mathrm{P})$ – матричная полугруппа над G^0, то частичный группоид M^* (см. обозначение выше) назовем ***матричным группоидом*** над G и обозначим $\mathrm{M}^* = \mathrm{M}(G; Y, \Lambda; \mathrm{P}^*)$. Имеем $\mathrm{M}^* = \mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{P}^* = \mathrm{P}$.

Эти равенства равносильны отсутствию нулей в матрице Р. Итак, матричный группоид M^* с частичной $\Lambda \times Y$ – матрицей Р (содержащей хотя бы одну пустую клетку) над G – это множество $G \times Y \times \Lambda$ с частичной операцией

$$(a; i, \lambda) \cdot (b; j, \mu) = \begin{cases} (ap_{\lambda j}b; i, \mu) & при \ p_{\lambda j} \neq \varnothing \\ \varnothing \ при \ p_{\lambda j} = \varnothing \end{cases}$$

К матричным группоидам возможен и другой подход – на языке частичных матриц Риса. Если обычная матричная полугруппа $\mathrm{M} = \mathrm{M}(G^0; Y, \Lambda; \mathrm{P})$ – это полный группоид всех $\Lambda \times Y$ – матриц Риса [2] A, B, C,… с умножением $A \circ B = A\mathrm{P}B$, то матричный группоид $\mathrm{M}^* = \mathrm{M}(G; Y, \Lambda; \mathrm{P}^*)$ – это частичный группоид всех частичных $\Lambda \times Y$ – матриц Риса A^*, B^*, C^*,… с частичным умножением $A^* \circ B^* = A^*\mathrm{P}^*B^*$, что равносильно равенству $A^* \circ B^* = (A \circ B)^*$.

Из ассоциативности умножения в M вытекает сильная ассоциативность группоида M^*. Таким образом, любой матричный группоид над группой является полугруппоидом.

В терминах матричных группоидов легко определить и группоид Брандта как группоид, изоморфный матричному группоиду с единичной частичной матрицей над группой. Под ***единичной частичной матрицей*** понимаем Δ^*, где Δ – единичная матрица.

Важным частным случаем полугруппоидов являются матричные группоиды $\mathrm{M}(\{e\}; Y, \Lambda; \mathrm{P})$ над единичной группой, где Р – произвольная частичная $\Lambda \times Y$ – матрица над {e}. Если Р – обычная матрица, не содержащая пустых клеток, то получаем прямоугольную $\Lambda \times Y$ – связку (возможно с внешним нулем), умножение в которой определяется известным тождеством

$$(i, \lambda) \cdot (j, \mu) = (i, \mu).$$

Если Р – «пустая» $\Lambda \times Y$ – матрица, то имеем полугруппоид M с пустым умножением, т.е. M^0 – полугруппа с нулевым умножением. Если же $Y \times \Lambda$ и не пусты лишь все диагональные клетки, то получается, ***декартов полугруппоид***, операция в котором определяется правилом

$$i,\lambda \ \cdot \ j,\mu \ = \begin{cases} i,\mu \quad при \ \lambda = j, \\ \varnothing \ при \ \lambda \neq j. \end{cases}$$

Для произвольной частичной $\Lambda \times Y$ – матрицы $\mathrm{P} = \|p_{\lambda i}\|$ над $\{e\}$ обозначим через $E\ \ \mathrm{P}$ группоид с базисным множеством $Y \times \Lambda$ и частичной операцией

$$i,\lambda \ \cdot \ j,\mu \ = \begin{cases} i,\mu \quad при \ p_{\lambda j} \neq \varnothing, \\ \varnothing, \ если \ p_{\lambda j} = \varnothing. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда очевидно

$$E\ \ \mathrm{P}\ \ \cong \mathrm{M}\ \ \ e\ \ ;Y,\Lambda;\mathrm{P}\ \ . \tag{2}$$

$E\ \ \mathrm{P}$ – сильно идемпотентный группоид в том смысле, что каждый его элемент, квадрат которого определен, является идемпотентом.

Используя терминологию из [3], группоид S назовем ***Y – связкой группоидов*** $S_\alpha \,|\, \alpha \in Y$, если существует конгруенция τ на S такая, что факторгруппоид S/τ является связкой, изоморфной Y, а каждый τ – класс, как частичный подгруппоид в S, изоморфен некоторому $S_\alpha, \alpha \in Y$.

Полугруппоид S называется ***связным полугруппоидом***, если

$$(\forall x, y \in S) \ \ xSy \neq \varnothing.$$

Теорема. Если матричный группоид $S = \mathrm{M}\ \ \ e\ \ ;Y,\Lambda;\mathrm{P}$ является Y – связкой группоидов, каждый из которых связен, то связка Y антикоммутативна.

Доказательство. Согласно (2), можно считать $S = E\ \ \mathrm{P}$, т.е. элементами S являются все пары $i,\lambda\ \ , i \in Y, \lambda \in \Lambda$, а умножаются они по правилу (1). Надо доказать, что равенство $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ в Y всегда влечет $\alpha = \beta$.

Итак, пусть $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ (3)

Т.к. умножение $\circ$ в Y всюду определено, то каждое из произведений $\alpha \cdot \beta, \beta \cdot \alpha$ как подмножеств α, β множества S , не пусто. Значит, найдутся $a_1, a_2 \in \alpha$, $b_1, b_2 \in \beta$ такие, что $a_1 \cdot b_1 \in \alpha \circ \beta, \ b_2 \cdot a_2 \in \beta \circ \alpha$. Из (3) следует, что $a_1 \cdot b_1, \ b_2 \cdot a_2$ – элементы группоида $\alpha \circ \beta \in Y$, который по условию является связным группоидом. Поэтому для некоторого элемента $c \in \alpha \circ \beta$ имеем

$$a_1 \cdot b_1 \in \alpha \circ \beta, \ b_2 \cdot a_2 \in \beta \circ \alpha.$$

Т.к. Y – связка, то, в силу равенства (3),

$$a_1 b_1 c b_2 a_2 \in \alpha \circ \beta \tag{4}$$

Обозначая $a_1 = (i,\lambda), a_2 = (j,\mu), где\ i,j \in Y,\ \lambda,\mu \in \Lambda$, в силу (4), получаем

$$(i,\mu) \in \alpha \circ \beta \tag{5}$$

С другой стороны, связен и группоид α. Следовательно, существует $d \in \alpha$ такое, что $a_1 d a_2 \in \alpha$, откуда, согласно (1),

$$(i,\mu) \in \alpha \tag{6}$$

Т.к., по условию, группоиды из Y попарно не пересекаются, то из (5), (6) следует

$$\alpha = \alpha \circ \beta \tag{7}$$

Равенство

$$\beta = \beta \circ \alpha \tag{8}$$

следует из соображений симметрии. Из (3), (7), (8) получаем $\alpha = \beta$ и теорема доказана.

Следствие 1. Если вполне простой полугруппоид над единичной группой является Y – связкой группоидов Брандта, то связка Y является прямоугольной.

Доказательство. Всякий группоид Брандта является связным группоидом, а антикоммутативная связка изоморфна прямоугольной связке.

Пусть $Y \times \Lambda$ – произвольные непустые множества; l, r – такие эквивалентности соответственно на множествах $Y \times \Lambda$, что все l – классы и r – классы имеют одну и ту же фиксированную мощность ξ; $A = Y/l$, $B = \Lambda/r$.

Для любых $\alpha \in A, \beta \in B$ (как подмножеств соответственно в $Y \times \Lambda$) обозначим $M_{\alpha\beta} = M(\{e\};\alpha,\beta;P_{\alpha\beta})$, где $P_{\alpha\beta}$ – частичная $\beta \times \alpha$ – матрица над {e}, содержащая в каждой строке и каждом столбце ровно один непустой элемент (равный e). Тогда $M_{\alpha\beta}$ – изоморфные между собой группоиды Брандта (с единичной структурной группой). Пусть $P(\xi)$ – такая $\Lambda \times Y$ – матрица над {e}, ограничение которой на каждом множестве $\beta \times \alpha$ равно $P_{\alpha\beta}$. Получаем полугруппоид $M(\{e\};Y,\Lambda;P(\xi))$ над единичной группой. Из следствия 1 легко получаем

Следствие 2. Построенный полугруппоид $M(\{e\};Y,\Lambda;P(\xi))$ является прямоугольной $A \times B$ – связкой группоидов Брандта $\{M_{\alpha\beta} \mid (\alpha,\beta) \in A \times B\}$ и любой полугруппоид над единичной группой, являющийся связкой группоидов Брандта, устроен подобным образом.

В частном случае, при $\xi = 1$ имеем известное утверждение о том, что вполне простые идемпотентные полугруппы – это в точности прямоугольные связки.

Замечание. Если множества $Y \times \Lambda$ – конечны, что равносильно конечности полугруппоида $M(\{e\};Y,\Lambda;P(\xi))$, то ξ – общий делитель чисел $|Y|, |\Lambda|$.

Из этого замечания и следствия 2 получаем

Следствие 3. Если в конечном полугруппоиде $M(\{e\};Y,\Lambda;P(\xi))$ матрица $P(\xi)$ содержит хотя бы одну пустую клетку, а числа $|Y|, |\Lambda|$ взаимно просты, то данный полугруппоид нельзя разложить в связку группоидов Брандта.

В заключение заметим, что при помощи введенного оператора $\circ$ рассмотренные свойства полугруппоидов легко переводятся на полугрупповой язык.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Частичные алгебраические действия. СПб., 1991.
2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. Т. 1.
3. Кожевников О.Б. Об одном классе инверсных полугрупп с нулем // Вестник ТГПИ. Естественные науки. 2007. № 1.

В.М. Кривенко

О РАЗДУВАНИЯХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

1°. Пусть $\langle A;\cdot\rangle$ – произвольная полугруппа. Тогда определяя для каждого $(a \in A)$ множество M_a, содержащее a, так, что

$$M_a \cap A = \{a\} \text{ и } M_a \cap M_b = \varnothing, \text{ если } a \neq b$$

и определяя на множестве $\mathrm{I}A = \bigcup_{a\in A} M_a$ операцию $\circ$ так, что

$$(\forall x \in M_a)(\forall y \in M_b)(x \circ y = a \cdot b),$$

получим полугруппу, которая называется [1] раздуванием (инфляцией) полугруппы $\langle A;\cdot\rangle$ с помощью множеств M_a $(a \in A)$ и обозначается

$$\langle \mathrm{I}A;\cdot\rangle = \left\langle \bigcup_{a\in A} M_a;\cdot\right\rangle.$$

Понятие раздувания полугруппы нередко используется для описания строения различных полугрупп [2] и [3]. В [3] установлено, что если W является произвольным многообразием гамильтоновых полугрупп, то класс IW, состоящий из всевозможных раздуваний полугрупп класса W также является многообразием. В настоящей работе этот результат обобщается на случай произвольного многообразия полугрупп W. Указывается также критерий замкнутости многообразия полугрупп W относительно раздуваний.

2°. Обозначим через W(Σ) многообразие всех полугрупп, удовлетворяющих всем тождествам совокупности тождеств Σ. Отметим, что если Σ содержит тождество $x = x$, то исключая его из совокупности Σ получим новую совокупность Σ' такую, что W(Σ) = W(Σ'). В силу сказанного, будем полагать в дальнейшем, что Σ не содержит тождество $x = x$. Если $\Sigma = \varnothing$, то будем считать, что W(Σ) совпадает с многообразием всех полугрупп $\prod$. Отметим также, что если Σ содержит тождество $x = y$, (где переменные x и y различны), то W(Σ) состоит из одной единичной полугруппы E= $\langle \{e\};\cdot\rangle$ и обозначается e.

Из определения раздувания следует, что

$$\mathrm{Ie}=\bar{\mathbf{O}} \text{ и } \mathrm{I}\prod=\prod,$$

где $\bar{\mathbf{O}}$ – многообразие всех полугрупп, удовлетворяющих тождеству $xy = zt$ и состоящему из всех полугрупп с нулевым умножением. Отсюда следует, что раздувания многообразий e и $\prod$ также являются многообразиями.