УДК 519.874

УПРАВЛЕНИЕ ОПЦИОННЫМИ РЕСУРСАМИ

А.В. Китаева, Н.В. Степанова

Томский политехнический университет
E-mail: kit1157@yandex.ru

Рассмотрена модель с одним видом ресурса с ограниченным сроком использования, поставляемого в начале производственного цикла. Спрос на ресурс в процессе производства носит случайный характер: поток запросов образует стационарный процесс, объемы запросов есть независимые одинаково распределенные случайные величины с заданными средним и дисперсией. Найдены асимптотические распределения общего объёма спроса на сырье в течение производственного цикла и длительности использования ресурса. Получены уравнения для статистического оценивания необходимых параметров и приближенное значение оптимального объема опционного ресурса в смысле максимума средней прибыли предприятия.

Ключевые слова:
Управление запасами, стохастическая модель, нормальная аппроксимация.
Key words:
Inventory control, stochastic model, normal approximation.

Введение и постановка задачи

Системное исследование моделей управления запасами, отражающих неопределенность и динамику, началось в начале 50-х гг. XX в. с работ K.J. Arrow, Th.E. Harris и J. Marschak [1], а также A. Dvoretzky, J. Kiefer и J. Wolfowitz [2]. Большое количество классических моделей управления запасами проанализировано в [3]. В настоящее время существует ряд стохастических моделей для решения проблемы управления запасами при различных условиях, встречающихся на практике, например работы Sh.M. Ross [4], S. Chopra и P. Meindl [5], D. Beyer et al. [6]. Отличие рассматриваемой задачи от традиционных задач управления запасами состоит в том, что мы не рассматриваем стоимость хранения сырья, и дополнительные поставки опционного сырья невозможны, т. е. его можно расценивать как некоторый не возобновляемый во время производственного цикла ресурс.

Рассмотрим следующую модель производственного процесса, в котором может быть использовано так называемое опционное сырье, т. е. его применение не является обязательным в производстве. В случае его отсутствия предприятие работает в обычном режиме и выпускает стандартную продукцию. Потребность в этом ресурсе возникает по запросу заказчиков, носит случайный характер и выгодна производителю, поскольку в конечном счете он получает дополнительную прибыль в размере c денежных единиц на каждую единицу использованного сырья. Приобретенное сырье имеет ограниченный срок годности, по истечении которого подлежит утилизации. Примером может служить крупное предприятие, выпускающее некоторую однородную продукцию, имеющую стабильный рынок сбыта, при этом на предприятие время от времени (не регулярно) поступают специальные заказы. Любое коммерческое предприятие стремится максимизировать свою прибыль, поэтому здесь возникает оптимизационная задача, рассмотрению которой и посвящена данная работа.

Введем необходимые для математического моделирования задачи обозначения. Пусть ξ – это случайная величина, равная величине одного запроса на сырье, запросы приходят независимо друг от друга, $E\{\xi\}=a_1$, и $E\{\xi^2\}=a_2$, где символ $E\{\xi\}$ обозначает математическое ожидание величины ξ.

При осуществлении производственного цикла длительности T предприятие покупает некоторую партию опционного сырья объёма Q по цене d за единицу. По истечении времени T сырье использоваться не может и утилизируется по цене d_{ut} за единицу.

Общий объём спроса на сырье в течение производственного цикла

Рассмотрим случай, когда число запросов на сырье $n>>1$ и образует стационарный случайный процесс. Пусть также длительность производственного цикла $T>>1$. Тогда n можно считать приближенно нормальной случайной величиной с $E\{n\}=m_T$ и дисперсией $D\{n\}=\sigma_T^2$, где величины m_T и σ_T^2 пропорциональны T [7, 8].

Обозначим через X общий объём спроса на сырье в течение производственного цикла, через $p(\cdot)$ – функцию плотности вероятностей случайной величины X.

Теорема 1. При стационарности потока заказов и больших значениях n и T объём спроса на сырье в течение производственного цикла можно считать нормальной случайной величиной со средним $m_x=a_1m_T$ и дисперсией $\sigma_x^2=m_T(a_2-a_1^2)+\sigma_T^2a_1^2$.

Доказательство. Пусть число запросов на сырье n фиксировано, тогда объём X_n спроса на сырье в течение производственного цикла можно представить в виде $X_n=\xi_1+\xi_2+...\xi_n$, где ξ_i – величина, равная объему i-го запроса. Плотность вероятностей $p(\cdot)$ можно найти по формуле полной вероятности $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)p_n$, где $\{p_n,n=0,1,...\}$ – распределение вероятностей числа возможных запросов за время T, $p_n(\cdot)$ – плотность распределения X_n.

Обозначим через $g(\cdot)$ характеристическую функцию случайной величины ξ, то есть $g(\omega)=E\{e^{i\omega\xi}\}$, через $D\{\xi\}=a_2-a_1^2$ – дисперсию величины ξ. Характеристическая функция величины X_n есть $g^n(\omega)$, и характеристическая функция $G_x(\cdot)$ величины X равна $G_x(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}g^n(\omega)p(n)$. Для $\ln g(\cdot)$ справедливо разложение

$$\ln g(\omega)=i\omega a_1-\frac{\omega^2D\{\xi\}}{2}+O(\omega^3). \qquad (1)$$

Учитывая асимптотическую нормальность величины n, можно приближенно записать

$$G_x(\omega)=\frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g^z(\omega)e^{-\frac{(z-m_T)^2}{2\sigma_T^2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{z\ln g(\omega)}e^{-\frac{(z-m_T)^2}{2\sigma_T^2}}dz. \qquad (2)$$

Принимая во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2+bx}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right),$$

и вычисляя интеграл в (2), получаем

$$G_x(\omega)\approx\exp\left(m_T\ln g(\omega)+\frac{\sigma_T^2}{2}\ln^2g(\omega)\right). \qquad (3)$$

Подставляя разложение (1) в (3), имеем

$$G_x(\omega)=$$

$$=\exp\left(i\omega a_1m_T-\frac{\omega^2}{2}(m_TD\{\xi\}+a_1^2\sigma_T^2)+O(\omega^3)T\right).$$

Перейдём от величины X к величине

$$\zeta=\frac{x-a_1m_T}{\sqrt{m_TD\{\xi\}+a_1^2\sigma_T^2}}.$$

Используя свойства характеристических функций, получим, что

$$G_\zeta(\omega)=\exp\left(-\frac{\omega^2}{2}+O\left(\frac{\omega^3}{(m_TD\{\xi\}+a_1^2\sigma_T^2)^{3/2}}\right)T\right).$$

При $T\to\infty$ имеем $\lim_{T\to\infty}G_\zeta(\omega)=\exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right)$, то есть асимптотически ζ является стандартной нормальной случайной величиной.

Поэтому при больших n и T

$$p(x)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi(m_T(a_2-a_1^2)+\sigma_T^2a_1^2)}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(x-a_1m_T)^2}{2(m_T(a_2-a_1^2)+\sigma_T^2a_1^2)}\right). \qquad (4)$$

Доказательство закончено.

Оптимальный объём партии сырья для производственного цикла

Найдем среднюю прибыль в течение производственного цикла. На покупку сырья объёма Q будет потрачено Qd денег. Если $X>Q$, то будет использована вся партия сырья. Это произойдёт с вероятностью $\int_Q^{\infty}p(x)dx$, и предприятие дополнительно получит Qc денег. Если $X\le Q$, то партия сырья объёма $Q-X$ останется неиспользованной, её придётся направить на утилизацию, будет получено cX, а потрачено $d_{ut}(Q-X)$ денег.

Средняя прибыль предприятия составит величину

$$S=cQ\int_Q^{\infty}p(x)dx+c\int_0^Qxp(x)dx-$$

$$-d_{ut}\int_0^Q(Q-x)p(x)dx-Qd.$$

Оптимальный объём партии сырья для производственного цикла найдём из условия $S\Rightarrow\max_Q$, т. е.

$$\frac{dS}{dQ}=c\int_Q^{\infty}p(x)dx-d_{ut}\int_0^Qp(x)dx-d=0.$$

Учитывая тождество $\int_0^Qp(x)dx=1-\int_Q^{\infty}p(x)dx$, получим уравнение для определения оптимального объёма партии сырья Q_{opt} для производственного цикла

$$\int_{Q_{\text{opt}}}^{\infty} p(x)dx = \frac{d+d_{\text{ut}}}{c+d_{\text{ut}}}.$$

Таким образом, Q_{opt} является квантилем распределения вероятностей общего объёма спроса на сырье в течение производственного цикла. Эту величину можно найти различными статистическими методами, наблюдая за процессом поступления спецзаказов или пользуясь приближенной формулой (4).

В последнем случае оптимальный объём Q_{opt} сырья для производственного цикла определится уравнением

$$\int_{Q_{\text{opt}}}^{\infty} p(x)dx = 1-\Phi\left(\frac{Q_{\text{opt}}-a_1 m_T}{\sqrt{m_T(a_2-a_1^2)+\sigma_T^2 a_1^2}}\right) = \frac{d+d_{\text{ut}}}{c+d_{\text{ut}}},$$

где $\Phi(\cdot)$ есть функция Лапласа. Обозначая через $\Psi(\cdot)$ функцию, обратную к функции $\Phi(\cdot)$, получаем окончательно

$$Q_{\text{opt}} = a_1 m_T + \sqrt{m_T(a_2-a_1^2)+\sigma_T^2 a_1^2}\,\Psi\left(1-\frac{d+d_{\text{ut}}}{c+d_{\text{ut}}}\right). \quad (5)$$

Рассмотрим два частных случая формулы (5).

1. Поток запросов является стационарным пуассоновским потоком интенсивности λ. Тогда $m_T=\lambda T$, $\sigma_T^2=\lambda T$ и формула (5) приобретает вид

$$Q_{\text{opt}} = a_1\lambda T + \sqrt{a_2\lambda T}\,\Psi\left(1-\frac{d+d_{\text{ut}}}{c+d_{\text{ut}}}\right).$$

2. Поток запросов является дважды стохастическим пуассоновским потоком, интенсивность $\lambda(t)$ этого потока является стационарным случайным процессом с $E\{\lambda(t)\}=\bar{\lambda}$ и функцией ковариации $\operatorname{cov}(\lambda(t_1),\lambda(t_2))=R(t_2-t_1)$.

Тогда, при фиксированной реализации $\lambda(t)$,

$$E\{n\mid\lambda(t)\} = \int_0^T \lambda(t)dt,$$

$$E\{n^2\mid\lambda(t)\} = \int_0^T \lambda(t)dt + \int_0^T\int_0^T \lambda(t_1)\lambda(t_2)dt_1dt_2.$$

Усредняя по реализациям $\lambda(t)$, получим

$$E\{n\} = m_T = \bar{\lambda}T,$$

$$E\{n\} = \bar{\lambda}T + \int_0^T\int_0^T(\bar{\lambda}^2 + R(t_2-t_1))\,dt_1dt_2 =$$

$$= \bar{\lambda}T + m_T^2 + \int_0^T\int_0^T R(t_2-t_1)\,dt_1dt_2,$$

так, что

$$\sigma_T^2 = \bar{\lambda}T + \int_0^T\int_0^T R(t_2-t_1)\,dt_1dt_2.$$

Последний интеграл можно преобразовать к виду

$$\int_0^T\int_0^T R(t_2-t_1)\,dt_1dt_2 = 2T\int_0^T\left(1-\frac{w}{T}\right)R(w)dw.$$

При $T\to\infty$

$$\int_0^T\int_0^T R(t_2-t_1)\,dt_1dt_2 \sim 2T\int_0^{\infty} R(w)dw$$

и поэтому

$$\sigma_T^2 \sim \bar{\lambda}T + 2T\int_0^{\infty}R(w)dw = T\left(\bar{\lambda}+2\int_0^{\infty}R(w)dw\right).$$

Таким образом, в рассмотренных случаях однозначно определяется оптимальный объём Q_{opt} партии опционного сырья для производственного цикла.

Длительность использования опционного ресурса

Процесс длительности использования опционного ресурса в течение производственного цикла также представляет интерес, как для потенциальных заказчиков, так и для производителя.

Найдём плотность вероятностей $q(\cdot)$ длительности использования опционного сырья объёма Q в диффузионном приближении.

Будем считать, что запросы образуют стационарный случайный процесс. Обозначим

$$\lim_{T\to\infty}\frac{a_1 m_T}{T} = m_0,\quad \lim_{T\to\infty}\frac{m_T(a_2-a_1^2)+\sigma_T^2a_1^2}{T} = \sigma_0^2.$$

Тогда процесс спроса на сырье $X(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$dX(t) = m_0dt + \sigma_0 dw_t,$$

где w_t – стандартный винеровский случайный процесс.

Обозначим через $\tau(x)$ случайное время достижения процессом $X(\cdot)$ порогового значения Q, если в начальный момент времени t значение процесса $X(\cdot)$ было равно x.

Теорема 2. В диффузионном приближении плотность вероятностей длительности использования опционного сырья объёма Q

$$q(t) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,t^{3/2}}\exp\left(-\frac{m_0^2}{2\sigma_0^2 t}\left(t-\frac{Q}{m_0}\right)^2\right),\ t>0.$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование Лапласа от плотности вероятностей величины $\tau(x)$

$$g(s,x) = E\{e^{-s\tau(x)}\}.$$

Возьмем момент времени $t+\Delta t$. Тогда за промежуток времени Δt процесс $X(\cdot)$ приобретёт приращение Δx и время, оставшееся до достижения процессом $X(\cdot)$ порогового значения Q станет равным $\tau(x+\Delta x)$. Получаем соотношение

$$g(s,x) = E\{e^{-s\tau(x)}\} = E\{e^{-s(\Delta t+\tau(x+\Delta x))}\} =$$

$$= e^{-s\Delta t}E_{\Delta x}\{g(s,x+\Delta x)\},$$

где $E_{\Delta x}$ означает усреднение по величине Δx.

Разложим экспоненту и функцию $g(s,\cdot)$ в ряд:

$$e^{-s\Delta t}=1-s\Delta t+o(\Delta t),$$

$$g(s,x+\Delta x)=g(s,x)+\frac{\partial g(s,x)}{\partial x}\Delta x+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2}(\Delta x)^2+o((\Delta x)^2).$$

Усредняя по Δx, получим

$$g(s,x)=$$

$$=(1-s\Delta t)E_{\Delta x}\left\{\begin{array}{l} g(s,x)+\dfrac{\partial g(s,x)}{\partial x}\Delta x+ \\ +\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 \end{array}\right\}+o(\Delta t)=$$

$$=(1-s\Delta t)\left\{\begin{array}{l} g(s,x)+m_0\Delta t\dfrac{\partial g(s,x)}{\partial x}+ \\ +\dfrac{\sigma_0^2}{2}\dfrac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2}\Delta t \end{array}\right\}+o(\Delta t)=$$

$$=g(s,x)+\left\{\begin{array}{l} -sg(s,x)+m_0\dfrac{\partial g(s,x)}{\partial x}+ \\ +\dfrac{\sigma_0^2}{2}\dfrac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2} \end{array}\right\}\Delta t+o(\Delta t).$$

Поделив на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим, что $g(s,x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2}+\frac{2m_0}{\sigma_0^2}\frac{\partial g(s,x)}{\partial x}-\frac{2s}{\sigma_0^2}g(s,x)=0 \qquad (6)$$

с граничным условием $g(s,Q)=1$ (так как $\tau(Q)=0$).

Характеристическое уравнение $z^2+2\dfrac{m_0}{\sigma_0^2}z-\dfrac{2s}{\sigma_0^2}=0$ имеет корни

$$z_1(s)=\sqrt{\frac{m_0^2}{\sigma_0^4}+\frac{2s}{\sigma_0^2}}-\frac{m_0}{\sigma_0^2}>0$$

$$\text{и}\ \ z_2(s)=-\sqrt{\frac{m_0^2}{\sigma_0^4}+\frac{2s}{\sigma_0^2}}-\frac{m_0}{\sigma_0^2}<0.$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$g(s,x)=C_1(s)e^{z_1(s)x}+C_2(s)e^{z_2(s)x}.$$

При $x\to-\infty$ функция $g(s,x)$ должна стремиться к нулю, поскольку $\tau(x)$ должно бесконечно возрастать. Поэтому следует считать $C_2(s)\equiv 0$ и рассматривать решение в виде $g(s,x)=C_1(s)e^{z_1(s)x}$. Так как $g(s,Q)=1$, то $g(s,x)=e^{z_1(s)(x-Q)}$

Процесс производства начинается в момент времени $t=0$ со значения $x=0$. Поэтому нас интересует

$$g(s,0)=e^{-z_1(s)Q}=\exp\left(\frac{m_0}{\sigma_0^2}Q-Q\sqrt{\frac{m_0^2}{\sigma_0^4}+\frac{2s}{\sigma_0^2}}\right). \qquad (7)$$

Для нахождения плотности вероятностей $q(\cdot)$ длительности использования опционного сырья надо найти обратное преобразование Лапласа от $g(s,0)$. Для этого запишем (7) в виде

$$g(s,0)=e^{-z_1(s)Q}=\exp\left(\frac{m_0}{\sigma_0^2}Q-\sqrt{\frac{2}{\sigma_0^2}}Q\sqrt{s+\frac{m_0^2}{2\sigma_0^2}}\right).$$

Пользуясь свойствами преобразования Лапласа и формулой [9. Ф. 204], получим явный вид плотности $q(\cdot)$, что и требовалось доказать.

Найдём среднее $E\{\tau\}$ и дисперсию $D\{\tau\}$. Имеем

$$\psi(s)=\ln g(s,0)=\frac{m_0}{\sigma_0^2}Q-Q\sqrt{\frac{m_0^2}{\sigma_0^4}+\frac{2s}{\sigma_0^2}}.$$

Отсюда

$$\psi'(s)=-\left[\frac{m_0^2}{\sigma_0^4}+\frac{2s}{\sigma_0^2}\right]^{-1/2}\frac{Q}{\sigma_0^2},$$

поэтому

$$E\{\tau\}=-\psi'(0)=\frac{Q}{m_0}=\frac{Q}{a_1m_T}T.$$

Далее

$$\psi''(s)=\left[\frac{m_0^2}{\sigma_0^4}+\frac{2s}{\sigma_0^2}\right]^{-3/2}\frac{Q}{\sigma_0^4},$$

поэтому

$$D\{\tau\}=\psi''(0)=\frac{\sigma_0^2}{m_0^3}Q=\frac{m_T(a_2-a_1^2)+\sigma_T^2a_1^2}{a_1^3m_T^3}QT^2.$$

Найдем приближенное выражение для $q(\cdot)$ в случае, когда

$$\frac{E\{\tau\}}{\sqrt{D\{\tau\}}}=\sqrt{\frac{Qm_0}{\sigma_0{}^2}}>>1. \qquad (8)$$

Условие (8) можно рассматривать как одно из условий стабильной работы производства.

Разлагая $g(s,0)$ в ряд по малому параметру

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\sigma_0{}^2}{Qm_0}},$$

получим

$$g(s,0)\approx\exp\left(-s\frac{Q}{m_0}+s^2\frac{\sigma_0{}^2Q}{m_0{}^3}\right),$$

что соответствует гауссовскому распределению

$$N\left(\frac{QT}{a_1m_T},\frac{m_T(a_2-a_1^2)+\sigma_T^2a_1^2}{a_1^3m_T^3}QT^2\right).$$

Обозначим

$$a_1m_T=m_x,\ \ m_T(a_2-a_1^2)+\sigma_T^2a_1^2=\sigma_x^2.$$

Тогда

$$\tau\sim N\left(\frac{QT}{m_x},\frac{\sigma_x^2}{m_x^3}QT^2\right). \qquad (9)$$

Статистическое оценивание числовых характеристик системы

Как видно из (5) и (9), оптимальный объём опционного сырья и распределение длительности использования опционного сырья зависят от параметров m_x и σ_x^2. Эти параметры можно определить на основе опытных данных. Рассмотрим один из возможных способов такого определения.

В течение каждого производственного цикла возможны два варианта:

1. Будет использовано $X<Q$ опционного ресурса. Пусть таких циклов было N, и мы получили выборку $x_1,x_2,x_3,\dots,x_N$.
2. Будет использован весь ресурс, длительность его использования $\tau<T$. Пусть таких циклов было M, и мы имеем выборку $t_1,t_2,\dots,t_M$.

В общем, мы получили выборку объёма $N+M$: $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_N;\ t_1,t_2,\dots,t_M)$. Оценим параметры m_x и σ_x методом моментов.

Найдём $E\{X|X<Q\}$ – условное математическое ожидание величины X при условии, что в конце производственного цикла сырье останется, т. е. $X<Q$.

Вероятность условия равна

$$\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Q}\exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)dx=\Phi\left(\frac{Q-m_x}{\sigma_x}\right).$$

Далее

$$\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Q}xe^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Q}(x-m_x)e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx+$$

$$+m_x\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Q}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx=$$

$$=m_x\Phi\left(\frac{Q-m_x}{\sigma_x}\right)-\frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(Q-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

Обозначим

$$\phi(z)=\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}\Phi(z)}.$$

Тогда

$$E\{X\mid X<Q\}=m_x-\sigma_x\phi\left(\frac{Q-m_x}{\sigma_x}\right).$$

Так как длительность использования опционного ресурса имеет асимптотически нормальное распределение $\tau\sim N\left(\frac{QT}{m_x},\frac{\sigma_x^2}{m_x^3}QT^2\right)$, то аналогично

$$E\{\tau\mid\tau<T\}=\frac{QT}{m_x}-\sqrt{\frac{\sigma_x^2QT^2}{m_x^3}}\phi\left(\frac{T-QT/m_x}{\sqrt{\sigma_x^2QT^2/m_x^3}}\right).$$

Найдем выборочные средние значения

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i,\ \ \bar{t}=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}t_j.$$

Тогда по методу моментов оценки параметров $\hat{m}_x$ и $\hat{\sigma}_x$ следует искать из следующей системы уравнений:

$$\hat{m}_x-\hat{\sigma}_x\phi\left(\frac{Q-\hat{m}_x}{\hat{\sigma}_x}\right)=\bar{x},$$

$$\frac{QT}{\hat{m}_x}-\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2QT^2}{\hat{m}_x^3}}\phi\left(\frac{T-QT/\hat{m}_x}{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2QT^2/\hat{m}_x^3}}\right)=\bar{t}. \qquad (10)$$

Рассмотрим оценки, полученные по методу максимального правдоподобия.

Учитывая полученные результаты, для совместной плотности вероятностей выборочных значений можно записать функцию правдоподобия

$$L=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x_i-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2QT^2/m_x^3}}\exp\left(-\frac{(t_j-QT/m_x)^2}{2\sigma_x^2QT^2/m_x^3}\right).$$

Её логарифм имеет вид

$$-2\ln L=\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\sum_{j=1}^{M}\frac{(t_j-QT/m_x)^2}{\sigma_x^2QT^2/m_x^3}+$$

$$+(M+N)\ln\sigma_x^2-M\ln m_x^3+\text{const}.$$

Оценки параметров m_x и σ_x^2 следует искать из системы уравнений

$$\frac{\partial(-2\ln L)}{\partial(\sigma_x^2)}=-\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-m_x)^2}{(\sigma_x^2)^2}-$$

$$-\sum_{j=1}^{M}\frac{(t_j-QT/m_x)^2}{(\sigma_x^2)^2\,QT^2/m_x^3}+\frac{N+M}{\sigma_x^2}=0,$$

$$\frac{\partial(-2\ln L)}{\partial m_x}=-2\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i-m_x}{\sigma_x^2}+2\frac{QT}{m_x^2}\sum_{j=1}^{M}\frac{t_j-QT/m_x}{\sigma_x^2QT^2/m_x^3}+$$

$$+3m_x^2\sum_{j=1}^{M}\frac{(t_j-QT/m_x)^2}{\sigma_x^2QT^2}-\frac{3M}{m_x}=0. \qquad (11)$$

Решение систем (10) и (11) возможно лишь численно.

Заключение

Итак, вопрос управления запасами опционного сырья в рамках рассматриваемой модели теоретически исследован достаточно полно. Полученные результаты носят асимптотический характер, поэтому было бы интересно посмотреть на результаты имитационного моделирования, чтобы оценить практическую скорость сходимости к нормальным законам распределения.

Заметим также, что в модели есть еще один частично настраиваемый параметр: величина c, связанная с дополнительной прибылью предприятия при использовании опционного сырья. Следует, однако, учитывать, что, вообще говоря, величины m_T и σ_T^2 также должны зависеть от c.

Оптимизация средней прибыли предприятия по параметру c и имитационное моделирование могут составить дальнейшее направление работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arrow K.J., Harris Th.E., Marschak J. Optimal Inventory Policy // Econometrica. – 1951. – V. 19. – № 3. – P. 250–272.
2. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J. On the optimal character of the (S, s) policy in inventory theory // Econometrica. – 1953. – V. 21. – № 4. – P. 586–596.
3. Chikán A. Inventory models. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. – 418 p.
4. Ross Sh.M. Applied probability models with optimization applications. – N.Y.: Dover Publications, 1992. – 198 p.
5. Chopra S., Meindl P. Supply chain management. – London: Prentice Hall, 2001. – 534 p.
6. Beyer D., Cheng F., Sethi S.P., Taksar M. Markovian demand inventory models. – N.Y.: Springer, 2010. – V. 108. – 255 p.
7. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование рекуррентного потока // Вестник ТГУ. УВТиИ. – 2007. – № 1. – С. 67–70.
8. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование MAP потока методом асимптотического анализа *N*-го порядка // Вестник ТГУ. – 2006. – № 293. – С. 110–115.
9. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральное преобразование и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 544 с.

Поступила 11.04.2013 г.

УДК 519.6

ДИАЛОГОВАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В.И. Рейзлин, В.А. Орлов*

Томский политехнический университет
*ООО «Оптимальное решение», г. Томск
E-mail: vir@tpu.ru

Рассматривается методика решения задач многокритериальной оптимизации с математическими моделями, содержащими множество переменных, значения которых не регулируются лицом, принимающим решение. Вводится понятие толерантности варианта решения, родственное понятиям устойчивости, живучести и т. п.

Ключевые слова:
Многокритериальная оптимизация, критерии оптимальности, оптимальность по Парето, лицо, принимающее решение.
Key words:
Multicriteria optimization, optimality criteria, Pareto optimality, decision-maker.

Любой ситуации принятия решения присущи следующие общие элементы:

а) Множество переменных, значения которых выбираются лицом, принимающим решение (далее – ЛПР). Будем называть такие переменные ***вариантами решения*** или просто вариантами.
б) Множество переменных, значения которых либо по желанию, либо по необходимости не регулируются ЛПР. Будем называть такие переменные ***условиями***.
в) Способ оценивания качества вариантов решения при каждом из условий. Обычно это одна или несколько вещественнозначных функций, зависящих от вариантов и условий.

Перейдем к математической формулировке задачи.

В данной работе предполагается, что варианты решения описываются n-мерными вещественными векторами $x=\langle x_1,...,x_n\rangle \in R^n$, условия – также векторные величины $p=\langle p_1,...,p_n\rangle \in R^m$. Компоненты векторов x назовем ***конструктивными параметрами***, а компоненты векторов p – ***внешними параметрами***. Пару векторов $\langle x,p\rangle$ будем называть ***ситуацией***, т. е. ситуация – это вариант решения x при условиях p.

Будем предполагать также, что заданы ***параметрические ограничения***

$$x_i^{\wedge} \le x_i \le x_i^{\vee} \text{ для всех } i \text{ от 1 до } n,$$

$$p_i^{\wedge} \le p_i \le p_i^{\vee} \text{ для всех } i \text{ от 1 до } m,$$

определяющие в пространстве параметров $R^n \times R^m$ прямоугольный блок $B=X\times P$, который будем называть ***исходным блоком***, а блоки X и P, соответственно, блоком вариантов и блоком параметров.

Кроме параметрических ограничений рассмотрим функциональные ограничения $0\le g_i(x,p)\le g_i^{\vee}$, $1\le i\le r$, вырезающие в исходном блоке некоторую криволинейную область G, которую назовем ***областью возможных ситуаций***. Проекцию области G в пространство конструктивных параметров обозначим через $G|X$. Множество $G|X$ – это множество альтернативных вариантов решения, из которых приходится делать выбор.

Функции $g_i(x,p)$ предполагаются непрерывными. Определяемая ими область G, вообще говоря, может быть любым замкнутым множеством. Единственное ограничение – ее объем не должен равняться нулю. С математической точки зрения требования, предъявляемые к области G, должны быть более жесткими: область G должна совпадать с замыканием множества своих внутренних точек.