

УДК 517.514

ВЕКТОРНЫЕ ОДНОСВЯЗНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

К.С. КОРЧИЦ, В.С. МУХА

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь**Поступила в редакцию 19 сентября 2003*

Математический аппарат цепей Маркова находит применение в различных областях знаний. Наибольшее развитие получили одномерные цепи Маркова, т.е. случай, когда исследуемая система характеризуется скалярной величиной. Анализ одномерной односвязной цепи Маркова осуществляется с помощью матрицы вероятностей перехода цепи. Анализ усложняется в случае многосвязной цепи Маркова. В связи с этим в работе [1] была предпринята попытка использовать для анализа многосвязных одномерных цепей Маркова аппарат многомерных матриц [2]. Этот же аппарат можно успешно применить для анализа векторных односвязных цепей Маркова, теория которых в настоящее время отсутствует в литературе. Данная работа посвящена решению этого вопроса.

Ключевые слова: цепи Маркова, уравнение Чэпмена–Колмогорова, случайная последовательность, матрицы вероятностей.

Скалярная односвязная цепь Маркова

Пусть $\xi(s)$, $s = 0, 1, 2, \dots$, — дискретная скалярная случайная последовательность или, иначе, скалярный случайный процесс с дискретным множеством значений (состояний) $E = (e_i)$, $i = \overline{1, k}$, и дискретным временем $T = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_s, \dots\}$. Как известно [3], такой процесс называется однородной цепью Маркова, если он полностью определяется матрицей вероятностей перехода за один шаг $P = (p_{i,j})$, $i, j = \overline{1, k}$, и вектором вероятностей состояний в начальный момент времени $A(0) = (a_i(0))$, $i = \overline{1, k}$, не зависящими от момента времени s . В дальнейшем будем рассматривать только однородные цепи Маркова. Для матрицы вероятностей перехода за n шагов $P(n) = (p_{i,j}(n))$, $i, j = \overline{1, k}$, справедливо уравнение Чэпмена–Колмогорова:

$$P(n) = P(m)P(n-m) = PP(n-1) = P^n, \quad (1)$$

а для вектора безусловных вероятностей в n -й момент времени (на n -м шаге) $A(n) = (a_i(n))$, $i = \overline{1, k}$, — уравнение

$$A(n) = A(0)P(n) = A(0)P^n. \quad (2)$$

Векторная односвязная цепь Маркова

Пусть теперь $\bar{\xi}(s) = (\xi_i(s))$, $i = \overline{1, q}$, $s = 0, 1, 2, \dots$, — дискретная векторная случайная последовательность или, иначе, векторный случайный процесс с дискретным множеством значений (состояний) и дискретным временем. Каждая i -я компонента $\xi_i(s)$ этого вектора может принимать различное число значений, так что множество состояний описывается совокупностью

$$E = (e_{i, j_i}), \quad i = \overline{1, q}, \quad j_i = \overline{1, k_i}.$$

Это множество представляет собой матрицу из q строк, и строки имеют различное число элементов.

Вероятности возможных значений процесса на s -м шаге будем обозначать как

$$A(s) = P(\xi_1(s) = e_{1, i_1}, \xi_2(s) = e_{2, i_2}, \dots, \xi_q(s) = e_{q, i_q}) = (a_{i_1, i_2, \dots, i_q}(s)),$$

$$i_1 = \overline{1, k_1}, \quad i_2 = \overline{1, k_2}, \quad \dots, \quad i_q = \overline{1, k_q}.$$

Это q -мерная гиперпрямоугольная матрица размером $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_q$. Для упрощения обозначений введем понятие мультииндекса $i = (i_1, i_2, \dots, i_q)$. Тогда матрицу безусловных вероятностей $A(s)$ можно обозначать аналогично скалярной односвязной цепи Маркова в виде

$$A(s) = (a_i(s)). \quad (3)$$

Сумма элементов этой матрицы должна равняться единице, т.е.

$$\sum_i a_i(s) = {}^q A(s) = 1.$$

Здесь ${}^q A(s)$ обозначена q -свернутая матрица для $A(s)$ [2].

Вероятности перехода цепи за один шаг сведем в матрицу вероятностей перехода

$$\begin{aligned} P &= P(\xi_1(s) = e_{1, j_1}, \dots, \xi_q(s) = e_{q, j_q} / \xi_1(s-1) = e_{1, i_1}, \dots, \xi_q(s-1) = e_{q, i_q}) = \\ &= (p_{i_1, i_2, \dots, i_q, j_1, j_2, \dots, j_q}), \\ i_1, j_1 &= \overline{1, k_1}, \quad i_2, j_2 = \overline{1, k_2}, \quad \dots, \quad i_q, j_q = \overline{1, k_q}. \end{aligned}$$

Это $2q$ -мерная матрица размером $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_q \times k_1 \times k_2 \times \dots \times k_q$. Если рассматривать q -мультииндексы $i = (i_1, i_2, \dots, i_q)$, $j = (j_1, j_2, \dots, j_q)$, то матрицу вероятностей перехода за один шаг также можно обозначить аналогично скалярной односвязной цепи Маркова в виде $P = (p_{i, j})$. Матрица перехода P обладает свойством

$$\sum_j p_{i, j} = 1 \quad \forall i,$$

или в матричной форме

$$\left(\sum_j p_{i, j} \right) = {}^q P = (1_i),$$

где (1_i) — q -мерная матрица размером $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_q$, все элементы которой равны 1, а ${}^q P$ обозначена q -свернутая матрица для P [2].

Аналогично матрице вероятностей перехода за один шаг определим матрицу вероятностей перехода за n шагов

$$P(n) = P(\xi_1(s) = e_{1,j_1}, \dots, \xi_q(s) = e_{q,j_q} / \xi_1(s-n) = e_{1,i_1}, \dots, \xi_q(s-n) = e_{q,i_q}) =$$

$$= (p_{i_1, j_1, \dots, i_q, j_q}(n)) = (p_{i,j}(n)), \quad s > n,$$

$$i_1, j_1 = \overline{1, k_1}, \quad i_2, j_2 = \overline{1, k_2}, \quad \dots, \quad i_q, j_q = \overline{1, k_q},$$

ясно, что $P(1) = P$ i, j — q -мультииндексы. По определению примем, что

$$P(0) = E(0, q), \quad (4)$$

где $E(0, q)$ — $(0, q)$ -единичная матрица [2], поскольку за 0 шагов система с вероятностью 1 останется в прежнем состоянии. Матрица вероятностей перехода за n шагов обладает теми же свойствами, что и матрица вероятностей перехода за один шаг. Кроме того, по формуле полной вероятности можно получить уравнение Чэпмена–Колмогорова

$$P(n) = (p_{i,j}(n)) = \left(\sum_{\mu} p_{i,\mu}(m) p_{\mu,j}(n-m) \right) = {}^{0,q}(P(m)P(n-m)) = {}^{0,q}P^n, \quad n \geq m.$$

В частности, при $m=1$ получаем

$$P(n) = {}^{0,q}(P(1)P(n-1)). \quad (5)$$

С учетом свойства (4) это уравнение справедливо и при $n=1$, поскольку

$$P(1) = {}^{0,q}(P(1)P(0)) = {}^{0,q}(P(1)E(0, q)) = P(1).$$

Для матрицы безусловных вероятностей на n -м шаге получаем уравнение

$$A(n) = (a_i(n)) = \left(\sum_{\mu} a_{\mu}(0) p_{\mu,i}(n) \right) = {}^{0,q}(A(0)P(n)) = {}^{0,q}(A(0) {}^{0,q}P^n), \quad (6)$$

где $A(0)$ — матрица безусловных вероятностей на нулевом шаге. Здесь используется понятие $(0, q)$ -свернутого произведения двух многомерных матриц и $(0, q)$ -свернутой n -й степени многомерной матрицы [2].

Таким образом, с помощью многомерно-матричного подхода мы получили простое обобщение соотношений (1), (2) для скалярных однородных цепей Маркова на случай векторных однородных цепей Маркова. Соотношения (1), (2) являются частным случаем соотношений (5), (6) при $q=1$.

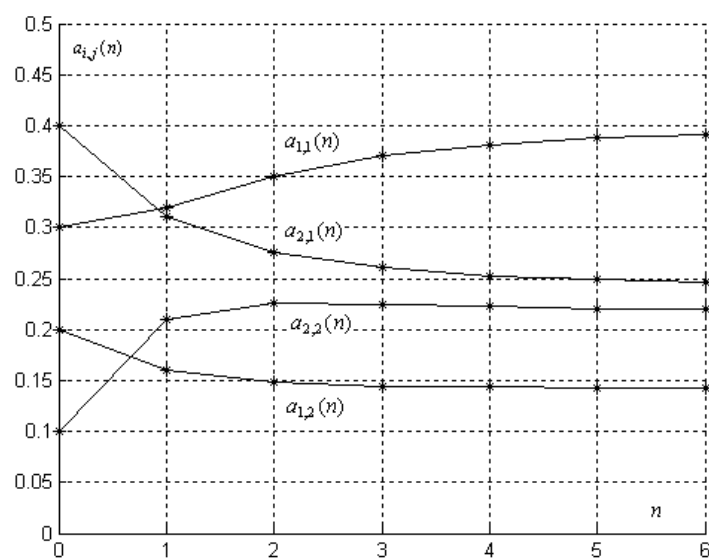
Пример. Изложенную теорию проиллюстрируем на примере цепи Маркова с параметрами $q=2, k_1=k_2=k=2$ и матрицами

$$A(0) = (a_{i,j}(0)) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$P = P(1) = (p_{i,j,l,m}) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} (1,1,1,1) & (1,1,2,1) & (1,1,1,2) & (1,1,2,2) \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ (2,1,1,1) & (2,1,2,1) & (2,1,1,2) & (2,1,2,2) \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,2 \\ (1,2,1,1) & (1,2,2,1) & (1,2,1,2) & (1,2,2,2) \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ (2,2,1,1) & (2,2,2,1) & (2,2,1,2) & (2,2,2,2) \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы P снабжены сверху в скобках значениями индексов. По формулам (5), (6) при $n=1,2,\dots,6$ были получены матрицы безусловных вероятностей $A(n)$. Для выполнения расчетов использовался интегрированный в Delphi пакет научных программ "Анализ многомерных данных"[4], позволяющий производить расчеты при любых q, k . На рисунке

приведены графики безусловных вероятностей $a_{i,j}(n)$ рассмотренной цепи Маркова. Мы видим, что для данной векторной цепи Маркова существуют предельные (стационарные) вероятности.



Графики безусловных вероятностей $a_{i,j}(n)$

VECTORIAL 1-CONNECTED MARKOV CHAINS

K.S. KORCHITS, V.S. MUKHA

Abstract

On the basis of multidimension–matrix approach a theory of vector single related Markovian chains, not mentioned in the literature, is developed. An example of analysis of vector single related Markovian chain is considered.

Литература

1. Янишин В.В. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 5. С. 1108–1112.
2. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев, 1972.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., 1988.
4. Корчиц К.С., Муха В.С. // Изв. Белорус. инж. акад.. 2002. № 1/2. С. 246–249.