

Вопросы устойчивости волн-убийц*

Р. В. ШАМИН^{1,2}, А. В. ГОРЛЕНКО³, А. И. СМИРНОВА⁴

¹*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия*

²*Новосибирский государственный университет, Россия*

³*Московский авиационный институт*

(национальный исследовательский университет), Россия

⁴*Российский университет дружбы народов, Москва*

e-mail: roman@shamin.ru

Рассматриваются вопросы устойчивости поверхностных волн аномально большой амплитуды (волны-убийцы), возникающих в океане вследствие нелинейной динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. Показана устойчивость волн-убийц относительно внешних воздействий на свободную поверхность и возмущения начальных данных. Проанализированы критерии названных волн с точки зрения их устойчивости к малым возмущениям свободной поверхности.

Ключевые слова: волны на воде, волны-убийцы, вычислительные эксперименты.

Введение

Под волнами-убийцами авторами настоящей статьи понимаются поверхностные волны с аномально большой амплитудой. Изучение этих волн представляет собой актуальную задачу, поскольку они представляют собой серьезную опасность для судоходства и морских сооружений. Различные случаи встреч с волнами-убийцами описаны в [1–3]. Аномально большие поверхностные волны изучались во многих теоретических работах [4–9]. Обзор имеющихся подходов к изучению таких волн приведен в монографии [10].

В вычислительных экспериментах принципиальным является вопрос об устойчивости решений, описывающих волны-убийцы. Исследование устойчивости волн-убийц включает доказательство устойчивости решений, описывающих поверхностные волны на воде, и устойчивости критерия волн-убийц.

В настоящей работе моделирование указанных волн основано на численном решении уравнений, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Рассматривается плоское течение с бесконечно глубоким дном. По горизонтальной переменной принимаются 2π -периодические условия. Данные предположения являются естественными для моделирования волн-убийц. Используются уравнения в конформных переменных, описывающие нелинейную динамику таких волн. Заметим, что эти уравнения эквивалентны уравнениям Эйлера со свободной поверхностью. Идея

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-6170.2012.2, Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике” и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Договор № 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 г.).

применить конформные переменные для описания нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью впервые была предложена в [11, 12]. Уравнения в конформных переменных для численного моделирования использовались в целом ряде работ (см., например, [13–15]). В настоящей статье рассмотрен вариант этих уравнений, предложенный в [16].

1. Основные уравнения

Пусть идеальная жидкость занимает бесконечную область в переменных (x, y) , ограниченную криволинейной границей. Введём комплексную плоскость $z = x + iy$. Эту область можно (по теореме Римана) конформно отобразить на нижнюю полуплоскость с переменными $w = u + iv$. Обратное конформное отображение выражается аналитической функцией $z = z(t, w)$, которая является также функцией времени, поскольку рассматривается нестационарная задача. Зная функцию $z(t, u)$, можно восстановить профиль свободной поверхности. Для описания потенциального течения идеальной жидкости необходимо также знать потенциал скоростей. Так как потенциал является гармонической функцией, все его значения могут быть описаны значением этого потенциала лишь на границе области. Пусть $\psi(t, x)$ — значение потенциала скоростей на свободной поверхности. Соответственно через $\Psi(t, z)$ обозначим аналитическую в нижней полуплоскости функцию такую, что $\operatorname{Re} \Psi(t, x) = \psi(t, x)$. Рассмотрим функцию $\Pi(t, w) = \Psi(t, z(t, w))$, которая также будет аналитичной в нижней полуплоскости. Введём новые переменные

$$R(t, w) = \frac{1}{z'(t, w)}, \quad V(t, w) = i \frac{\Pi'(t, w)}{z'(t, w)}.$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по переменной t . Эти функции являются аналитическими в нижней полуплоскости и удовлетворяют краевым условиям

$$R(t, w) \rightarrow 1, \quad \operatorname{Im} w \rightarrow -\infty, \quad V(t, w) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im} w \rightarrow -\infty.$$

Поскольку рассматриваются поверхностные волны 2π -периодические по переменной x , то функции R и V также будут 2π -периодическими по переменной u . Тогда эти функции можно представить в виде рядов Фурье

$$R(t, w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^{-ikw}, \quad V(t, w) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) e^{-ikw}.$$

Функции R и V полностью описывают динамику поверхностных волн идеальной жидкости. При этом достаточно знать лишь значения этих функций на вещественной оси (при $v = 0$), в силу чего в дальнейшем вместо w будет рассматриваться аргумент u .

Покажем, как с помощью данных функций восстановить свободную поверхность и значение потенциала на свободной поверхности. Для функции $\frac{1}{R}$ имеет место представление

$$\frac{1}{R} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-ikw}.$$

Значения коэффициентов c_k получаются рекуррентно из соотношения

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-ikw}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^{-ikw}\right) = 1.$$

Умножением рядов получим разложение

$$-i \frac{V(t, u)}{R} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) e^{-iku}.$$

Теперь восстановим функцию $z(t, u)$ следующим образом:

$$z(t, u) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku},$$

а функцию $\Pi(t, u)$ — по формуле

$$\Pi(t, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} d_k(t) e^{-iku}.$$

Свободную поверхность получим как геометрическое место точек по правилу

$$\Gamma(t) = \{(\operatorname{Re} z(t, u), \operatorname{Im} z(t, u)) : u \in [0, 2\pi)\}.$$

Значение потенциала на свободной поверхности находится по формуле

$$\psi(t, u) = \operatorname{Re} \Pi(t, u).$$

Функции R и V удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{R}(t, u) &= i(U(t, u)R'(t, u) - U'(t, u)R(t, u)), \\ \dot{V}(t, u) &= i(U(t, u)V'(t, u) - B'(t, u)R(t, u)) + g(R(t, u) - 1), \\ 0 < t < T, \quad 0 < u < 2\pi, \\ R(t, 0) &= R(t, 2\pi), \quad V(t, 0) = V(t, 2\pi), \quad 0 < t < T, \\ R(0, u) &= R_0(u), \quad V(0, u) = V_0(u), \quad 0 < u < 2\pi. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь функции U и B вычисляются по формулам

$$U = P(V\bar{R} + \bar{V}R), \quad B = P(V\bar{V}), \quad P = \frac{1}{2}(I + iH),$$

где H — интегральный оператор Гильберта для периодических функций, который определяется формулой

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} f(u') \operatorname{ctg}\left(\frac{u' - u}{2}\right) du'.$$

В работах [17–21] установлены существование и единственность решений уравнений (1), предложены эффективные численные методы и доказана их сходимость.

2. Аппроксимация дифференциальными включениями

Уравнения (1) были получены при предположении: динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью происходит в безвоздушном пространстве. Данное предположение необходимо для вывода динамических уравнений. При этом возникают два обстоятельства: 1 — уравнения (1) невозможно решить точно, 2 — условие о том, что динамика поверхностных волн происходит в безвоздушном пространстве, является довольно сильной абстракцией, поскольку для изучения морских волн, в частности волн-убийц, необходимо учитывать внешние воздействия на свободную поверхность и случайные флуктуации свободной поверхности. Выходом из этой ситуации может стать использование дифференциальных включений. Эволюционные дифференциальные включения описывают не единственное решение, а целое семейство решений, называемое интегральной воронкой.

Для формулировки основных результатов необходимо ввести функциональные пространства, в которых будут находиться решения уравнений. Для $s \geq 0$ обозначим неограниченную область

$$Q_s = \{w = (u, v) : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < s\}.$$

Введём пространство E_s функций, аналитических в Q_s , представленных в виде $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-ikw}$ с нормой $\|f\|_{E_s}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| e^{2sk}$. Множество, в котором рассматриваются решения, обозначим через M_T^s . Это множество определяется в виде

$$A(t, u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) e^{-iku}, \quad \max_{t \in [0, T]} |a_k(t)| \leq C e^{-sk}, \\ |a_1(t)| + |a_2(t)| + \dots < 1, \quad t \in [0, T], \quad a_k \in C^2[0, T].$$

В практических вычислениях данное условие означает экспоненциальное убывание по модулю коэффициентов a_k , что является необходимым условием для эффективного проведения расчётов.

Задача в терминах дифференциального включения может быть сформулирована следующим образом. Для заданных $\varepsilon \geq 0$ и $s > 0$ найти

$$0 < T_\varepsilon \leq T, \quad R, V \in M_{T_\varepsilon}^s, \quad \delta_R, \delta_V \in L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0), \\ \|\delta_R\|_{L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)} \leq \varepsilon, \quad \|\delta_V\|_{L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)} \leq \varepsilon,$$

удовлетворяющие уравнениям

$$R_t(t, u) = i(UR_u - U_u R) + \delta_R(t, u), \\ V_t(t, u) = i(UV_u + B_u R) + g(R - 1) + \delta_V(t, u).$$

Эта задача представляет собой задачу нахождения селектора для системы дифференциальных включений

$$R_t(t, u) = B_\varepsilon(i(UR_u - U_u R)), \\ V_t(t, u) = B_\varepsilon(i(UV_u + B_u R) + g(R - 1)). \quad (2)$$

Здесь через $B_\varepsilon(\cdot)$ обозначен замкнутый шар радиуса ε в пространстве $L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)$.

Вопросы о существовании решений задачи (2), а также сходимость её решений к решениям задачи (1) рассматривались в работах [22, 23]. В нашем случае будет использоваться метод аппроксимации дифференциальными включениями для доказательства устойчивости волн-убийц.

3. Корректность определения волн-убийц

Чтобы исследовать устойчивость волн-убийц, необходимо ввести формальное определение волн-убийц. Единого определения нет. Общепринятым критерием волн-убийц является амплитудный критерий. Этот критерий формулируется на основе понятия значительной высоты волнения. Пусть в каждый момент времени имеем периодический по переменной x профиль волны $y = y(x)$ с N локальными максимумами M_i и локальными минимумами m_i . Введём величины $h_i = M_i - m_i$, которые имеют смысл высот элементарных волн. Перенумеруем $\{h_i\}_{i=1}^N$ так, чтобы высоты волн располагались в порядке убывания

$$h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_N.$$

Тогда значительная высота волнения

$$H_s = \frac{1}{[(N+2)/3]} \sum_{i=1}^{[(N+2)/3]} h_i,$$

т. е. является средней высотой трети самых высоких волн. В работе [24] рассматривались некоторые проблемы, связанные с понятием значительной высоты волнения.

Согласно амплитудному критерию, волна высотой $H_{\max}$ есть волна-убийца, если выполнено неравенство

$$\frac{H_{\max}}{H_s} > A^* = 2.1.$$

Иногда в литературе используют другие значения для критического значения A^* .

Приведённое определение не является устойчивым по отношению к малым изменениям профиля волны, что создаёт серьёзное препятствие для его использования в вычислительных экспериментах. Поэтому в [8] при расчёте вероятностей возникновения волн-убийц применён другой критерий. Чтобы сформулировать этот критерий, рассмотрим следующий функционал:

$$\nu(y) = \frac{\max_{u \in [0, 2\pi], t \in [0, T]} y(u, t)}{\frac{1}{T} \int_0^T \max_{u \in [0, 2\pi]} |y(u, t)| dt}, \quad (3)$$

определённый на множестве

$$K_a([0, 2\pi] \times [0, T]) = \{y(u, t) : y(u, t) \in C^1([0, 2\pi] \times [0, T]), \\ \mu\{(u, t) : y(u, t) \neq 0\} \geq a > 0\},$$

где μ — мера Лебега на плоскости, параметр $a > 0$ играет техническую роль.

Определение. Будем говорить, что профиль $y \in K_a$ представляет собой волну-убийцу, если

$$\nu(y) > A_\nu = 1.8.$$

Конкретное значение $A_\nu = 1.8$ было получено эмпирически после обработки большого числа вычислительных экспериментов и количественно соответствует амплитудному критерию, рассмотренному выше.

Покажем, что на множестве K_a функционал ν является непрерывным. Для этого докажем вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть $y(x) \in C[a, b]$, $y_n(x)$ — последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций, сходящаяся равномерно к $y(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{x \in [a, b]} y_n(x) = \min_{x \in [a, b]} y(x), \\ 2) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} y_n(x) = \max_{x \in [a, b]} y(x). \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $x_0 \in \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} y(x)$, $x_n \in \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} y_n(x)$.

Покажем, что $y_n(x_n) \rightarrow y(x_0)$. Предположим, что это не так. Тогда, для любого n найдется $\delta > 0$ такая, что $O_\delta(A_n) \cap O_\delta(B) = \emptyset$, где $A_n = (x_n, y_n(x_n))$, $B = (x_0, y(x_0))$ (в силу равномерной сходимости можно считать δ не зависящей от x). Обозначим $C_n = (x_n, y(x_n))$ и $D_n = (x_0, y_n(x_0))$. Поскольку $y_n \rightarrow y$, то можно принять δ такой, сколько угодно малой, что будут выполняться включения $A_n \in O_\delta(C_n)$ и $D_n \in O_\delta(B)$. Видно, что если $x_n \notin \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} y(x)$, то $y_n(x_n) > y_n(x_0)$. Следовательно, имеем противоречие. Если же $x_n \in \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} y(x)$, то $y_n(x_n) \rightarrow y(x_0)$.

Заменой y на $-y$ и y_n на $-y_n$ получаем справедливость утверждения 2. $\square$

Теорема 1. Функционал ν является непрерывным на множестве K_a .

Доказательство. Согласно лемме числитель в (3) непрерывен как композиция непрерывных. Из тех же соображений непрерывен и знаменатель. Кроме того, из определения множества $K_a([0, 2\pi] \times [0, T])$ следует, что знаменатель в (3) не обращается в нуль. Следовательно, критерий ν является непрерывным на множестве функций $K_a([0, 2\pi] \times [0, T])$. $\square$

4. Устойчивость волн-убийц

В разделе 1 был описан способ восстановления профиля поверхностной волны по значениям функции $R(u, t)$. Пусть

$$\Gamma(t) = \{(x(u, t), y(u, t)) : u \in [0, 2\pi]\} —$$

профиль, восстановленный по функции $R(u, t)$,

$$\Gamma^\varepsilon(t) = \{(x^\varepsilon(u, t), y^\varepsilon(u, t)) : u \in [0, 2\pi]\} —$$

профиль, восстановленный по функции $R^\varepsilon(u, t)$.

Покажем, что при фиксированном значении t имеем $\Gamma^\varepsilon \rightarrow \Gamma$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 2. Пусть $(R^\varepsilon, V^\varepsilon)$ — решение задачи (2), а (R, V) — решение задачи (1) при $t \in [0, T]$. Тогда при фиксированном значении $t \in [0, T]$ имеет место $|\Gamma(t) - \Gamma^\varepsilon(t)| \rightarrow 0$.

Доказательство. По определению функции $R(u, t)$

$$\frac{1}{R(u, t)} = x_u(u, t) + iy_u(u, t), \quad \frac{1}{R^\varepsilon(u, t)} = x_u^\varepsilon(u, t) + iy_u^\varepsilon(u, t).$$

Следовательно,

$$x_u(u, t) - x_u^\varepsilon(u, t) + i(y_u(u, t) - y_u^\varepsilon(u, t)) = \frac{R^\varepsilon(u, t) - R(u, t)}{R(u, t)R^\varepsilon(u, t)}.$$

Имеем оценку

$$|x_u(u, t) - x_u^\varepsilon(u, t) + i(y_u(u, t) - y_u^\varepsilon(u, t))| \leq \left| \frac{1}{R(u, t)R^\varepsilon(u, t)} \right| \cdot |R^\varepsilon(u, t) - R(u, t)|.$$

В силу того что функции R и R^ε принадлежат множеству M_T^s для всех $t \in [0, T]$ и $u \in [0, 2\pi]$,

$$\left| \frac{1}{R(u, t)R^\varepsilon(u, t)} \right| \leq c_1,$$

а по теореме 1 следует, что равномерно по t имеет место u

$$|R^\varepsilon(u, t) - R(u, t)| \rightarrow 0.$$

Таким образом,

$$|x_u(u, t) - x_u^\varepsilon(u, t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$|y_u(u, t) - y_u^\varepsilon(u, t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

поскольку

$$x(u, t) - x^\varepsilon(u, t) = \int_0^u (x_u(u, t) - x_u^\varepsilon(u, t)) du,$$

$$y(u, t) - y^\varepsilon(u, t) = \int_0^u (y_u(u, t) - y_u^\varepsilon(u, t)) du,$$

$$|x(u, t) - x^\varepsilon(u, t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$|y(u, t) - y^\varepsilon(u, t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Это означает сходимость Γ^ε к Γ . □

Теорема 3. Пусть $(R^\varepsilon, V^\varepsilon)$ — решение задачи (2), а (R, V) — решение задачи (1) при $t \in [0, T]$. Предположим, что при каждом $t \in [0, T]$ кривые $\Gamma^\varepsilon(t)$ и $\Gamma(t)$ представляют собой график функций $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$, где $\tilde{x} \in [0, 2\pi]$. Тогда, если при некотором $t^* \in [0, T]$ решение (R, V) представляет собой волну-убийцу, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ решение $(R^\varepsilon, V^\varepsilon)$ также представляет собой волну-убийцу.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $\|\tilde{y} - \tilde{y}^\varepsilon\|_{C[0, 2\pi]} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, а из теоремы 1 — $\nu(\tilde{y}) \rightarrow \nu(\tilde{y})$. Поэтому если $\nu(\tilde{y}) = A' > A^*$, то для достаточно малого ε имеет место $\nu(\tilde{y}^\varepsilon) > A^*$. □

Замечание. Теорема 3 допускает обращение. Именно, если для всех достаточно малых ε решения $(R^\varepsilon, V^\varepsilon)$ представляют собой волну-убийцу, то и решение (R, V) будет представлять собой волну-убийцу.

5. Вычислительные эксперименты

Выше показана теоретическая устойчивость волн-убийц. Рассмотрим результат вычислительных экспериментов, демонстрирующий устойчивость волн-убийц относительно внешних воздействий на поверхность волны. Для этого была проведена серия вычислительных экспериментов, в которых численно решались уравнения с начальными данными, при которых возникает волна-убийца в случае внешнего воздействия. Это воздействие имеет смысл плотности силы, действующей на свободную поверхность. Перейдем к определению случайной внешней силы, используемой в экспериментах. Пусть

рассматривается решение на отрезке $[0, T]$. Этот отрезок разбивается на одинаковые интервалы

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T,$$

где $t_{n+1} - t_n = \delta t$. Величина δt соответствует расчётному шагу по временной переменной. Пусть $\xi_X(t)$, $\xi_Y(t)$, $K(t)$ — случайные процессы, которые на интервалах $[t_n, t_{n+1})$ принимают случайные значения ξ_X , ξ_Y равномерно на отрезке $[-0.5, 0.5]$, K — дискретная случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Численно решается следующая система уравнений:

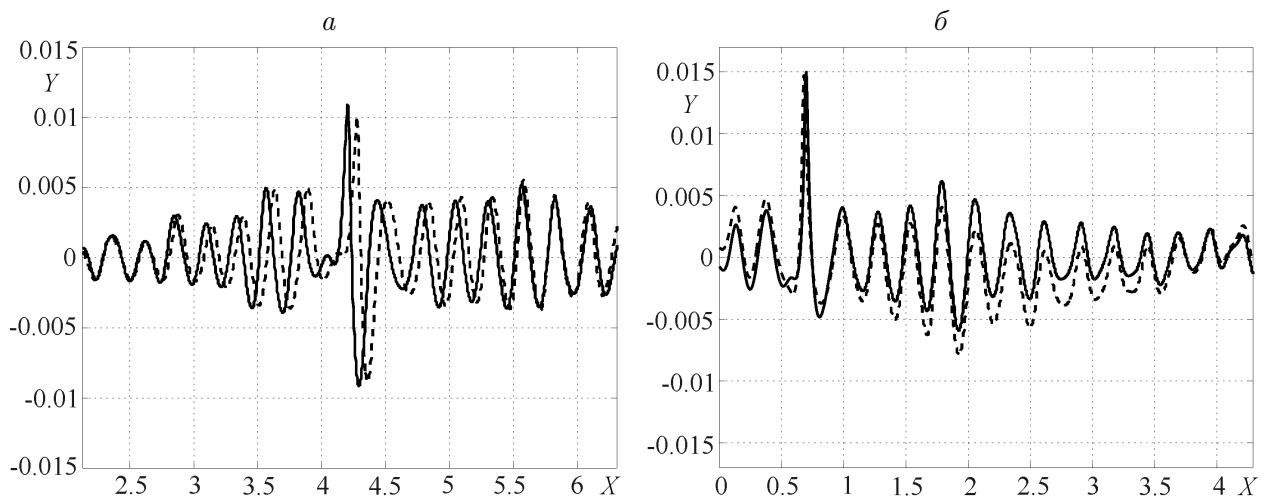
$$\begin{aligned} \dot{R}(t, u) &= i(U(t, u)R'(t, u) - U'(t, u)R(t, u)), \\ \dot{V}(t, u) &= i(U(t, u)V'(t, u) - B'(t, u)R(t, u)) + g(R(t, t) - 1) + F_X(t) + iF_Y(t), \\ 0 < t < T, \quad 0 < u < 2\pi, \\ R(t, 0) &= R(t, 2\pi), \quad V(t, 0) = V(t, 2\pi), \quad 0 < t < T, \\ R(0, u) &= R_0(u), \quad V(0, u) = V_0(u), \quad 0 < u < 2\pi. \end{aligned}$$

Здесь $F_X(t) = A\xi_X(t) \sin K(t)u$, $F_Y(t) = A\xi_Y(t) \sin K(t)u$, A — положительный параметр, равный 10^{-6} .

В каждом эксперименте рассматривались две волны: при наличии внешнего возмущения и при $F_X = 0$, $F_Y = 0$. Во всех проведённых экспериментах наблюдалась устойчивость решений, описывающих волну-убийцу. Наличие случайного внешнего воздействия практически не изменяло время возникновения волны и её форму. На рисунке, *a* показаны профили двух волн: сплошная линия соответствует волне, при расчёте которой не было внешнего воздействия, штриховая — волне при наличии внешнего возмущения (то же на рисунке, *б*).

Рассмотрим далее устойчивость решений, описывающих волны-убийцы по начальным данным. Выберем начальные условия, при которых возникает волна-убийца:

$$R(0, u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k e^{-iku}, \quad V(0, u) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e^{-iku}.$$



Устойчивость волны-убийцы при наличии внешнего возмущения (*a*) и при возмущении начальных данных (*б*)

Совместно с этими условиями будем рассматривать численное решение задачи (1) с возмущёнными условиями

$$\tilde{R}(0, u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (r_k + a\zeta_k^R e^{-\alpha k}) e^{-iku},$$

$$\tilde{V}(0, u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (v_k + a\zeta_k^V e^{-\alpha k}) e^{-iku},$$

где ζ_k^R, ζ_k^V — независимые комплекснозначные случайные величины, равномерно распределённые на единичном круге, a, α — положительные параметры. Вычислительные эксперименты показали, что решения, описывающие волны-убийцы, являются устойчивыми по начальным данным при таких возмущениях. Типичные профили исходной волны и волны, рассчитанной при возмущённых начальных данных, приведены на рисунке, б.

Авторы выражают благодарность академику В.Е. Захарову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.. Волны-убийцы: Факты, теория и моделирование. Нижний Новгород, 2004.
- [2] Дивинский Б.В., Левин Б.В., Лопатухин Л.И. и др. Аномально высокая волна в Черном море: Наблюдения и моделирование // Докл. АН. 2004. Т. 395, № 5. С. 690–695.
- [3] Лавренов И.В. Встреча с волной-убийцей // Морской флот. 1985. № 12. С. 28–30.
- [4] HENDERSON K.L., PELEGRINE D.H., DOLD J.W. Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrodinger equation // Wave Motion. 1999. Vol. 29. P. 341–361.
- [5] BATERMAN W.J.D., SWAN C., TAYLOR P.H. On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves // J. Comput. Phys. 2001. Vol. 174. P. 277–305.
- [6] CHALIKOV D. Freak waves: Their occurrence and probability // Phys. Fluids. 2009. Vol. 21, is. 7. P. 076602-1–076602-18.
- [7] DYACHENKO A.I., ZAKHAROV V.E. On the formation of freak waves on the surface of deep water // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88, вып. 5. С. 356–359.
- [8] ЗАХАРОВ В.Е., ШАМИН Р.В. О вероятности возникновения волн-убийц // Там же. 2010. Т. 91, вып. 2. С. 68–71.
- [9] Бухановский А.В., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Физика и статистика необычных морских ветровых волн // Изв. Русского географ. об-ва. 2005. Т. 137, вып. 6. С. 19–28.
- [10] KHARIF C., PELINOVSKY E., SLUNYAEV A. Rogue Waves in the Ocean. Springer, 2009. 216 p.
- [11] WHITNEY J.C. The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // Proc. Second Inter. Conf. on Numer. Fluid Dynamics (ed. M. Holt). Springer-Verlag, 1971. P. 458–462.
- [12] Овсянников Л.В. К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1973. Вып. 15. С. 104–125.

- [13] ДЬЯЧЕНКО А.И. О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. 2001. Т. 376, № 1. С. 27–29.
- [14] CHALIKOV D., SHEININ D. Modeling of extreme waves based on equations of potential flow with a free surface // J. Comput. Phys. 2005. Vol. 210. P. 247–273.
- [15] RUBAN V.P. Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // Phys. Lett. A. 2005. Vol. 340, No. 1-4. P. 194–200.
- [16] ZAKHAROV V.E., DYACHENKO A.I., VASILYEV O.A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Europ. J. Mech. B Fluids. 2002. Vol. 21. P. 283–291.
- [17] ШАМИН Р.В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 379–389.
- [18] ШАМИН Р.В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши—Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундамент. направления. 2007. Т. 21. С. 133–148.
- [19] ШАМИН Р.В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008. 133 с.
- [20] ШАМИН Р.В. Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Современная математика. Фундамент. направления. 2008. Т. 28. С. 3–144.
- [21] ШАМИН Р.В. Поверхностные волны на воде минимальной гладкости // Там же. 2010. Т. 35. С. 126–140.
- [22] ШАМИН Р.В. Описание динамики волн на воде на основе дифференциальных включений // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 4. С. 453–455.
- [23] ШАМИН Р.В. Моделирование волн-убийц на основе эволюционных дифференциальных включений // Фундамент. и прикл. гидрофизика. 2012. Т. 15, № 1.
- [24] БОУДЕН К. Физическая океанография прибрежных вод. М.: Мир, 1988.

Поступила в редакцию 29 февраля 2012 г.