

УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ

Рассматривается задача управления инвестиционным портфелем, состоящим из рискового и безрискового активов. Управление портфелем формулируется как терминальная задача и задача слежения.

Постановка задачи в данной работе аналогична постановкам в работах [1, 2]. В [1] модель инвестиционного портфеля строится в пространстве состояний, компонентами вектора состояния являются объемы инвестиций в рисковые и безрисковые активы, а задача управления стохастической системой формулируется в виде эквивалентной задачи управления детерминированной системой, описываемой уравнением динамики вторых моментов состояния. В [2] для построения инвестиционного портфеля используется метод локальной оптимизации. В данной работе состояние портфеля описывается суммарным капиталом, вкладываемым в рисковые и безрисковые активы.

МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЯ

Обозначим через $W(t)$ количество капитала. В каждый момент времени t капитал может быть распределен следующим образом: доля капитала $u(t)$ вкладывается в рисковую актив, а оставшаяся доля $1 - u(t)$ – в безрисковую актив. Всегда

$$0 \leq u(t) \leq 1. \quad (1)$$

Обозначим через r – доходность безрискового актива. Цена рискового актива является случайной величиной и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $dS(t) = aS(t) dt + \sigma S(t) d\omega(t)$, где a – среднее значение доходности рискового актива $S(t)$, σ – волатильность, $\omega(t)$ – винеровский процесс. Далее в основном будем считать, что $a > r$. Капитал портфеля $W(t)$ удовлетворяет уравнению [3]

$$dW(t) = h(u)W(t) dt + \sigma u(t)W(t) d\omega(t), \quad W(0) = W_0, \quad (2)$$

где W_0 – начальный капитал; $h(u) = (a - r)u + r$.

Уравнение (2) относится к уравнениям квазилинейного типа, для которых характерно то, что уравнения для первых двух моментов образуют замкнутую систему [4]. Если обозначить через $m(t)$ и $M(t)$ первые два начальных момента процесса $W(t)$, то они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{m} &= h(u)m, \quad m(0) = W_0, \\ \dot{M} &= g(u)M, \quad M(0) = W_0^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $g(u) = 2h(u) + \sigma^2 u^2$.

Если управление $u(t)$ задано, то решение уравнений (3) можно записать в виде

$$m(t) = W_0 \exp \int_0^t h(u) dt, \quad (4)$$

$$M(t) = W_0^2 \exp \int_0^t g(u) dt = m^2(t) \exp \sigma^2 \int_0^t u^2 dt.$$

Можно рассмотреть разные задачи об оптимальном управлении портфелем.

ТЕРМИНАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1. Найти такую функцию $u(t)$, при которой значение $m(T)$ максимально. Здесь T – заданный момент времени.

Эта задача решается просто. Так как темп роста среднего капитала определяется функцией $h(u)$, то оптимальное управление равно

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } r > a, \\ 1 & \text{при } r < a. \end{cases} \quad (5)$$

Однако при таком решении возможна большая дисперсия значения $W(T)$. Чтобы ее уменьшить, рассматриваются другие задачи. Основная идея состоит в том, чтобы при большом $W(t)$ выбирать управление $u(t)$ достаточно малым, чтобы уменьшить случайную составляющую в (2). Однако при малом σ управление (5) должно давать хороший результат.

Задача 2. На интервале времени $[0, T]$ найти такую функцию $u(t)$, при которой максимально значение

$$J = E\{(W(T) - f^*)\} = M(T) - 2m(T)f^* + f^{*2}, \quad (6)$$

где $E\{\}$ означает математическое ожидание; f^* – желаемое значение конечного капитала $W(T)$.

Решение выполним с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Для этого введем вспомогательные переменные $p_1(t)$ и $p_2(t)$ и на основании уравнений (3) составим функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} H(m, M, p_1, p_2, u) &= p_1 h(u)m + p_2 g(u)M = \\ &= H_0 + H_1 u + H_2 u^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$H_0 = rs, \quad H_1 = (a - r)s, \quad H_2 = \sigma^2 p_2 M, \quad s = p_1 m + 2p_2 M. \quad (8)$$

Переменная $p_1(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\dot{p}_1 = -\partial H / \partial m = -h p_1, \quad p_1(T) = 2f^*, \quad (9)$$

а переменная $p_2(t)$ – уравнению

$$\dot{p}_2 = -\partial H^* / \partial M = -g p_2, \quad p_2(T) = -1. \quad (10)$$

Решение этих уравнений равно

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 2f^* \exp \int_t^T h(u) dt, \\ p_2(t) &= -\exp \int_t^T g(u) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Если не учитывать ограничение (1), то максимум функции H по u достигается при

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\frac{H_1}{2H_2} = -\left(\frac{a-r}{\sigma^2}\right) \frac{s(t)}{2p_2(t)M(t)} = \\ &= -\left(\frac{a-r}{\sigma^2}\right) \left(\frac{p_1(t)m(t)}{2p_2(t)M(t)} + 1\right). \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом ограничения (1) оптимальное управление равно

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } u^*(t) < 0, \\ u^*(t) & \text{при } 0 < u^*(t) < 1, \\ 1 & \text{при } 1 < u^*(t). \end{cases} \quad (13)$$

Как известно, управление можно искать в программной форме и в форме обратной связи. Если строить управление в программной форме, то можно получить следующее. Учитывая (3), (9) и (10), можно получить, что производная функции s равна нулю, т.е. эта функция постоянная. Ее можно взять, например, при $t=T$ в виде

$$s = 2f^*m(T) - 2M(T). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (12), получаем

$$u^*(t) = \frac{a-r}{\sigma^2} \left[\frac{f^* m(T)}{M(T)} - 1 \right]. \quad (15)$$

Таким образом получается, что программное оптимальное управление является постоянным. Если управление на интервале $[0, T]$ постоянно, то функционал (6) с учетом (4) записывается в виде

$$J(u) = W_0^2 e^{2h(u)T + \sigma^2 u^2 T} - 2W_0 f_T e^{h(u)T} + f_T^2. \quad (16)$$

Остается только найти значение u , удовлетворяющее условию (1), которое дает минимум этой функции.

Эту задачу можно решить относительно нетрудно. Если $\sigma^2 T$ мало, то минимум (16) достигается при

$$u^* = \frac{\frac{1}{T} \ln \frac{f^*}{W_0} - r}{a-r}. \quad (17)$$

Управление в форме обратной связи можно построить следующим образом. В (12) входят значения переменных $m(t)$ и $M(t)$, которые не измеряются и не известны. Поэтому их можно заменить на текущие значения $W(t)$ и $W^2(t)$, которые измеряются в каждый момент времени. Получаем

$$u^*(t) = \frac{a-r}{\sigma^2} \left[\frac{q(t)}{W(t)} - 1 \right], \quad (18)$$

где $q(t) = -\frac{p_1(t)}{2p_2(t)}$. Подставляя сюда (11), получаем

$$q(t) = f^* \exp \left\{ -\int_t^T (h(u) + \sigma^2 u^2) dt \right\}. \quad (19)$$

Выражение (18) с учетом (19) и определяет закон управления в форме обратной связи.

ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ

Задача 3. На интервале времени $[0, T]$ найти функцию $u(t)$, при которой максимально значение функционала

$$J = E \left\{ \int_0^T (W(t) - f(t))^2 dt \right\} = \int_0^T (M(t) - 2m(t)f(t) + f^2(t)) dt, \quad (20)$$

где, как и раньше, $E\{\}$ означает математическое ожидание; $f(t)$ – желаемый рост капитала.

Решение выполним с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Для этого введем вспомогательные переменные $p_1(t)$ и $p_2(t)$ и на основании уравнений (3) и функционала (20) составим функцию Гамильтона $H(m, M, p_1, p_2, u) = p_1 h(u)m + p_2 g(u)M - M + 2mf - f^2 = H_0 + H_1 u + H_2 u^2$. (21)

Переменная $p_1(t)$ должна удовлетворять уравнению $\dot{p}_1 = -\partial H / \partial m = -hp_1 - 2f$, $p_1(T) = 0$, (22)

а переменная $p_2(t)$ – уравнению $\dot{p}_2 = -\partial H^* / \partial M = -gp_2 + 1$, $p_2(T) = 0$. (23)

Решение этих уравнений равно

$$p_1(t) = 2 \int_t^T f(\tau) \left[\exp \int_t^\tau h(u) d\xi \right] d\tau, \quad (24)$$

$$p_2(t) = - \int_t^T \exp \int_t^\tau g(u) d\xi d\tau.$$

Оптимальное управление, получаемое из условия максимума функции H , определяется из (12) и (13). Подставляя в (12) выражения (24), можно получить уп-

равление в программной форме. Причем в отличие от предыдущего случая, это управление уже зависит от t . Однако больший интерес представляет управление в форме обратной связи. Повторяя предыдущие рассуждения, можно получить, что закон управления в форме обратной связи имеет вид (18) с учетом (13), где теперь

$$q(t) = \frac{\int_t^T f(\tau) \exp \left[\int_t^\tau h(u) d\xi \right] d\tau}{\int_t^T \exp \left[\int_t^\tau g(u) d\xi \right] d\tau}. \quad (25)$$

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из (18) следует, что величина $u^*(t)$ убывает с ростом капитала $W(t)$. Более того, $u(t) = 0$ при $q(t)/W(t) < 1$. Однако здесь еще остается проблема с коэффициентом $q(t)$, который зависит от управления, которое будет использоваться в будущем на интервале $[t, T]$. Такая ситуация достаточно обычная в теории оптимального управления. Чтобы оценить значение этого коэффициента, можно предположить, что на интервале $[t, T]$ управление постоянно. Тогда для задачи 2 из (19) получаем

$$q(t) = f^* e^{-(h(u) + \sigma^2 u^2)(T-t)}. \quad (26)$$

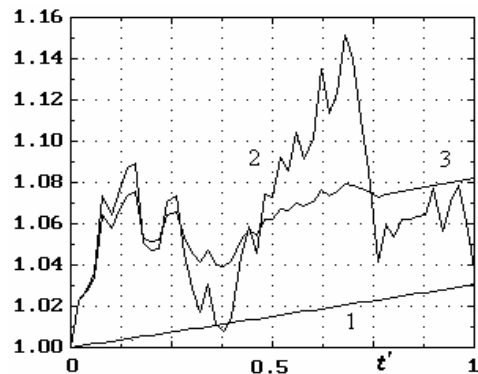
Если в задаче 3 считать, что $f(t) = f^*$, то из (25) получаем

$$q(t) = f^* \frac{g(u) e^{h(u)(T-t)} - 1}{h(u) e^{g(u)(T-t)} - 1}. \quad (27)$$

Причем в обоих случаях при малом $T - t$ величина $q(t)$ близка к f^* . Однако в любом варианте величина $q(t)$ остается достаточно неопределенной. Поэтому в какой-то мере ее нужно выбирать экспериментально. Ниже приводятся результаты моделирования для различных вариантов выбора этого коэффициента.

МОДЕЛИРОВАНИЕ

Проведено моделирование задачи слежения при следующих значениях: $a = 0,5$; $r = 0,08$; $W_0 = 1$; $T = 1$; $f(t) = W_0 e^{\mu t}$; $\mu = 0,3$. При этом при расчете разных кривых используется одна и та же реализация процесса $\omega(t)$. Результаты представлены на рисунке.



Здесь кривая 1 – $u(t) = 0$ (безрисковое управление), кривая 2 – $u(t) = 1$ (весь капитал вкладывается в рисковом актив), кривая 3 – управление вычисляется по формуле (18) с учетом (13) и (27). Видно, что в интервале времени $[t', T]$ управление становится безрисковым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герасимов Е.С., Домбровский В.В.* Динамическая сетевая модель управления инвестициями при квадратичной функции риска // *АиТ*. 2002. № 2. С. 119–128.
2. *Смагин В.И.* Дискретное локально-оптимальное управление портфелем ценных бумаг // *Вестник ТГУ*. 2002.
3. *Merton R.C.* Continuous-time finance. Cambr. MA. Blackwell, 1990.
4. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио. 1976. С. 178.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 26 апреля 2004 г.