УДК 548.12

УПОРЯДОЧЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ ПОЛИЭДРОВ

Ю. Л. Войтеховский
ФГБУН Геологический институт КНЦ РАН

Аннотация

Предложен способ именования любого выпуклого полиэдра в виде числа-кода, по которому он восстанавливается однозначно. По именам многообразие выпуклых полиэдров строго упорядочивается. Установлены некоторые соотношения между именами и традиционными характеристиками выпуклых полиэдров, например, порядком группы автоморфизмов.

Ключевые слова:

выпуклые полиэдры, асимметрия, порядок группы автоморфизмов, упорядочение.

ORDERING OF CONVEX POLYHEDRA

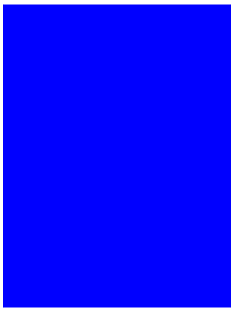
Yury L. Voytekhovsky
Geological Institute of the KSC of the RAS

Abstract

The method to name any convex polyhedron by the numerical code is suggested in the paper. A polyhedron is uniquely fixed and can be built by its name. The variety of convex polyhedra is strictly ordered by their names. Some relationships between the names of convex polyhedra and their traditional characteristics, e.g. automorphism group orders, are found.

Keywords:

convex polyhedra, asymmetry, automorphism group order, ordering.

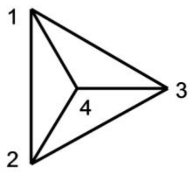


Введение

В работах [1–10] перечислены все комбинаторные типы выпуклых 4- … -12-эдров и простых (в каждой вершине сходятся ровно 3 грани) 13- … -16-эдров. Каждый тип охарактеризован не только порядком группы автоморфизмов (т. е. числом переименований вершин, сохраняющих их смежность), но и точечной группой симметрии, что делает результаты применимыми в кристаллографии. При этом установлен ряд обескураживающих фактов. Во-первых, подавляющее большинство (99.5 % для 16-эдров) форм комбинаторно асимметричны, т. е. относятся к примитивному виду симметрии триклинной сингонии. С ростом n «почти все» n-эдры комбинаторно асимметричны. Это перекликается с недавно отмеченной А. П. Хомяковым «кубо-триклинной инверсией» в открытии новых минеральных видов и, возможно, фиксирует соответствие природных кристаллических полиэдров фундаментальной характеристике евклидова пространства. Во-вторых, указанием набора граней и точечной группы симметрии комбинаторный тип полиэдра в общем случае не фиксируется. Его лучшим описанием остаётся изображение, например, в проекции на одну из граней [1, 2]. Изложенное ставит задачу однозначного и конструктивного описания любого выпуклого полиэдра, позволяющего по имени восстановить его комбинаторный тип. А поскольку асимптотически «почти все» они комбинаторно асимметричны, то речь идет о позитивном (без отрицающего «а») определении свойства, называемого асимметричностью.

Как назвать выпуклый полиэдр?

Простейший в 3D выпуклый полиэдр – тетраэдр (симплекс). Его комбинаторный тип следует из имени. Но следует не с очевидностью, позволяющей нарисовать его рёберный граф, зная имя, а с помощью дополнительной информации о геометрии пространства. С ростом числа граней комбинаторное разнообразие полиэдров быстро растет: 5-эдров – 2 (3-гранная призма и 4-гранная пирамида), 6-эдров – 7 (3 имеют имена: куб, 3-гональная бипирамида, 5-гранная пирамида), 7-эдров – 34, 8-эдров – 257, 9-эдров – 2606, 10-эдров – 32300, 11-эдров – 440564, 12-эдров – 6384634 и т. д. С ростом числа граней всё меньше полиэдров имеют имена. Асимптотически «почти все» они безымянны. Имена есть лишь у специфических форм, например, у полиэдров Платона, Архимеда, Каталани. В кубической сингонии приняты «конструктивные» кристаллографические имена: тригон-тритетраэдр, тетрагон-тритетраэдр, пентагон-тритетраэдр, тригон-гексатетраэдр, тригон-гексоктаэдр и т. д. Чтобы сконструировать эти формы, нужно знать алгоритм. Так, тригон-гексоктаэдр означает, что над каждой гранью октаэдра надстроена «пирамидка» из шести (гекс) треугольников (тригонов). Этот 48-эдр – самый многогранный среди простых форм кубической сингонии и, по-видимому, самый симметричный среди выпуклых 48-эдров. Из сказанного следует, что данная область знания математиками систематически не охвачена. А в кристаллографии она содержится в самой «поверхностной» (занятой описанием поверхности кристаллов) части – кристалломорфологии.



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Построение имени тетраэдра через матрицу смежности

Между тем почти очевиден способ численного описания полиэдра. Рассмотрим рёберный граф тетраэдра (рис. 1). Нумеруем его вершины. Из-за его высокой симметрии и малого числа вершин все нумерации эквивалентны. Строим матрицу смежности, симметричную относительно диагонали, заполненной нулями. Для определённости оставим верхний треугольник, который выпишем построчно. Полученный двоичный код и есть имя тетраэдра, оно короче в десятичной системе:

$$111111 = 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 \rightarrow 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 63.$$

Ясно, что по нему тетраэдр восстанавливается однозначно: переводим имя из десятичной системы в двоичную, заполняем верхний треугольник матрицы смежности (снизу вверх), достраиваем её, рисуем по ней реберный граф. Заметим, что предложенная форма описания рассматривает полиэдр как многовершинник (полиакрон).

Сколько имен у *n*-вершинника?

Для полиэдра с большим числом вершин при их различных нумерациях получаются различные матрицы смежности и имена. Для 5-вершинников возможны $5! = 120$ нумераций вершин. Но 4-гранная пирамида имеет точечную группу симметрии 4mm с порядком группы автоморфизмов 8. Поэтому неэквивалентных нумераций вершин и имен у неё будет $120 : 8 = 15$ (рис. 2). Для 3-гональной бипирамиды (второй возможный 5-вершинник, точечная группа симметрии -6m2, порядок группы автоморфизмов 12) число имен равно $120 : 12 = 10$. Приведенное рассуждение обобщается: у n-вершинника $n! / p$ имен, где p – порядок группы автоморфизмов. (Для рассмотренного выше тетраэдра с точечной группой симметрии -43m получим: $n! / p = 4! / 24 = 1$ – единственное имя).

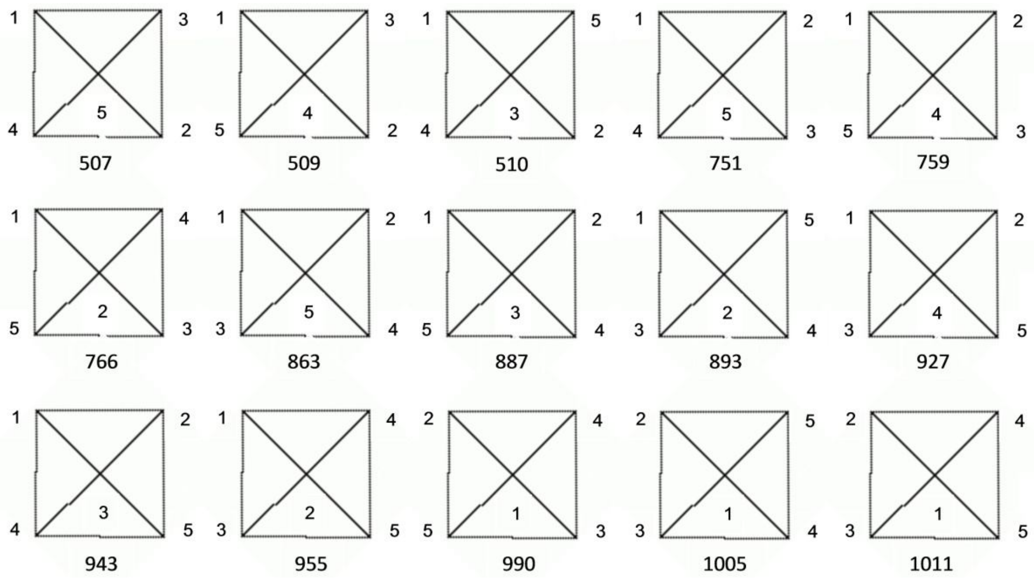


Рис. 2. 15 имен 4-гранной пирамиды, упорядоченных по возрастанию, и соответствующие нумерации вершин

Из общего правила следует, что у комбинаторно асимметричных n-вершинников ($p = 1$) число имен равно n! Этот лежащий на поверхности результат интересен тем, что выражает свойство асимметричности полиэдра не через отрицание (отсутствие) симметричности, а через независимую характеристику (число вершин) и процедуру построения матрицы смежности, тоже не требующую теоретико-групповых преобразований. В указанном смысле асимметричный полиэдр факториален, симметричный – афакториален. Число имён n-вершинника – показатель его симметричности: при данном n, чем больше имён, тем ниже симметрия.

Какое имя выбрать?

Ответ зависит от решаемой задачи. Минимальное (min) имя удобно для краткого описания полиэдра. Максимальное (max), возможно, указывает на сложность его строения в том же смысле, что и порядки групп автоморфизмов. На это указывает и число имён полиэдра. Можно предположить, что смысл содержится и в диапазоне, охватываемом именами данного полиэдра. Очевидно, по минимальным и максимальным (а также любым другим) именам полиэдры можно строго упорядочить. Но что это упорядочение несёт с собой? С целью первичного анализа данных упорядочим n-вершинники по минимальным и максимальным именам. Для удобства изображения и характеристики даны на рис. 3.

5-вершинники (по min именам): 507 / 1011 (8), 511 / 1022 (12). Одновременно они упорядочились по max именам и порядкам групп автоморфизмов (в скобках). Диапазоны имён перекрываются.

6-вершинники (по min именам): 7915 / 32531 (10), 7916 / 29327 (12), 7917 / 31571 (2), 7919 / 32681 (2), 7934 / 31582 (4), 7935 / 32754 (4), 16350 / 31583 (48). Они же (по max именам): 7916 / 29327 (12), 7917 / 31571 (2), 7934 / 31582 (4), 16350 / 31583 (48), 7915 / 32531 (10), 7919 / 32681 (2), 7935 / 32754 (4). Связь упорядочений и порядков групп автоморфизмов не подтвердилась, диапазоны имён перекрываются для любых двух полиэдров.

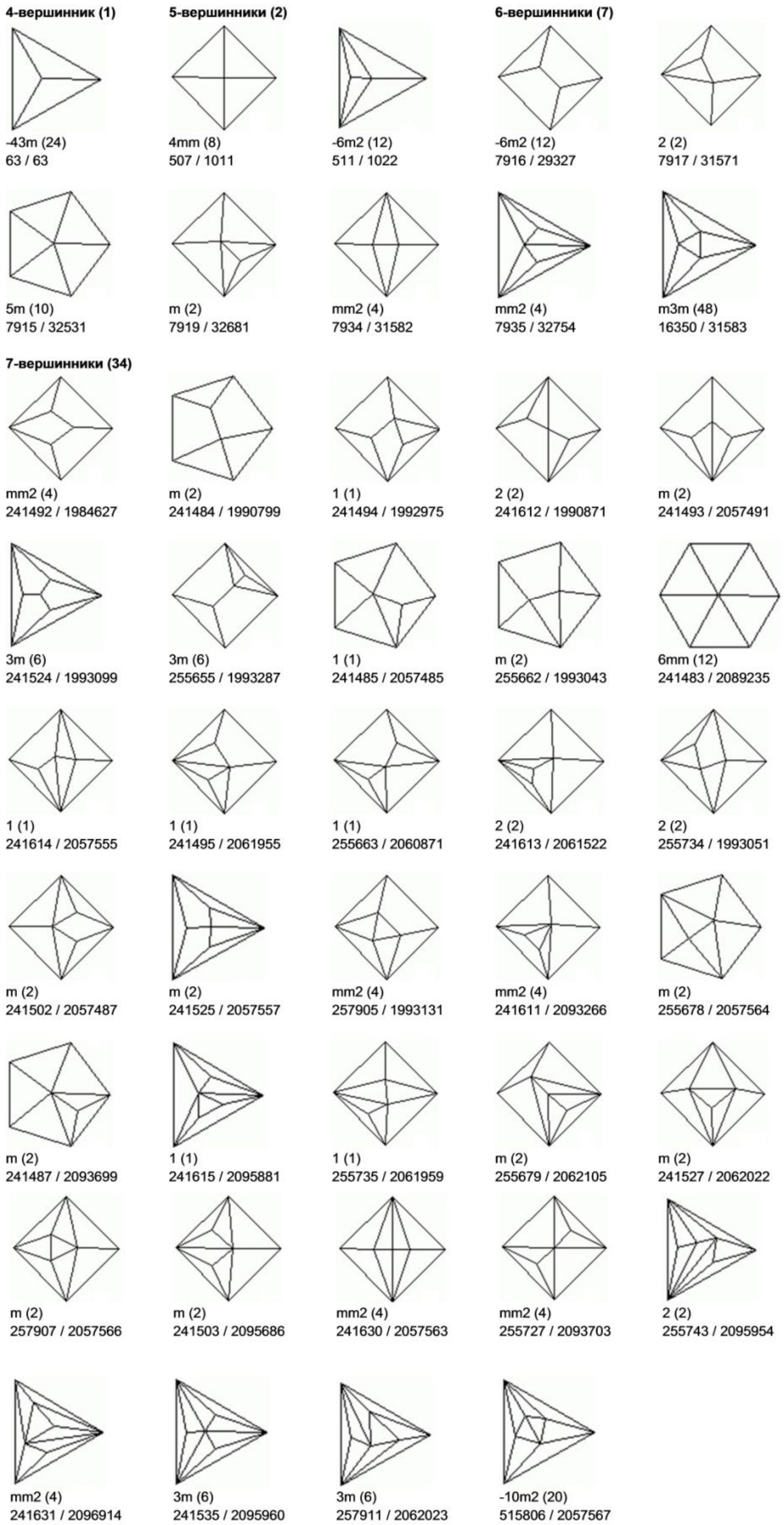


Рис. 3. Все 4- … 7-вершинники в проекции на одну из граней, их точечные группы симметрии (в международной нотации), порядки групп автоморфизмов (в скобках), min и max имена (через слеш)

7-вершинники (по min именам): 241483 / 2089235 (12), 241484 / 1990799 (2), 241485 / 2057485 (1), 241487 / 2093699 (2), 241492 / 1984627 (4), 241493 / 2057491 (2), 241494 / 1992975 (1), 241495 / 2061955 (1), 241502 / 2057487 (2), 241503 / 2095686 (2), 241524 / 1993099 (6), 241525 / 2057557 (2), 241527 / 2062022 (2), 241535 / 2095960 (6), 241611 / 2093266 (4), 241612 / 1990871 (2), 241613 / 2061522 (2), 241614 / 2057555 (1), 241615 / 2095881 (1), 241630 / 2057563 (4), 241631 / 2096914 (4), 255655 / 1993287 (6), 255662 / 1993043 (2), 255663 / 2060871 (1), 255678 / 2057564 (2), 255679 / 2062105 (2), 255727 / 2093703 (4), 255734 / 1993051 (2), 255735 / 2061959 (1), 255743 / 2095954 (2), 257905 / 1993131 (4), 257907 / 2057566 (2), 257911 / 2062023 (6), 515806 / 2057567 (20).

Они же (по max именам): 241492 / 1984627 (4), 241484 / 1990799 (2), 241612 / 1990871 (2), 241494 / 1992975 (1), 255662 / 1993043 (2), 255734 / 1993051 (2), 241524 / 1993099 (6), 257905 / 1993131 (4), 255655 / 1993287 (6), 241485 / 2057485 (1), 241502 / 2057487 (2), 241493 / 2057491 (2), 241614 / 2057555 (1), 241525 / 2057557 (2), 241630 / 2057563 (4), 255678 / 2057564 (2), 257907 / 2057566 (2), 515806 / 2057567 (20), 255663 / 2060871 (1), 241613 / 2061522 (2), 241495 / 2061955 (1), 255735 / 2061959 (1), 241527 / 2062022 (2), 257911 / 2062023 (6), 255679 / 2062105 (2), 241483 / 2089235 (12), 241611 / 2093266 (4), 241487 / 2093699 (2), 255727 / 2093703 (4), 241503 / 2095686 (2), 241615 / 2095881 (1), 255743 / 2095954 (2), 241535 / 2095960 (6), 241631 / 2096914 (4). Связь упорядочений и порядков групп автоморфизмов не подтвердилась. Это хорошо видно по асимметричным полиэдрам (подчёркнуты), распределённым в многообразии равномерно. То есть, если min (max) имя полиэдра указывает на его меньшую или большую сложность, то это не та сложность, которая схвачена порядком его группы автоморфизмов: симметричный полиэдр – прост, асимметричный – сложен. Диапазоны имён перекрываются для любых двух полиэдров.

Упорядочение классов

Рассмотрим диапазоны имен для 4- … 7-вершинников: [63], [507, 1022], [7915, 32754], [241483, 2096914]. Как видим, они не перекрываются. Нетрудно показать, что это верно в общем случае и ведет к упорядочению классов n-вершинников, а именно: при любом упорядочении n-вершинников внутри классов диапазоны имен для разных n не перекрываются. Обозначим max имя n-вершинника $N(n)_{\max}$, min имя $(n + 1)$-вершинника $N(n + 1)_{\min}$. Первое оценим сверху, второе – снизу.

$N(n)_{\max}$ не превосходит имени, составленного из единиц, заполняющих верхний треугольник матрицы смежности:

$$N(n)_{\max} \le 1 + 10 + \ldots + 10^{n(n-1)/2-1} = [10^{n(n-1)/2} - 1] / 9.$$

Точная оценка достигается, по-видимому, только для имени тетраэдра (рис. 1).

Чтобы построить нижнюю оценку для $N(n + 1)_{\min}$, заметим, что в каждой вершине полиэдра сходятся не менее трёх рёбер. Поставив в конце первой строки матрицы смежности три единицы и заполнив верхний треугольник нулями, построим имя, являющееся нижней оценкой для $N(n+1)_{\min}$. Более того, оставим лишь последнюю единицу, что даёт весьма грубую, но достаточную оценку $10^{n(n-1)/2}$:

$$N(n)_{\max} \le [10^{n(n-1)/2} - 1] / 9 < 10^{n(n-1)/2} < N(n + 1)_{\min} ,$$

что и требовалось доказать.

Заключение

Предложенный метод именования выпуклого полиэдра через матрицу смежности выявил три интересных факта.

1. Полиэдр однозначно восстанавливается по любому имени.

2. Число имен n-вершинника равно $n! / p$, где p – порядок группы автоморфизмов. Тем самым ускользающая от конструктивного определения категория асимметричности полиэдра

выражается через его независимую и фундаментальную характеристику – число вершин. Асимметричный полиэдр факториален, симметричный – афакториален.

3. При любом упорядочении полиэдров в классе (при данном *n*) классы упорядочиваются без перекрытий. Упорядочения в классе по min и max именам, а также порядкам групп автоморфизмов на первый взгляд не согласуются. Это означает лишь, что связь между ними пока не найдена. Но она должна быть, поскольку имя полиэдра определяет его со всеми комбинаторными свойствами. И это определяет заманчивую перспективу дальнейших исследований.

Благодарность

Автор благодарит к.г.-м.н. Д. Г. Степенщикова за компьютерный расчет имен 7-вершинников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войтеховский Ю. Л., Степенщиков Д. Г.* Комбинаторная кристалломорфология. Кн. IV. Выпуклые полиэдры. Т. I. 4- … 12-эдры. Апатиты: КНЦ РАН, 2008. 833 с. **2**. *Войтеховский Ю. Л., Степенщиков Д. Г.* Комбинаторная кристалломорфология. Кн. IV. Выпуклые полиэдры. Т. II. Простые 13- … 16-эдры. Апатиты: КНЦ РАН, 2008. 828 с. **3**. *Voytekhovsky Y. L.* On the symmetry of 4- to 11-hedra // Acta Cryst. 2001. A 57. P. 112–113. **4**. *Voytekhovsky Y. L.* The Fedorov algorithm revised // Acta Cryst. 2001. A 57. P. 475–477. **5**. *Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G.* On the symmetry of 9- and 10-hedra // Acta Cryst. 2002. A 58. P. 404–407. **6**. *Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G.* On the symmetry of simple 12- and 13-hedra // Acta Cryst. 2002. A 58. P. 502–505. **7**. *Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G.* On the symmetry of 11-hedra // Acta Cryst. 2003. A 59. P. 195–198. **8**. *Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G.* On the symmetry of simple 14- and 15-hedra // Acta Cryst. 2003. A 59. P. 367–370. **9**. *Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G.* The variety of convex 12-hedra revised // Acta Cryst. 2005. A 61. P. 581–583. **10**. *Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G.* On the symmetry of simple 16-hedra // Acta Cryst. 2006. A 62. P. 230–232.

Сведения об авторе

Войтеховский Юрий Леонидович – доктор геолого-минералогических наук, профессор, директор ФГБУН Геологического института Кольского научного центра РАН;
e-mail: woyt@geoksc.apatity.ru

Information about the author

Yury L. Voytekhovsky – Dr. Sci. (Gelogy & Mineralogy), Professor; Director of the Geological Institute of the KSC of the RAS;
e-mail: woyt@geoksc.apatity.ru

Библиографическое описание статьи

Войтеховский Ю. Л. Упорядочение выпуклых полиэдров / Ю. Л. Войтеховский // Вестник Кольского научного центра РАН. – 2016. – № 1. – С. 37–43.

Bibliographic Description

Yury L. Voytekhovsky. Ordering of Convex Polyhedra. *Herald of the Kola Science Centre of the RAS*, 2016, vol. 1, pp. 37-43.