УДК 512(072.3)

UDC 512(072.3)

АКСЁНОВ А.А.
доктор педагогических наук, профессор, кафедра математики и прикладных информационных технологий имени Н.А. Ильиной, Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева
E-mail: aksenovaa@inbox.ru

AKSYONOV A.A.
Doctor of pedagogical sciences, professor, Department of mathematics and applied information technologies named N.A. Ilyina, Orel State University
E-mail: aksenovaa@inbox.ru

ВИДЫ ШКОЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

VARIETYS OF TASKS OF SCHOOL MATHEMATICS

Представлен один из альтернативных концептуальных теоретических подходов к выявлению основных видов задач. Описано семь основных видов школьных математических задач. Обоснована специфика их использования в процессе обучения.

<u>Ключевые слова:</u> ***математическая задача, решение, поиск, виды задач.***

Presented an alternative conceptual theoretical approaches to the identification of the main varietys of tasks. Described seven main varietys of school mathematical tasks. The specificity of their use is grounded in the learning process.

<u>Keywords:</u> ***mathematical task, decision, search, varietys of tasks.***

Традиционно в отечественной средней школе встречается три вида задач: задачи на вычисление, задачи на доказательство и задачи на построение. Это видовое разнообразие задач основано на сути требования (как побудительного предложения), содержащегося в формулировке задачи. Ему уже более ста лет и оно по сей день не потеряло своей актуальности. Однако традиция применения в обучении задач только этих трёх видов в настоящее время требует пересмотра за счёт расширения видового спектра задач школьного курса математики, поскольку в ней могут использоваться задачи, которые явно выходят за рамки трёх указанных видов.

С одной стороны, такие задачи вполне посильны школьникам. Они разнообразят задачный материал курса математики, что может способствовать повышению интереса к предмету. С другой стороны, некоторые такие задачи уже применяются в школьной математике по крайней мере на этапе итогового контроля знаний учащихся на едином государственном экзамене. Например, это задачи, условие которых задано в основном визуально – графиком функции (или её производной), и в них необходимо описать некоторые особенности поведения этой функции. Очевидно, такая задача явно не относится ни к одному из трёх указанных ранее видов. Кроме того, в целом ряде публикаций учёные методисты–математики и учителя математики указывают на задачи, которые по своей сути (обусловленной требованием в их формулировке) предполагают выполнение исследования, и называют их задачами на исследование, то есть предлагают и сам термин (таковыми являются практически все задачи с параметрами и др.). В частности, задачи на построение в качестве подзадачи содержат исследовательскую задачу (точнее, подзадачу, соответствующую четвёртому этапу решения задач на построение), поэтому появление такого самостоятельного вида задач, как задачи на исследование, вполне правомерно.

Таким образом, запрос на расширение видового спектра задач школьного курса математики сформировался уже давно. Поэтому в настоящее время вполне актуальной является проблема выявления основных видов задач школьного курса математики. Для того чтобы установить меру расширения имеющегося спектра видов задач необходимо выбрать основу и критерий. В качестве основы в настоящей статье предлагается теоретический подход к описанию школьных математических задач, а критерием вполне может служить методическая целесообразность расширения их видового многообразия, которая базируется на отечественном методическом опыте применения задач в обучении школьников на уроках математики и внеурочных занятиях любой их разновидности, в общеобразовательных, математических специализированных и профильных школах и классах.

Заметим, что в отечественной средней школе отношение математических задач к тому или иному виду определялось только сутью требования в них. В частности, если в геометрической задаче требуется что-либо вычислить, она относится к виду задач на вычисление вне зависимости от того, что в процессе её решения, возможно, будет необходимо главным образом доказывать что-либо и выполнять некоторые дополнительные построения, а не вычислять. Аналогичные ситуации возможны и для задач на доказательство, и для задач на построение (в них третий и четвёртый этапы решения являются собственно доказательством и исследованием). Поэтому расширяя видовой спектр задач, будем считать, что отношение задачи к тому или иному виду определяется только сутью требования, содержащегося в её формулировке.

Теоретическое обоснование такой характеристики школьных математических задач, как их отношение к данному виду, требует того чтобы она была диалектически выведена из некоторого конструктивного основания теории (задач), частью которой эта характеристика должна стать впоследствии. С этой целью будем опираться на трактовку категории «задача», предложенную Ю.М. Колягиным [2, 3], дополненную В.И. Крупичем [4] и скорректированную с учётом исследований А.В. Брушлинского [1].

В образовании «человек–задачная система» задача как сложный объект представлена диалектическим единством информационной структуры, которая фактически является формой её представления субъекту, и внутренней структуры, выявляемой в задаче на основе осмысления основного отношения в ней, – отношения между условием и искомым, которое находится на верхнем уровне иерархии в системе отношений, реализованных в задаче, и управляет процессом поиска её решения [4].

Информационную структуру любой задачи можно рассматривать как систему S = (A, B, E, C, D, R), замкнутую в том смысле, что все её компоненты могут быть определены в системе «человек–задачная система». Смысл этих компонентов следующий.

А – условие (условия) задачи, то есть данные и отношения между ними.

В – требование задачи, то есть то, что нужно сделать в данной задаче (выражается вопросом или побудительным предложением).

Е – искомое в задаче, то есть то, что в ней требуется найти, доказать или выяснить.

С – базис решения задачи (теоретическая и практическая основа, с помощью которой обосновывается решение).

D – способ, определяющий процесс решения задачи, то есть способ действия по преобразованию условия (условий) задачи для выполнения требования.

R – основное отношение в отношениях между данным и искомым в задаче.

Исследуем теоретико-методические характеристики задач, обусловленные сущностью компонента В их информационной структуры, представляющего собой требование (руководство к действию или побудительное предложение), и частично компонента Е (это необходимо потому, что требование формулируется по отношению к искомому). Очевидно, компонент В является частью формулировки любой задачи.

Как указывалось в начале статьи, разграничивать виды задач будем только на основе сути их требования. Будем считать, что задачи относятся к одному ***виду задач***, если в их формулировках одинаковые требования, понимаемые как побудительное предложение или руководство к действию. Речь идёт о логической одинаковости требований, их побудительном смысле, но сами они могу быть выражены синонимичными словосочетаниями (например, слово “доказать” заменено словосочетанием “строго обосновать” и т. п.). Данная информация заложена в компоненте В информационной структуры задачи. Выявим основные виды школьных математических задач.

В первую очередь заметим, что можно решать составленные кем-либо задачи, или самостоятельно составлять их. Составление задач – отдельный случай, к нему вернёмся чуть позже. Рассмотрим процедуру решения задач.

Все задачи школьного курса математики можно разделить на две большие принципиально разные части: задачи, которые можно решить приведением конкретного примера (или контрпримера); задачи, которые таким образом решить невозможно (поиск их решения нужно выполнять традиционно). Первая часть составляет отдельный вид задач, решаемых приведением конкретного примера или контрпримера**.**

Задачи второй части также можно разделить на две группы по принципу известности искомого в них. Известно оно только в задачах на доказательство, поскольку в формулировке задачи чётко указано, какой факт требует доказательства “в общем виде” (он и является искомым). Эти задачи составят первую группу.

Во вторую группу войдут задачи, в которых искомое неизвестно. Если в школьных математических задачах искомое изначально неизвестно, после своего нахождения оно может быть в конечном счёте представлено тремя принципиально разными вариантами: а) только посредством его визуализации (с помощью чертежей, рисунков, графиков и т. п.); б) только с помощью словесного описания; в) любыми способами, не совпадающими с первыми двумя.

Если в задаче искомое представляется только посредством визуализации, эта задача относится к виду задач на построение. Ещё раз отметим, что в задачах на построение искомое неизвестно. Если, например, требуется построить ромб, то искомым в такой задаче является, конечно, не наименование фигуры (оно известно), а конкретное её положение на плоскости. Разумеется, оно неизвестно.

В случае, когда искомое в задаче может быть представлено только словесным описанием, эта задача относится к виду задач, решаемых посредством словесного описания (конечно, в этом описании могут использоваться и числа, поскольку факт их наличия не меняет сущности этих задач). Такое название для данного вида задач вполне правомерно, так как если в принципе нет возможности изложить искомое в них никаким другим способом, кроме словесного описания, это может быть только следствием того, что и сам процесс их решения выполнялся этим же способом. В противном случае, очевидно, была бы возможность представить искомое как-либо иначе.

Рассмотрим все остальные задачи. В них искомое неизвестно, их также можно разделить двояко: *задачи, в которых предметное содержание искомого (после его нахождения) фиксируется безотносительно к тому, при каких условиях оно существует; все остальные задачи* (для которых характерна противоположная ситуация, то есть искомое, удовлетворяющее требованию задачи, в ответе указывается вместе с условиями своего существования). Первые задачи – это задачи на нахождение, вторые – задачи на исследование. Очевидно, эти виды задач принципиально различны.

Замечание. В настоящей статье используется термин задачи на нахождение, а не задачи на вычисление потому, что во многих таких задачах искомое не представлено конкретным числом. Оно может быть представлено и буквенным выражением, которое в конечном счёте было найдено, зачастую довольно громоздким и неупрощаемым далее. Поэтому и предложен термин задачи на нахождение с целью обобщения в один вид всех задач, в которых суть требования одна и та же, но представление искомого немного различается.

Вернёмся к составлению задач. В предельно общем случае здесь неправомерно вести речь об отдельном виде задач, поскольку может быть составлена задача любого вида, выявленного выше. Школьникам можно предложить составлять задачи, не давая им никаких указаний относительно их условия, требования, теоретического базиса, способа решения и основного отношения, реализуемого в них. Однако если школьникам дано задание – составить задачу, и указаны какие-либо ориентиры для её составления, фактически для них сформулирована задача, а вся совокупность указанных в ней ориентиров является условием этой задачи. Её требование состоит в том, чтобы на основе данных условия сформулировать некоторую задачу, причём условие этой задачи является искомым для той задачи, которая изначально дана школьникам. Такие задачи назовём конструктивными. Такова задача: “Составить логарифмическое уравнение, корни которого – натуральные числа, причём оно должно решаться методом замены неизвестного, а корнями промежуточного квадратного уравнения также должны быть натуральные числа”. Уравнение вполне может быть одним из возможных решений этой задачи. Такие задачи рассматриваются как частный, но особый случай составления задач учащимися. Поскольку в методике обучения математике уже утвердилось мнение о том, что составление задач – один из важнейших ресурсов обучения школьников, что справедливость выделения в отдельный вид конструктивных задач правомерна.

Итак, получено семь основных видов школьных математических задач (обозначим эти виды задач через $В_1$, $В_2$, $В_3$, $В_4$, $В_5$, $В_6$, $В_7$):

а) задачи на нахождение (а также и вычисление) ($В_1$);

б) задачи на доказательство ($В_2$);

в) задачи на построение (в том числе и построение графиков) ($В_3$);

г) задачи на исследование ($В_4$);

д) конструктивные задачи ($В_5$);

е) задачи, решаемые приведением конкретного примера или контрпримера ($В_6$);

ж) задачи, решаемые посредством словесного описания ($В_7$).

Выявление этих семи видов задач выполнялось с учётом логического закона исключённого третьего. В частности, с помощью этого закона было рассмотрено: а) решение задач и их составление; б) два принципиально разных взаимоисключающих подхода к выполнению решения задач – решение задач приведением конкретного примера и так называемое традиционное решение задач. Кроме того, в ходе выявления основных видов школьных математических задач было учтено, что в процессе их решения выполняется только четыре разновидности действий: вычисление, доказательство, визуализация фигур (геометрических или графиков функций), словесное описание фактов или процессов. Перечисленные факторы позволяют утверждать, что выше выделены все основные виды школьных математических задач.

Заметим, что для задач вида $В_1$ искомым является то, что нужно найти (в частности, вычислить). Для задач вида $В_2$ искомым будет то, что требуется доказать (в задачах на доказательство искомое известно). Для задач вида $В_3$ искомым является то, что требуется построить (то есть все данные, необходимые для построения фигур и само изображение фигур или графиков). Для задач вида $В_4$ под искомым понимаются некоторые факты и одновременно с ними те условия, при которых эти факты существуют (или не существуют). Для задач вида $В_5$ искомым считается условие составляемой задачи. Для задач вида $В_6$ искомым является предметное содержание той задачи, которая играет роль конкретного примера или контрпримера, посредством которого решается задача вида $В_6$. Для задач вида $В_7$ искомым является смысловая нагрузка словесного описания результатов её решения.

Выявление этих семи видов задач основано на диалектической взаимосвязи требования и искомого в задаче (поскольку требование всегда формулируется по отношению к искомому), но в самом требовании практически в полной мере содержатся отличительные особенности задач каждого вида. Обоснуем это утверждение.

Задачи на нахождение таковы, что в них нужно только получить требуемый результат по сути вычислительного характера, не указывая никаких условий, для которых он имеет место. Напомним, что он не обязательно должен быть выражен конкретным числом. Он может быть представлен, например, выражением с переменными (, и т. п.), являющимся результатом упрощения какого-либо сложного выражения.

Задачи на доказательство таковы, что в них в явном виде сформулированы требование и искомое (искомое известно). В требовании указано то, что надо доказать, и речь идёт о доказательстве, выполняемом в “общем виде”.

Задачи на построение в алгебре связаны с построением (и преобразованием) графиков функций. В задачах этого вида (и алгебраических, и геометрических) почти всегда в явном виде указано то, что требуется построить. Однако заметим, что в ряде задач (обычно в курсе алгебры), в которых нет необходимости безукоризненно чёткого представления графика функции, а достаточно его схематической визуализации, слово построить может быть заменено словом изобразить или другим его синонимом, но побудительный смысл требования по своей сути остаётся прежним.

Задачи на исследование отличаются тем, что в них требуется: а) найти условия существования (или невозможности существования) некоего факта; б) указать сам факт и условия его существования; в) определить особенности существования (свойства и качества) какого-либо математического объекта для некоторых условий, возможно, и сами эти условия; г) выяснить, обладает ли данный объект указанными качествами (свойствами), причём здесь выдвигаются и исследуются альтернативные гипотезы, и по результатам этой работы делается вывод; д) выяснить, какие качества (свойства) характерны для данного объекта, в случае необходимости указать условия, для которых эти качества имеют место и т. п. Примером является любое уравнение с параметром.

Конструктивные задачи таковы, что в них всегда требуется составить задачу на основе некоторых ориентировочных указаний, которые фактически представляют собой условие данной конструктивной задачи.

Задачи, решаемые приведением конкретного примера или контрпримера, имеют главный характерный признак – в требовании явно содержатся (с точностью до редакции) две альтернативных возможности, как, например, в задаче: “Могут ли противоположные боковые грани четырёхугольной пирамиды быть перпендикулярны её основанию?”. Однако наличие этого признака в формулировке не может в полной мере гарантировать того, что данная задача относится к виду задач, решаемых приведением конкретного примера (или контрпримера), что подтверждает задача: “Равносильны ли уравнения и ?”, относящаяся к виду задач на доказательство. Часть задач, относящихся к шестому виду, может быть решена и “в общем виде”, то есть их можно отнести к задачам на доказательство, но только ***после*** соответствующей переформулировки (как в задаче о боковых гранях четырёхугольной пирамиды).

Во избежание противоречий, согласимся считать, что только к шестому виду *относятся* все *задачи, которые могут быть решены приведением конкретного примера или* контрпримера *вне зависимости от того, существует ли решение этой задачи “в общем виде” (то есть как задачи на доказательство) или нет.* Это в полной мере оправдано тем, что данная классификация задач выполняется в контексте обучения школьников общему умению работать над ними, и здесь на передний план выступает целесообразность включения тех или иных задач, в том числе и решаемых приведением конкретного примера или контрпримера, в процесс обучения.

Задачи, решаемые посредством словесного описания, таковы, что в них необходимо считывать заданную информацию, или указывать смысл этой информации и т. п. Разумеется, в их требовании в той или иной редакции задано подобное указание к действию. Например, среди нескольких изображённых на рисунках фигур требуется указать четырёхугольники, или остроугольные треугольники, или назвать номера рисунков, на которых изображены убывающие функции и т. п.

Таким образом, в предельно общем случае требование задачи однозначно соотносит данную задачу с тем или иным видом задач только с учётом возможности его выполнения, характерной для задач данного вида, а сама принадлежность задачи к какому-либо виду определяется только этим обстоятельством**.**

Обратим внимание на особенности редакции требований в школьных математических задачах. В школьном обучении математике существует ряд традиций, которые следует учитывать, осмысливая суть требования для соотнесения данной задачи с тем или иным видом задач. Рассмотрим задачу построения графика функции с использованием средств дифференциального исчисления. Чаще всего требование в этих задачах сформулировано кратко: “Построить график функции”. Однако это задача не на построение, а на исследование, поскольку полная редакция требования в ней такова: “Исследовать функцию и построить её график”. В задачах по решению уравнений требование может быть сформулировано так: “Решить уравнение”. Однако нельзя исключать контекст всей формулировки подобной задачи в процессе определения её вида. Если дано, например, квадратное уравнение, речь идёт о задаче на вычисление, но если дано уравнение с параметром, – это задача на исследование и полная редакция её требования следующая: “В зависимости от значений параметра вычислить корни уравнения”. В последней редакции прослеживается необходимость указания условий, для которых корни имеют место и некоторым образом выражаются через параметр. Конечно, может случиться и так, что для всех значений параметра корнем будет только одно конкретное число (то есть как в задачах на вычисление), но это лишь частный случай для записи искомого, а смысл требования в задаче относит её к задачам на исследование.

Таким образом, определяя вид задачи, необходимо принимать во внимание не особенности редакции её требования, а его смысл, устанавливая который, во многих случаях следует учитывать традиционные для школьных математических задач речевые обороты, используемые в её формулировании.

Замечание. В задачах на доказательство требование всегда сформулировано в явном виде. Оставшаяся часть формулировки – это искомое и условие. Следовательно, задачи с неявно заданным условием и требованием могут относиться только к остальным шести видам школьных математических задач. Также напомним, что в задачах на доказательство всегда известно искомое, а в задачах всех других видов оно неизвестно. То есть известность искомого и чёткое разграничение в формулировке задачи условия и требования – отличительная черта задач на доказательство.

Если обособленно рассматривать только искомое, можно исходить лишь из двух факторов: известность или неизвестность искомого; форма представления искомого после его нахождения, в которой заключена суть искомого. Первый фактор позволяет выделить задачи на доказательство из всех их видов, второй фактор отражён в задачах остальных шести видов (в предельно общем случае для каждого из этих видов искомое представляется в форме, отличной от формы всех остальных видов). Нахождение искомого всегда является следствием процесса решения задачи, и в этом смысле – его заключительным этапом, поэтому, во-первых, для него можно выделить только эти два фактора, во-вторых, выявление других теоретико-методических характеристик задач на основе обособленного исследования искомого в них не представляется возможным.

Выше выделены семь основных, принципиально отличных друг от друга видов задач. Разумеется, среди них можно выделять подвиды задач. Например, среди задач на доказательство можно выделить те, в которых доказательство производится методом от противного и др. Из числа задач на нахождение можно выделить такие подвиды: сюжетные задачи; задачи на преобразование выражений; уравнения, неравенства и их системы и др. Школьникам нужно в принципе понимать, что следует делать в решении данной задачи. Поэтому нецелесообразно расширять перечень их видов посредством включения в него подвидов задач на правах полноценных обособленных видов. Это может привести лишь к неоправданному увеличению объёма сведений, которые им надо знать о теоретико-методических характеристиках школьных математических задач.

Итак, в научном описании отношения задач к тому или иному виду используются два компонента их информационной структуры: требование (компонент B) и искомое (компонент E). Процесс выявления основных видов задач основан на диалектической взаимосвязи требования и искомого.

Теперь исследуем проблему применения задач семи основных видов в обучении школьников математике.

Первый и наиболее распространённый в современной средней школе вид задач – задачи на нахождение (B_1). Это первые задачи, с которыми встречаются учащиеся ещё в начальных классах. Поэтому основная специфическая особенность их применения в обучении состоит в том, что на примере этих задач школьники осмысливают почти все конструктивные особенности математической задачи как таковой: формулировку со всеми её компонентами и процесс решения со всеми его общими закономерностями. Также важным отличием задач на нахождение является их возможность принимать все значения трудности и сложности – от низкого до высокого. Этот фактор должен найти своё отражение в составлении систем задач по изучаемой школьниками теме, в которой могут быть использованы задачи на нахождение в самых различных аспектах: в качестве задач на освоение материала; в качестве наиболее часто употребляемых задач на применение материала; в качестве нетривиальных задач, задействованных в обучении собственно поиску решения задач.

Вторым, тоже довольно распространённым видом задач, являются задачи на доказательство (B_2). У них три основных особенности: известность искомого; систематическое использование в обучении школьников, начиная с 13-ти летнего возраста; возможность применения для освоения материала, его применения и для обучения поиску решения задач. Первая особенность прежде всего показательна в плане знакомства учащихся с задачами, искомое в которых известно. Кроме того, известность искомого является ориентиром в выборе стратегии поиска решения для нетривиальных задач на доказательство, поскольку субъект знает, к чему следует стремиться в конечном счёте. Учащиеся обычно осознают важность этого фактора, так как нередко сами отмечают, что знание ответа (то есть, искомого) в задаче (например, на нахождение) часто помогает найти путь к решению задачи. Вторая особенность связана с психофизиологическими закономерностями развития человека. Однако заметим, что в курсе алгебры (и основ математического анализа в специализированных математических классах) доля задач на доказательство в их общем массиве явно занижена, причём в наибольшей степени это негативно сказывается на обучении математически способных учащихся. Обучая таких школьников (обычно в профильных или специализированных математических классах), долю задач на доказательство следует увеличить. Суть третьей особенности реализуется в процессе обучения так же, как и для задач на нахождение.

Третьим видом школьных математических задач являются задачи на построение (B_3). В данной статье к ним отнесены и задачи на построение графиков элементарными методами (без использования аппарата производной). Первая их особенность заключается в том, что искомое выражается сугубо графическими визуальными средствами и суть искомого состоит не в осмыслении того, какой объект нужно построить, а в том, чтобы указать на плоскости или в пространстве геометрическое место точек, составляющих данный объект. Этот факт следует донести до сознания школьников в контексте понимания сущности задач на построение как таковых. Все другие перечисленные ниже особенности характерны только для геометрических задач на построение. В частности, вторая особенность заключена в необходимости использования специальных инструментов для решения задачи. В современной школе на уроках математики ими являются только односторонняя линейка без шкалы и циркуль. Однако существует целый набор другого инструментария для решения задач на построение: двусторонняя линейка без шкалы, односторонняя линейка со шкалой и т. д. Разумеется, эти инструменты предназначены для решения тех задач на построение, которые не могут быть решены с помощью традиционных школьных инструментов. Такие задачи можно предложить наиболее способным школьникам, например, на внеурочных математических занятиях. В любом случае учащиеся сначала должны овладеть элементарными навыками работы с циркулем и линейкой в процессе решения базовых задач из числа задач на построение (деление отрезка пополам, нахождение геометрических мест точек и т. п.). Третья особенность геометрических задач на построение – наличие четырёх обязательных этапов их решения: анализ; построение; доказательство; исследование.

Четвёртый вид – задачи на исследование (B_4). Они практически все довольно трудны, это одна из главных их особенностей. Эти задачи редко применяются в школьном обучении математике. В общеобразовательных классах это объясняется ограниченностью временного ресурса и избыточной трудностью этих задач для основной массы учащихся таких классов. В специализированных и профильных математических школах или классах такие задачи также используются нечасто. Причиной тому, видимо, является отсутствие соответствующей традиции, поскольку нетривиальные задачи, предлагаемые учащимся таких классов, могут быть найдены и среди трёх рассмотренных выше видов задач. Обычно в специализированных классах этот вид представляют так называемые задачи с параметрами. Заметим, что довольно трудно составить задачу на исследование, не содержащую параметр (за исключением задач, в которых требуется исследовать функцию средствами дифференциального исчисления), тем не менее, это возможно. Вполне логичным представляется и предложение в специализированных и профильных математических классах увеличить долю задач на исследование в общем задачном массиве (то есть ввести соответствующую традицию). Вторая особенность задач на исследование заключена в самой их сущности: в процессе решения необходимо выдвигать и проверять альтернативные гипотезы. Следствием этого является третья особенность – дифференцированное представление искомого: для одних условий – одно значение искомого, для других условий – другое значение и т. п. Таким образом, специфика применения в обучении таких задач состоит в следующем. Во-первых, эти задачи надо предлагать только математически способным учащимся (на уроках или внеурочных занятиях). Во-вторых, задачи на исследование должны чаще использоваться в обучении школьников из специализированных и профильных математических школ или классов. В-третьих, в системе задач по данной теме эти задачи логично располагать в конце системы. В-четвёртых, систематическое использование этих задач следует реализовывать с учащимися не ранее, чем с 14-15 летнего возраста. Разумеется, специфику задач этого вида школьникам нужно продемонстрировать на конкретных примерах, разъясняя их отличие от задач на нахождение и задач на доказательство.

Пятый, редко применяемый в обучении вид задач – конструктивные задачи (B_5). В данном случае это объясняется их спецификой. Такие задачи следует предлагать школьникам для повышения интереса к математике, внесения некоторого разнообразия в учебный процесс. В дидактическом плане они обладают большинством значимых характеристик, свойственных процессу составления задач школьниками. Отметим, что применять в обучении конструктивные задачи нужно всегда, когда для этого есть временной ресурс. Задачи этого вида вряд ли можно назвать основополагающими в плане обучения умению работать над задачей, поэтому использование их в учебном процессе не должно выполняться в ущерб использованию задач первых четырёх видов.

Шестой вид задач – задачи, решаемые приведением конкретного примера или контрпримера (B_6). Они также редко применяются на уроках математики. Иногда эти задачи встречаются на математических олимпиадах. Они вполне могут использоваться в ходе изучения нового теоретического материала или сразу после его изложения как средство практической проверки глубины понимания изученного. Также они могут применяться для повышения интереса к предмету и внесения большего разнообразия в учебный процесс. Часть таких задач вполне посильна даже младшеклассникам и может применяться в урочном обучении математике. К таковым относится задача: «можно ли представить число 100 четырьмя (или шестью) девятками?». Наиболее трудные из этих задач могут быть задействованы для массовых математических олимпиад (например, школьных, районных), внеурочной работы с математически способными учащимися, в качестве необязательного домашнего задания и т. п. Разумеется, применение в обучении задач, решаемых приведением конкретного примера или контрпримера, не должно выполняться в ущерб использованию задач первых четырёх видов.

Седьмой вид задач – задачи, решаемые посредством словесного описания (B_7). Решение этих задач помогает учащимся глубже понять суть изучаемого теоретического материала, позволяет актуализировать в сознании изученную ранее информацию. Поэтому применять такие задачи нужно непосредственно в процессе освоения новой теории или сразу после её изложения, а также перед решением некоторого набора задач с целью восстановления в памяти тех фактов, которые могут пригодиться в ходе решения. Разумеется, задачи этого вида вряд ли можно назвать основными в плане обучения школьников общему умению работать над математической задачей, но исключать их из рассмотрения нецелесообразно. То есть их нужно использовать всякий раз, когда предоставляется такая возможность. Важным аргументом в пользу этого тезиса является тот факт, что визуальные средства, фактически являющиеся условием таких задач, предоставляются школьникам заранее, а решаются такие задачи обычно устно, следовательно, задействование в обучении задач седьмого вида не требует значительных затрат времени.

Завершая изложение исследуемой проблемы отметим, что задачи первых четырёх видов являются основными в плане формирования у школьников общего умения работать над математической задачей. В частности, задачи на исследование (B_4) могут применяться фактически только для целенаправленного обучения школьников собственно логическому поиску решения задач. Задачи седьмого вида к таковым не относятся, но их целесообразно применять в ходе изучения любой темы школьного курса математики. Задачи пятого и шестого видов на уроках математики могут быть использованы фактически только в случае наличия свободного учебного времени, однако для поддержания интереса к предмету в контексте личностно-ориентированного обучения школьников целесообразно включать эти задачи в учебный процесс, по крайней мере, в качестве индивидуальных заданий для математически способных школьников или на внеурочных занятиях и т. п.

Также заметим, что решение задач всех семи основных видов создаёт предпосылки для овладения школьниками целым рядом коммуникативных компетенций, связанных с формированием у них общего умения работать над математическим задачами. Это, в свою очередь, является основой формирования коммуникативных компетенций в обучении математике вообще, а кроме того, создаёт базис для дальнейшего их формирования у студентов вузов. Справедливость этого тезиса основана на том, что обучение решению задач является главной составляющей обучения математике как в средней школе, так и в вузе.

Таким образом, расширение видового спектра школьных математических задач приводит к следующему общему выводу. Всего методически целесообразно выделить семь основных видов школьных математических задач. Использование этих видов задач требует не только уровневой, но и профильной дифференциации обучения математике. В обучении школьников в специализированных или профильных математических школах или классах методически целесообразно применять все семь видов задач, поскольку это позволяет и временной ресурс, и математические способности учащихся. Поэтому можно утверждать, что расширение видового многообразия школьных математических задач должно привести к некоторым локальным изменениям (точнее – усовершенствованиям) традиций отечественного школьного обучения математике.

Библиографический список:
1. *Брушлинский А.В.* Психология мышления и кибернетика. М.: Мысль, 1970. 202 с.
2. *Колягин Ю.М.* Задачи в обучении математике. Ч. I. М.: Просвещение, 1977. 110 с.
3. *Колягин Ю.М.* Задачи в обучении математике. Ч. II. М.: Просвещение, 1977. 144 с.
4. *Крупич В.И.* Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. Монография. М.: Прометей, 1995. 166 с.

References
1. *Brushlinsky A.V.* Psychology of thinking and cybernetics. M.: Mysl, 1970. 202 p.
2. *Kolyagin Y.M.* Problems in teaching mathematics. P. I. M.: Prosvjashenie, 1977. 110 p.
3. *Kolyagin Y.M.* Problems in teaching mathematics. P. II. M.: Prosvjashenie, 1977. 144 p.
4. *Krupich V.I.* Theoretical bases of teaching solution of school mathematical problems. M.: Prometheus, 1995. 166 ps.