

О. А. СУЛТАНОВ, Л. А. КАЛЯКИН

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ БЛОХА*

Рассматривается система трех дифференциальных уравнений первого порядка с медленно меняющимися коэффициентами, которая в теории ядерной намагниченности носит название уравнения Блоха. Проводится усреднение этой системы на основе решений уравнений с «замороженными» коэффициентами при нулевой диссипации.

Ключевые слова: *малый параметр, усреднение, нелинейные уравнения.*

Введение

Основным объектом исследования является система трех уравнений, описывающая динамику вектора ядерной намагниченности [1]. В цилиндрических координатах эти уравнения имеют вид [2]

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -h(\varepsilon t) z \sin \psi - \varepsilon \rho, & \frac{dz}{dt} &= h(\varepsilon t) \rho \sin \psi - (z - 1)\varepsilon b, \\ \rho \left[\frac{d\psi}{dt} - \Omega(\varepsilon t) + z \right] &= -h(\varepsilon t) z \cos \psi.\end{aligned}\tag{1}$$

Коэффициенты диссипации $\varepsilon, \varepsilon b \geq 0$ имеют определенный физический смысл и считаются неотрицательными. В силу инвариантности уравнений относительно замен $h \Rightarrow -h, \psi \Rightarrow \psi + \pi$ можно считать неотрицательным коэффициент $h \geq 0$. Знак коэффициента Ω не фиксирован.

Считается, что малый параметр ε содержится множителем в коэффициентах диссипации, так что $b = \text{const} > 0$. Кроме того, он содержится в медленно меняющихся коэффициентах $h(\varepsilon t), \Omega(\varepsilon t)$. Функции $h(\tau), \Omega(\tau)$ гладко зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$, в частности, они ограничены на конечном промежутке и $h(\tau) \geq h_0 > 0$.

Целью работы является построение асимптотики решений при $\varepsilon \rightarrow 0$ на большом промежутке времени $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Подходы к такого типа задачам обычно связываются с терминами «усреднение» и «двухмасштабное разложение» [3].

1. Интегрирование «замороженной» системы

В качестве основы для асимптотических конструкций используется трехпараметрическое решение бездиссипативной системы уравнений ($\varepsilon = 0$) с «замороженными» (постоянными) коэффициентами: $h, \Omega = \text{const}$. Ввиду наличия у такой системы двух первых интегралов

$$M = \rho^2(t) + z^2(t) = \text{const}, \quad E = \frac{1}{2}z^2(t) - \Omega z(t) - h\rho(t) \cos \psi(t) = \text{const}$$

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 10-01-00186, 11-02-97003).

ее интегрирование сводится к решению скалярного уравнения, например,

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{h^2(M - z^2) - (E + \Omega z - z^2/2)^2}.$$

Это уравнение, очевидно, интегрируется

$$\int_{\bar{z}}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{h^2(M - \zeta^2) - (E + \Omega\zeta - \zeta^2/2)^2}} = \pm(t + t_0), \quad \bar{z}, t_0 = \text{const.}$$

Решение, зависящее от трех констант интегрирования t_0, E, M и двух параметров h, Ω , выписывается через обратную функцию $z = z_0(t + t_0; E, M; h, \Omega)$.

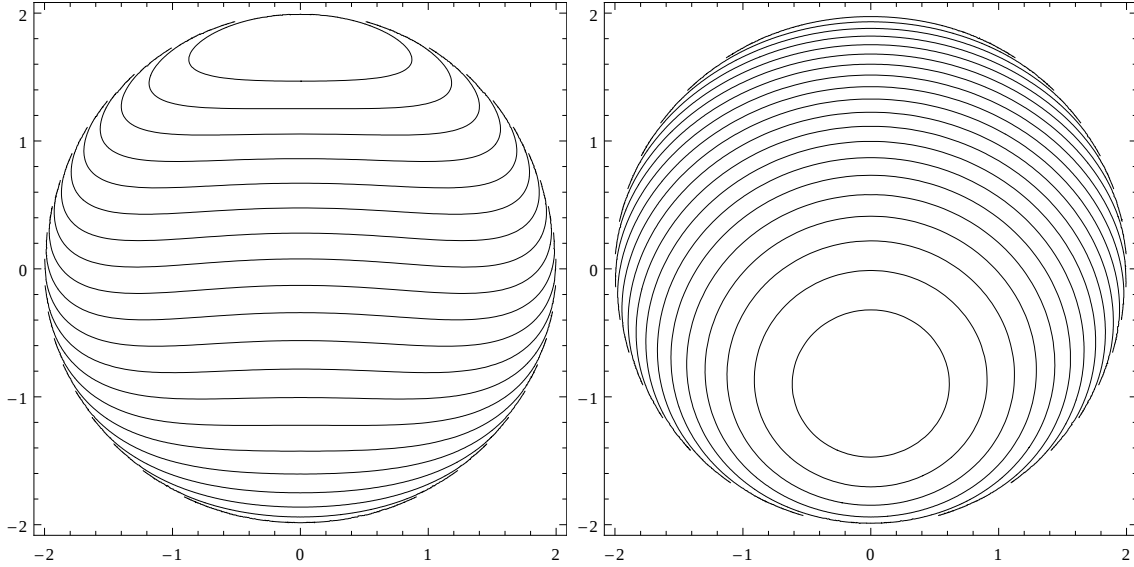


Рис. 1. Фазовые траектории в проекции с верхней и нижней полусферы

Поскольку почти все фазовые траектории замкнуты, то общее решение представляет собой периодическую функцию с периодом $T = T(E, M; h, \Omega)$, зависящим от четырех параметров. Остальные компоненты вектора намагниченности

$$\rho = \rho_0(t + t_0; E, M; h, \Omega), \quad \psi = \psi_0(t + t_0; E, M; h, \Omega)$$

вычисляются из первых интегралов.

2. Замена переменных

Полученные функции представляют главный член асимптотики по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ для решения полной (возмущенной) системы Блоха (1) на конечном промежутке времени $0 < t < \mathcal{O}(1)$. Однако, чтобы асимптотика была пригодна на большом промежутке времени $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, надо подходящим образом деформировать параметры $E = E(\varepsilon t)$, $M = M(\varepsilon t)$ и быструю фазу $t - t_0$. Такие деформации в масштабе медленного времени $\tau = \varepsilon t$

определяются из усредненных уравнений. Процедура усреднения как реализация одного из вариантов метода двухмасштабных разложений наиболее просто выглядит в переменных типа «действие-угол». В простейшем случае такими переменными являются амплитуда-угол M, S в полярных координатах, и переход к ним от декартовых координат связан с решением линейного осциллятора $x = \sqrt{M} \cos S, y = \sqrt{M} \sin S$.

В рассматриваемой задаче переход основан на решениях бездиссипационной «замороженной» системы. При этом удобно использовать функции, приведенные к фиксированному периоду 2π :

$$R, Z, \Psi(S; E, M; h, \Omega) = \rho_0, z_0, \psi_0(S/\omega; E, M; h, \Omega). \quad (2)$$

Здесь $\omega(E, M; \tau) = 2\pi/T$ — частота невозмущенного решения зависит как от

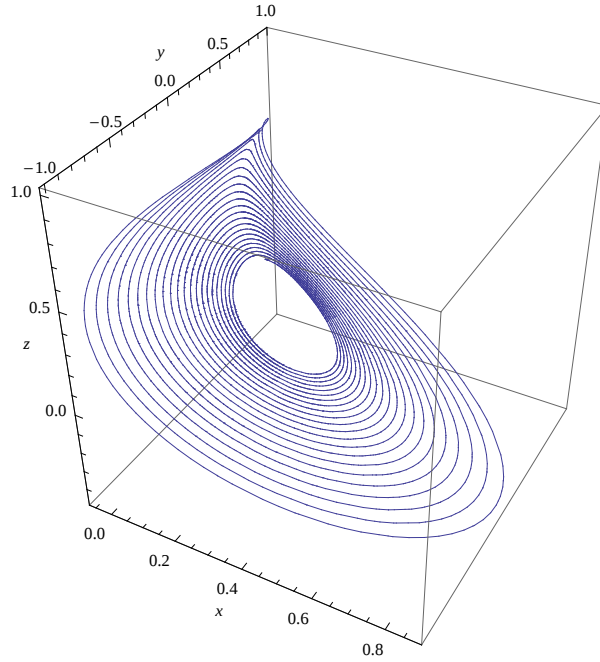


Рис. 2. График решения при малой диссипации представляет собой сжимающуюся спираль. Асимптотика описывается периодическими решениями с медленно меняющимися параметрами

параметров траектории E, M , так и от параметра τ посредством $h(\tau), \Omega(\tau)$. Введенные таким образом функции зависят от пяти переменных и удовлетворяют тождествам, которые вытекают из исходных уравнений и первых интегралов:

$$\omega \partial_S R = -h Z \sin \Psi, \quad \omega \partial_S Z = h R \sin \Psi,$$

$$R [\omega \partial_S \Psi - \Omega + Z] = -h Z \cos \Psi,$$

$$R^2 + Z^2 = M, \quad \frac{1}{2}Z^2 - \Omega Z - hR \cos \Psi = E.$$

Дифференцирование двух последних тождеств приводит к соотношениям

$$\partial_E(R^2 + Z^2) = 0, \quad \partial_M(R^2 + Z^2) = 1,$$

$$\partial_E\left(\frac{1}{2}Z^2 - \Omega Z - hR \cos \Psi\right) = 1, \quad \partial_M\left(\frac{1}{2}Z^2 - \Omega Z - hR \cos \Psi\right) = 0.$$

Кроме того, эти тождества можно дифференцировать по параметрам h, Ω . В усредненных уравнениях фигурирует комбинация таких производных в виде оператора $\hat{\partial}_\tau = h'(\tau)\partial_h + \Omega'(\tau)\partial_\Omega$. Применение такого оператора к тождествам первых интегралов дает соотношения

$$\hat{\partial}_\tau(R^2 + Z^2) = 0, \quad (Z - \Omega)\hat{\partial}_\tau Z - h\hat{\partial}_\tau(R \cos \Psi) = h'(\tau)R \cos \Psi + \Omega'(\tau)Z.$$

В системе уравнений Блоха (1) выполняется замена переменных $(\rho, z, \psi) \Rightarrow (S, E, M)$, для которой используются введенные выше функции:

$$\rho(t) = R(S; E, M; h, \Omega), \quad z(t) = Z(S; E, M; h, \Omega), \quad \psi(t) = \Psi(S; E, M; h, \Omega).$$

Здесь $h, \Omega(\varepsilon t)$ — заданные функции. Якобиан замены вычисляется с учетом полученных соотношений:

$$\det \frac{\partial(R, Z, \Psi)}{\partial(S, E, M)} = \frac{1}{2R\omega}, \quad R = R(S; E, M; h, \Omega), \quad \omega = \omega(E, M; \tau).$$

Уравнения для вектора новых искомым функций $(S, E, R)(t)$ выписываются через матрицу Якоби в виде

$$\frac{d(S, E, M)}{dt} \frac{\partial(R, Z, \Psi)}{\partial(S, E, M)} = \omega \partial_S(R, Z, \Psi) + \varepsilon \mathbf{F},$$

$$\mathbf{F} = -(R, b(Z - 1), 0) - \hat{\partial}_\tau(R, Z, \Psi).$$

После приведения системы к нормальной форме уравнения приобретают вид, характерный для задач о возмущении нелинейных колебаний:

$$\frac{dS}{dt} = \omega(E, M; \tau) + \varepsilon \Phi(S, E, M; \tau),$$

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon f(S, E, M; \tau), \quad \frac{dM}{dt} = \varepsilon g(S, E, M; \tau).$$

Правые части выписываются в терминах решений невозмущенных уравнений $R, Z, \Psi(S, E, M; h(\tau), \Omega(\tau))$ и являются 2π -периодическими по быстрой переменной S :

$$\begin{aligned} \Phi &= -\omega(\partial_E \Psi \hat{\partial}_\tau Z - \partial_E Z \hat{\partial}_\tau \Psi) + \\ &+ 2R\omega \left[b(Z - 1)(\partial_E R \partial_M \Psi - \partial_E \Psi \partial_M R) - R(\partial_E Z \partial_M \Psi - \partial_E \Psi \partial_M Z) \right], \\ f &= h(\tau)R \cos \Psi + b(Z - 1)(\Omega - Z) - h'(\tau)R \cos \Psi - \Omega'(\tau)Z, \\ g &= -2[R^2 + bZ(Z - 1)]. \end{aligned}$$

3. Усреднение

Таким образом, исходная задача о построении асимптотики по малому параметру для решений уравнений Блоха редуцируется к классической задаче с малым параметром [3], которая решается методом двухмасштабных разложений. В одном из вариантов этого метода задачи по определению быстрой $S(t; \varepsilon)$ и медленных переменных $E, M(t; \varepsilon)$ можно разделить, используя анзац:

$$\begin{aligned} E(t; \varepsilon) &= E_0(\tau) + \varepsilon E_1(S, \varepsilon) + \dots, \quad M(t; \varepsilon) = M_0(\tau) + \varepsilon M_1(S, \varepsilon) + \dots; \\ S(t; \varepsilon) &= \varepsilon^{-1} S_0(\tau) + s_0 + \varepsilon S_1(\hat{S}, \varepsilon) + \dots, \quad \hat{S} = \varepsilon^{-1} S_0(\tau) + s_0; \quad (\tau = \varepsilon t). \end{aligned}$$

Главные члены этой асимптотики $E_0(\tau), M_0(\tau)$ находятся из системы усредненных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dE_0}{d\tau} &= h(\tau) \langle R \cos \Psi \rangle - b(Z - 1)(\Omega - Z) - h'(\tau) \langle R \cos \Psi \rangle + \Omega'(\tau) \langle Z \rangle, \\ \frac{dM_0}{d\tau} &= -2 \langle R^2 + bZ(Z - 1) \rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь угловыми скобками обозначается усреднение по переменной S известных функций, которые выражаются через $R, Z, \Psi(S, E_0, M_0; h, \Omega)$; например,

$$\langle R^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2(S, E_0, M_0; h, \Omega) dS.$$

Функции $E_0(\varepsilon t), M_0(\varepsilon t)$ определяют медленную деформацию невозмущенной траектории. Эта деформация используется в качестве главного члена асимптотики для приближенного описания траектории полной (возмущенной) системы Блоха.

4. Разрешимость усредненной системы

Относительно разрешимости задачи Коши для усредненной системы имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если функции $h(\tau), \Omega(\tau) \in C^1(\mathbb{R})$ непрерывно дифференцируемые, то любое решение усредненных уравнений (3) продолжается вправо и влево на всю ось $\tau \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Из тождества первого интеграла $R^2 + Z^2 = M$ вытекают оценки для квадратов $R^2 \leq M, Z^2 \leq M$, из которых выводятся оценки и для первых степеней:

$$-(M + 1)/2 \leq R \leq (M + 1)/2, \quad -(M + 1)/2 \leq Z \leq (M + 1)/2.$$

Данные неравенства сохраняются для средних значений. Поэтому правые части уравнений (3), которые выражаются через $R, Z, \Psi(S, E_0, M_0; h, \Omega)$, мажорируются сверху и снизу линейной функцией $N(1 + M_0)$, $N = \text{const}$. В таком случае существование глобального решения следует из известных результатов [4, с. 16], [5, с. 20]. $\square$

5. Заключение

Связь усредненных уравнений с исходной системой обеспечивается заменой (2) на уровне главных членов асимптотики. Пусть (ρ^0, z^0, ψ^0) , $\rho^0 \neq 0$ — начальная точка для системы (1). Ей соответствуют начальные данные (E^0, M^0, S^0) усредненной системы, для которой задача Коши разрешима в силу теоремы 1 в классе непрерывно дифференцируемых функций $E_0(\tau)$, $M_0(\tau)$, $S_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Для любой тройки (ρ_0, z_0, ψ_0) , которая не является точкой покоя для «замороженной» системы с $h = h(0)$, $\Omega = \Omega(0)$, существуют $\tau_0, \varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует точное решение системы (1) на промежутке $t \in [0, \tau_0 \varepsilon^{-1}]$, асимптотика которого имеет вид*

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0(S_0/\omega, E_0, M_0; h, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon), & z &= z_0(S_0/\omega, E_0, M_0; h, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \psi &= \psi_0(S_0/\omega, E_0, M_0; h, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon), & \varepsilon &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Построение формального асимптотического решения приведено выше. Обоснование асимптотики следует, например, из работы [6].

Список литературы

1. **Боровик-Романов, А. С.** Спиновое эхо в системах со связанной ядерно-электронной прецессией / А. С. Боровик-Романов [и др.] // Успехи физ. наук. — 1984. — Т. 142, № 4. — С. 537–570.
2. **Калякин, Л. А.** Асимптотический анализ модели ядерного магнитного авторезонанса / Л. А. Калякин, О. А. Султанов, М. А. Шамсутдинов // Теорет. и мат. физика. — 2011. — Т. 167, № 3. — С. 419–430.
3. **Боголюбов, Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Наука, 1974.
4. **Немыцкий, В. В.** Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 552 с.
5. **Хасьминский, Р. З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 368 с.
6. **Ажоткин, В. Д.** О применении метода двухмасштабных разложений к одночастотной задаче теории нелинейных колебаний / В. Д. Ажоткин, В. М. Бабич // Приклад. математика и механика. — 1985. — Т. 49, вып. 3. — С. 377–383.