УДК: 519.833.2

MSC2010: 91A10

УЧЕТ ИМПОРТА В ДУОПОЛИИ КУРНО

© В. И. Жуковский

Московский Государственный университет им. В.М. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
Ленинские горы, МГУ,ВМК, 2-ой учебный корпус, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

© Т. В. Макаркина

Московский государственный областной гуманитарный институт
факультет информатики
ул. Зеденая, д.22, 1 учебный корпус, г.Орехово-Зуево, Московская область,142600,
Российская Федерация
e-mail: *tatmak147@yandex.ru*

Import accounting in Kurno duopoly.

Zhukovskiy V. I., Makarkina T. V.

Abstract.

The competition of two firms on the market of one product with regard to import is considered. The particular volume of product supplied to the market by the importer is unknown to both producers. They know only restrictions about volume of import defined by the market. Non-cooperative game of two persons under uncertainty will serve as a mathematical model where "the role"of uncertainty "plays"the quantity of export goods, "the role"of players strategy - the quantity of goods supplied by them on the sale, payoff function - the income of the player. Two notions of guaranteed decision of players - strictly guaranteed (Nash) equilibrium and (Pareto) quaranteed equilibrium are used. The first one is on the boundary of the concept of maximin and Nash equilibrium, the second one - of Pareto minimum and Nash equilibrium decision. In this paper for stated mathematical Kurno model with regard to import the explicit form of both guaranteed equilibrium is found. Let us imagine that two companies (designated I and II respectively) compete in the market of the product. The volume of produced by them during a certain (specified a priori) period of time output is denoted by x_1 and x_2 respectively. At the same time there appears an importing company on the market, the managers of the companies I and II do not have any information about purposes and volume of goods produced by it. They can only consider that the volume of goods produced by the importer is nonnegative quantity $y \in [0, +\infty)$. The i-production costs are assumed to be linearly dependent on the amount of output x_i $(i = 1, 2)$ and can be represented as $cx_i + d$, c and d here are respectively variable and constant costs (for example, variable costs include the costs to workers wages, the purchase of raw materials, depreciation of equipment, constant costs – rent of premises, land, machinery, licenses etc.). Depending on the demand the price of product is determined on the market, this

price we also consider as linearly dependent on the amount of $\bar{x} = x_1 + x_2 + y$ goods entered on sale. The price of goods we represent in the form $p(\bar{x}) = a - b\bar{x}$, where $a = const > 0$ - the initial price of goods, and constant positive elasticity coefficient $b > 0$ shows how much the price is "falling"when a unit of production is on sale. Suppose that the price is determined so that to equalize supply and demand. Let each of the firms sells all that it produces, then the proceeds of the first company is $p(\bar{x})x_1 = (a - b\bar{x})x = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_1$, and its profit (proceeds minus costs) is $\psi_1(x_1, x_2, y) = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_1 - (cx_1 + d) = ax_1 - bx_1^2 - bx_1x_2 - byx_1 - cx_1 - d$, at the same time the second company's profit is $\psi_2(x_1, x_2, y) = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_2 - (cx_2 + d) =$ $= ax_2 - bx_1x_2 - bx_2^2 - byx_2 - cx_2 - d$.

By determining the amount of production, the management of the manufacturing company is forced to rely not only on the "rational"choice of the competitor, but also on the possibility of implementing any in advance unpredictable uncertainty values - y volume supplied to the import market. Following the principle guaranteed result by Germeier Yu. B., we will assume that when choosing a production volume x_i $(i = 1, 2)$ i-manufacturer is focused on maximizing the function $F_i(x_1, x_2, y) = \phi_i(x_1, x_2, y) + by^2$. In this case the first term is a function of profit, and the second "compels"when choosing decision to focus on "maximum resistance to uncertainty".

Key words: Nash equilibrium, Pareto minimality, guaranteed decisions.

Введение

Представим, что две фирмы (обозначенные соответственно I и II) конкурируют на рынке одного продукта. Объем произведенной ими за некоторый (заданный априори) промежуток времени продукции обозначим через x_1 и x_2 соответственно. Одновременно с этим на рынке появляется компания-импортер, о целях и объемах представляемой им продукции руководство компаний I и II не имеют никакой информации. Они могут считать лишь, что объем представляемого импортером товара является некоторой неотрицательной величиной $y \in [0, +\infty]$. *Издержки* i-го производства предполагаются линейно зависимыми от количества выпущенной продукции x_i $(i = 1, 2)$ и могут быть представлены в виде $cx_i + d$, здесь c и d соответственно переменные и постоянные издержки (к переменным издержкам относятся, например, затраты на зарплату рабочих, на закупку сырья, на амортизацию оборудования, к постоянным - аренда помещений, земли, станков, лицензий и т.п.). На рынке в зависимости от спроса устанавливается цена продукции, которую также считаем линейно зависящей от количества $\bar{x} = x_1 + x_2 + y$ поступившего на продажу товара. Цену товара представляем в виде $p(\bar{x}) = a - b\bar{x}$, где $a = const > 0$ – начальная цена товара, а постоянный положительный коэффициент эластичности $b > 0$ показывает, на сколько "падает"цена при поступлении в продажу единицы продукции. Предположим, что цена определяется так, чтобы уравнять спрос и предложение. Пусть каждая из фирм продает все, что она производит, тогда выручка первой фирмы будет

$$p(\bar{x})x_1 = (a - b\bar{x})x = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_1,$$

а ее прибыль (выручка минус издержки) составит

$$\psi_1(x_1, x_2, y) = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_1 - (cx_1 + d) =$$
$$= ax_1 - bx_1^2 - bx_1x_2 - byx_1 - cx_1 - d, \qquad (1)$$

одновременно прибыль второго

$$\psi_2(x_1, x_2, y) = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_2 - (cx_2 + d) =$$
$$= ax_2 - bx_1x_2 - bx_2^2 - byx_2 - cx_2 - d. \qquad (2)$$

Определяя объем производства, руководство фирмы-производителя вынуждено ориентироваться не только на "рациональный"выбор конкурента, но и на возможность реализации любого, заранее непредсказуемого значения неопределенности - объема y поставленного на рынок импорта. Следуя принципу гарантированного результата по Ю.Б.Гермейеру [1], будем считать, что при выборе объемов производства x_i $(i = 1, 2)$ i-ый производитель ориентируется на максимизацию функции

$$F_i(x_1, x_2, y) = \psi_i(x_1, x_2, y) + by^2. \qquad (3)$$

При этом первое слагаемое в (3) представляет собой функцию прибыли, а второе "вынуждает" при выборе решения ориентироваться на "максимальное противодействие неопределенности".

Замечание 1. Появление последнего слагаемого в (3) можно объяснить и следующим образом. Для каждого игрока i $(i = 1, 2)$ фактически рассматривается двухкритериальная задача: первый критерий - это его прибыль $\psi_i(x_1, x_2, y)$, второй связан с идеями принципа гарантированного результата: принимать i-му игроку решения рекомендуется в условиях, когда неопределенность "стремится максимально напортить жизнь"этому игроку, то есть принимает "самые большие"из возможных значений. Эта рекомендация и приводит ко второму критерию by^2, который i-ый игрок также стремится увеличить. Итак в двухкритериальной задаче, возникающей для каждого игрока, у него два критерия, которые он желает увеличить - прибыль и by^2. Линейная их свертка с положительными коэффициентами (здесь единицы) и приводит к (3), а чтобы для оговариваемой двухкритериальной задачи добиться максимума по Парето, то достаточно эту линейную свертку "максимизировать".

Упорядоченная четверка

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{X_i = [0, +\infty)\}_{i=1,2}, \{Y = [0, +\infty)\}, \{F_i(x, y) \div (3)\}_{i=1,2} \rangle$$

образует бескоалиционную игру двух лиц при неопределенности. Здесь 1 и 2 - порядковые номера игроков; стратегии игроков $x_i \in X_i = [0, +\infty)$. В результате выбора игроками своих стратегий складывается ситуация $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$. Независимо от выбора игроков реализуется некоторая неотрицательная неопределенность $y \in Y$. На множестве пар $(x, y) \in X \times Y$ определена функция выигрыша i-го игрока $F_i(x, y)$ из (3).

В настоящей статье используются два понятия: сильно гарантированное равновесие и Парето-гарантированное равновесие, предложенных в 2013 г. в серии статей [2], [3].

1. СИЛЬНО ГАРАНТИРОВАННОЕ РАВНОВЕСИЕ (СГР)

Понятие СГР лежит на стыке понятий максимина и равновесия по Нэшу.

Определение 1. *Сильно гарантированным равновесием (СГР) игры* Γ *назовем тройку* $(x^H, F_1^H, F_2^H) \in X \times R^2$, *для которой существуют две функции* $y^{(i)}(x) : X \to Y$ *такие, что,*

во-первых, для каждой ситуации $x \in X$ *стратегическая неопределенность* $y^{(i)}(x) : X \to Y$ *является минимальной в задаче*

$$< Y, F_i(x, y) > \quad (i = 1, 2),$$

т.е.

$$\min_{y \in Y} F_i(x, y) = F_i(x, y^{(i)}(x)) = F_i[x] \quad \forall x \in X \quad (i = 1, 2); \tag{4}$$

во-вторых, ситуация $x^H = (x_1^H, x_2^H)$ *является равновесной по Нэшу в „игре гарантий“*

$$\Gamma_g = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{F_i[x]\}_{i=1,2} \rangle ,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \max_{x_1 \in X_1} F_1[x_1, x_2^H] &= F_1[x_1^H, x_2^H] = F_1^H, \\ \max_{x_2 \in X_2} F_2[x_1^H, x_2] &= F_2[x_1^H, x_2^H] = F_2^H. \end{aligned} \tag{5}$$

Иерархическую интерпретацию СГР можно представить следующей двухуровневой трехшаговой иерархической игрой (см. рис.1). На верхнем уровне находятся два игрока и на первом ходу они посылают на нижний уровень свои возможные ситуации $x = (x_1, x_2) \in X$.

Второй ход за игроком нижнего уровня; он, во-первых, формирует для каждого $i = 1, 2$ и каждой ситуации $x \in X$ гарантии $F_i[x] \leq F_i(x, y)$ $\forall y \in Y$ $(i = 1, 2)$ и передает гарантии $F_i[x]$ на верхний уровень.

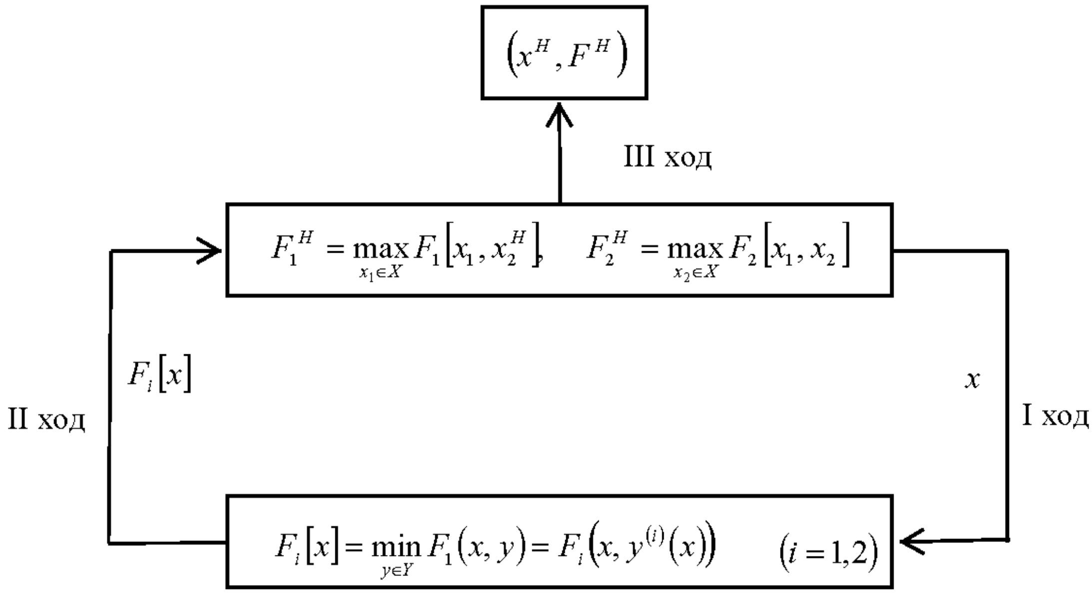

Рис. 1. Способ формирования СГР.

На *третьем ходу* игроки для "игры гарантий"

$$\Gamma_g = \langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{F_i[x]\}_{i=1,2} \rangle$$

находят ситуацию равновесия по Нэшу из (5) и выигрыши $F_i^H = F_i[x^H]$ $(i = 1,2)$. Пара $(x^H, F^H = (F_1^H, F_2^H))$ как раз и образует СГР игры Г.

Стратегии (x_1^H, x_2^H) предлагается игрокам применять при этом, ибо если в результате действий обоих игроков сложилась ситуация $x = (x_1, x_2)$, то $F_i(x,y) \geq F_i[x]$ $\forall y \in Y$ $(i = 1,2)$, т.е. ни при какой неопределенности $y \in Y$ выигрыш любого i-го игрока не может стать меньше его гарантии

$$F_i[x] = \min_{y \in Y} F_i(x,y) \quad (i = 1,2).$$

Следовательно, так как неопределенность y может принимать любые значения из Y, то при выборе своих стратегий из ситуации $x = (x_1, x_2)$ оба игрока могут твердо рассчитывать только на свою гарантию $F_i[x] (i = 1,2)$. А тогда естественно в качестве решения игры Г выбрать такие ситуации $x^H \in X$, которые реализуют равновесие по Нэшу для "игры гарантий"Γ_g. Итак, получили следующий *способ* построения СГР игры Г:

a) найти две скалярные функции $y^{(i)}(x) : X \to Y$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$$F_i[x] = \min_{y \in Y} F_i(x, y) = F_i(x, y^{(i)}(x)) \quad \forall x \in X \quad (i = 1, 2);$$

b) для полученной "игры гарантий" $\Gamma_g = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{F_i[x]\}_{i=1,2} \rangle$ построить x^H – ситуацию равновесия по Нэшу, определяемую равенствами (5).

Найденная в результате тройка (x^H, F_1^H, F_2^H) как раз и будет сильно гарантированным равновесием игры Γ.

Утверждение 1. *Если в игре Γ будет $b > 0$, $d < \frac{5(a-c)^2}{49b}$ и $a > c$, то сильно гарантированное равновесие имеет вид*

$$\left((x_1^H, x_2^H), (F_1^H, F_2^H)\right) = \left(\left(\frac{2(a-c)}{7b}, \frac{2(a-c)}{7b}\right), \left(\frac{5(a-c)^2}{49b} - d, \frac{5(a-c)^2}{49b} - d\right)\right).$$

Доказательство. Применим приведенную процедуру для игры Γ - математической модели дуополии Курно с учетом импорта. При этом будем следовать указанным выше шагам a) и b).

a) Для функции выигрыша 1-го игрока

$$F_1(x, y) = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_1 - (cx_1 + d) + by^2$$

построим функцию

$$y^{(1)}(x) = \arg\min_{y \in Y} F_1(x, y) \quad \forall x \in X.$$

Для этого достаточно, чтобы

$$\left.\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}\right|_{y^{(1)}(x)} = -bx_1 + 2by^{(1)}(x) = 0 \quad \forall x \in X,$$

$$\left.\frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y^{(1)}(x)} = 2b > 0.$$

Отсюда $y^{(1)}(x) = \frac{x_1}{2}$ и поэтому

$$F_1[x] = \min_{y \in Y} F_1(x, y) = F_1\left(x, y^{(1)})(x)\right) = \left[a - b\left(\frac{3x_1}{2} + x_2\right)\right] x_1 - (cx_1 + d) + \frac{bx_1^2}{4} =$$

$$= ax_1 - \frac{5}{4}bx_1^2 - bx_1x_2 - (cx_1 + d),$$

$$F_2[x] = \min_{y \in Y} F_2(x, y) = ax_2 - \frac{5}{4}bx_2^2 - bx_1x_2 - (cx_1 + d).$$

b) Требования (5) имеют место, если

$$\left.\frac{\partial F_1[x_1, x_2^H]}{\partial x_1}\right|_{x_1^H} = (a - c) - \frac{5}{2}bx_1^H - bx_2^H = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_1[x_1, x_2^H]}{\partial x_1^2} = -\frac{5}{2}b < 0,$$

$$\left.\frac{\partial F_2[x_1^H, x_2]}{\partial x_2}\right|_{x_2^H} = (a-c) - bx_1^H - \frac{5}{2}bx_2^H = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_2[x_1^H, x_2]}{\partial x_2^2} = -\frac{5}{2}b < 0.$$

Отсюда для нахождения $x^H = (x_1^H, x_2^H)$ получаем систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 & = & 2\frac{a-c}{b}, \\ 2x_1 + 5x_2 & = & 2\frac{a-c}{b}, \end{cases}$$

тогда

$$x_i^H = \frac{2}{7} \cdot \frac{a-c}{b} \quad (i = 1, 2),$$

и поэтому

$$F_i^H = F_i[x^H] = \frac{5(a-c)^2}{49b} - d \quad (i = 1, 2).$$

□

2. Парето-гарантированное равновесие (ПГР)

Гарантии F_i^H $(i = 1, 2)$, которые найдены в предыдущем разделе "самые маленькие". А ведь игроки стремятся к возможно большим выигрышам и, следовательно, к возможно большим гарантиям. Поэтому здесь будем использовать гарантии заведомо не меньшие, чем "диктуемые"определением 1.

Определение 2. *Парето-гарантированным равновесием (ПГР) игры* Γ *назовем тройку* $(x^e, \psi_1^e, \psi_2^e)$*, для которой существует функция* $y_P(x) : X \to Y$ *такая, что,*

во-первых, для каждой ситуации $x \in X$ *функция* $y_P(x)$ *является минимальной по Парето неопределенностью в двухкритериальной задаче*

$$\langle Y, \{F_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle\,,$$

полученной из Γ *при каждой фиксированной ситуации* $x = (x_1, x_2) \in X$*, т.е. при каждом "замороженном"*$x \in X$ *несовместна система неравенств*

$$F_i(x, y) \leq F_i(x, y_P(x)) \quad (i = 1, 2),$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое;

во-вторых, ситуация $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ *является равновесной по Нэшу в игре (без неопределенностей)*

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{F_i(x, y_P(x))\}_{i=1,2} \rangle\,,$$

полученной при подстановке в игру Γ *вместо неопределенности ее реализации* $y_P(x)$.

При этом x^e назовем *Парето-гарантирующей равновесной ситуацией, а* $F^e = (F_1^e, F_2^e)$, $F_i^e = F_i(x^e, y_P(x^e))$ $(i = 1, 2)$ *– соответствующей ей векторной гарантией игрока* i.

Парето-гарантированным равновесием (ПГР) дуополии Курно (с учетом импорта) будем называть тройку $(x^e, \psi_1^e, \psi_2^e)$, *где Парето-гарантирующая равновесная ситуация* $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ *та же, что и в ПГР игры* Γ, $\psi_i^e = \psi_i(x^e, y_P(x^e))$ $(i = 1, 2)$ *есть прибыли игроков, входящие в их гарантированный векторный выигрыш* $(F^e = (F_1^e, F_2^e), F_i^e = F_i(x_1^e, x_2^e, y_P(x_1^e, x_2^e))$ *для* i*-ой фирмы* $(i = 1, 2))$.

Алгоритм построения Парето-гарантированного равновесия

Согласно приведенному определению 2, при нахождении ПГР в дуополии Курно с учетом импорта применим следующую последовательность шагов.

ШАГ I. Нахождение внутреннего минимума по Парето: определяем непрерывную функцию $y_P(x) : X \to Y$, доставляющую минимум по Парето в двухкритериальной задаче

$$\langle Y = [0, +\infty), \{F_i(x, y)\}_{i=1,2}\rangle \quad \forall x \in X, \tag{6}$$

полученной из Γ при каждой фиксированной ситуации $x = (x_1, x_2) \in X$.

ШАГ II. Построение ситуации равновесия по Нэшу: найдем равновесную по Нэшу ситуацию $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ в игре (без неопределенностей)

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i = [0, +\infty)\}_{i=1,2}, \{F_i(x, y_P(x))\}_{i=1,2}\rangle\,, \tag{7}$$

данная игра (игра паретовских гарантий) получена подстановкой в Γ минимальной по Парето неопределенности $y = y_P(x)$.

ШАГ III. Вычисление прибылей ψ_i^e: определим прибыли игроков $\psi_i(x_1^e, x_2^e, y_P(x_1^e, x_2^e)) = \psi_i^e$ $(i = 1, 2)$.

Нахождение внутреннего минимума по Парето

Лемма 1. *Если существуют числа* α, $\beta > 0$ *и скалярная функция* $y_P(x) : X \to Y$ *такие, что для каждого* $x \in X$

$$\min_{y \in Y}[\alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y)] = Idem[y \to y_P(x)]$$

($Idem[y \in y_P(x)]$ *означает выражение в квадратных скобках, где* y *заменено на* $y_P(x)$*), то при каждом* $x \in X$ *функция* $y_P(x)$ *будет минимальной по Парето в двухкритериальной задаче (6).*

Доказательство. Имеется в любом пособии по многокритериальной оптимизации. □

Лемма 2. *Неопределенность*

$$y_P(x_1, x_2) = \frac{b(x_1 + x_2)}{2}$$

минимальна по Парето в двухкритериальной задаче (6) для каждой ситуации $x = (x_1, x_2) \in [0, +\infty)^2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) = \psi_1(x_1, x_2, y) + \psi_2(x_1, x_2, y) + y^2 =$$

$$= a(x_1 + x_2) - b(x_1 + x_2)^2 - by(x_1 + x_2) - c(x_1 + x_2) - 2d + y^2.$$

Минимальное значение функции при каждом фиксированном $x = (x_1, x_2) \in X$ достигается при $y_P(x) = \frac{b(x_1+x_2)}{2}$, так как

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=y_P(x)} = -b(x_1 + x_2) + 2y_P(x) = 0$$

и

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=y_P(x)} = 2 > 0.$$

Отсюда, с учетом Леммы 1 при $\alpha = \beta = 1$, получаем, что неопределенность $y_P(x) = \frac{b(x_1+x_2)}{2}$ минимальна по Парето в двухкритериальной задаче (6). □

Построение ситуации равновесия по Нэшу

Утверждение 2. *При* $b > 0$ *и* $a >$ *cситуация равновесия по Нэшу в игре (7) имеет вид*

$$x^e = (x_1^e, x_2^e) = \left(\frac{a - c}{b(3 + b)}, \frac{a - c}{b(3 + b)}\right).$$

Доказательство. Используя найденную в Лемме 2 неопределенность $y_P(x)$ и учитывая (1) и (3), получим

$$F_1(x, y_P(x)) = ax_1 - bx_1^2 - bx_1x_2 - \frac{b^2(x_1 + x_2)}{2}x_1 - cx_1 - d + \frac{b^2(x_1 + x_2)^2}{8},$$

$$F_2(x, y_P(x)) = ax_2 - bx_2^2 - bx_1x_2 - \frac{b^2(x_1 + x_2)}{2}x_2 - cx_2 - d + \frac{b^2(x_1 + x_2)^2}{8}.$$

Достаточные условия существования ситуации равновесия по Нэшу $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ в игре (7) можно свести к выполнению четырех требований

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right|_{x=x^e} = a - 2bx_1^e - bx_2^e - \frac{b^2}{2}(2x_1^e + x_2^e) - c + \frac{b^2}{4}(x_1^e + x_2^e) = 0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}\right|_{x=x^e} = -2b - \frac{3b^2}{4} < 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right|_{x=x^e} = a - 2bx_1^e - bx_2^e - \frac{b^2}{2}(x_1^e + 2x_2^e) - c + \frac{b^2}{4}(x_1^e + x_2^e) = 0, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2}\right|_{x=x^e} = -2b - \frac{3b^2}{4} < 0, \tag{11}$$

Условия (9) и (11) имеют место в силу $b > 0$, а равенства (8), (10) представляют собой систему из двух линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \left(2b + \frac{3b^2}{4}\right) x_1^e + \left(b + \frac{b^2}{4}\right) x_2^e = a - c, \\ \left(b + \frac{b^2}{4}\right) x_1^e + \left(2b + \frac{3b^2}{4}\right) x_2^e = a - c. \end{cases} \tag{12}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2b + \frac{3b^2}{4} & b + \frac{b^2}{4} \\ b + \frac{b^2}{4} & 2b + \frac{3b^2}{4} \end{vmatrix} = \left(2b + \frac{3b^2}{4}\right)^2 - \left(b + \frac{b^2}{4}\right)^2 = (3b + b^2)\left(b + \frac{b^2}{2}\right),$$

при этом $\Delta \neq 0$ поскольку $b > 0$.

Найдем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a - c & b + \frac{b^2}{4} \\ a - c & 2b + \frac{3b^2}{4} \end{vmatrix} = (a - c)\begin{vmatrix} 1 & b + \frac{b^2}{4} \\ 1 & 2b + \frac{3b^2}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= (a - c)\left(2b + \frac{3b^2}{4} - b - \frac{b^2}{4}\right) = (a - c)\left(b + \frac{b^2}{2}\right),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2b + \frac{3b^2}{4} & a - c \\ b + \frac{b^2}{4} & a - c \end{vmatrix} = (a - c)\begin{vmatrix} 2b + \frac{3b^2}{4} & 1 \\ b + \frac{b^2}{4} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a - c)\left(2b + \frac{3b^2}{4} - b - \frac{b^2}{4}\right) = (a - c)\left(b + \frac{b^2}{2}\right)$$

и получим решение системы (12)

$$x_1^e = x_2^e = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(a - c)\left(b + \frac{b^2}{2}\right)}{(3b + b^2)\left(b + \frac{b^2}{2}\right)} = \frac{a - c}{b(3 + b)} > 0.$$

□

Утверждение 3. *При $a > c$, $b > 0$ и $\frac{(a-c)^2}{b(3+b)^2} > d$ Парето-гарантированное равновесие в дуополии Курно с учетом импорта представляет тройка $(x^e, \psi_1^e, \psi_2^e)$, где*

$$x^e = (x_1^e, x_2^e) = \left(\frac{a-c}{b(3+b)}, \frac{a-c}{b(3+b)}\right),$$

а соответствующая прибыль i -ой фирмы

$$\psi_i^e = \psi_i(x_1^e, x_2^e, y_P(x_1^e, x_2^e)) = \frac{(a-c)^2}{b(3+b)^2} - d \quad (i = 1, 2).$$

Доказательство. С учетом утверждения перейдем к вычислению прибылей ψ_i^e и гарантированных выигрышей F_i^e.

Во-первых, непосредственной подстановкой $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ в $y_P(x) = \frac{b(x_1+x_2)}{2}$ убедимся, что $y_P(x_1^e, x_2^e) = \frac{a-c}{3+b}$.

Во-вторых, подставив

$$x^e = (x_1^e, x_2^e) = \left(\frac{a-c}{b(3+b)}, \frac{a-c}{b(3+b)}\right)$$

и $y_P(x_1^e, x_2^e) = \frac{a-c}{3+b}$ в (1) – (3), определим гарантированные выигрыши игроков F_i^e, в которые входят

$$\begin{aligned}\psi_i^e &= \psi_i(x_1^e, x_2^e, y_P(x_1^e, x_2^e)) = [a - b(x_1^e + x_2^e + y_P(x_1^e, x_2^e))]x_i^e - (cx_i^e + d) = \\ &= \left[a - b\left(2\frac{a-c}{b(3+b)} + \frac{a-c}{3+b}\right)\right] \cdot \frac{a-c}{b(3+b)} - \left[\frac{c(a-c)}{b(3+b)} + d\right] = \\ &= \frac{(a-c)^2}{b(3+b)^2} - d \quad (i = 1, 2),\end{aligned}$$

а сами гарантированные выигрыши

$$F_i^e = F_i(x^e, y_P(x^e)) = \psi_i^e + \frac{y_P^2(x^e)}{2} = \left(\frac{a-c}{3+b}\right)^2 \frac{2+b}{2b} - d \quad (i = 1, 2).$$

□

Заключение

В работе найден явный вид гарантированных стратегий производителей в математической модели дуополии Курно при учете импортных поставок. Причем обоим продавцам известны лишь границы возможного изменения объема поставок.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14 - 00 - 90408 Укр-а и НАН Украины проект № 03 - 01 - 14.

Список литературы

1. Гермейер, Ю.Б. Введение в исследование операций / Ю.Б.Гермейер. — М.: Наука, 1971. — 384 с.

   GERMIER Y.B. (1971) *Introduction to Research.*. Moscow: Nauka.

2. Жуковский, В.И., Кудрявцев, К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности.I. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложения. — Петрозаводск, 2013. — Т. 5, №1. — С. 27–44.

   ZHUKOVSKIY, V. & KUDRYAVTSEV, K. (2013) Equilibrating conflicts under uncertainty. I. Analog of saddle-point. *Mathematical games theory and their application.* T.5,№1. p. 27-44.

3. Жуковский, В.И., Кудрявцев, К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности.II. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложения. — Петрозаводск, 2013. — Т. 5, №2. — С. 3–45.

   ZHUKOVSKIY, V & KUDRYAVTSEV, K. (2013) Equilibrating conflicts under uncertainty. II. Analog of maximin. *Mathematical games theory and their application.* T.5,№2. p. 3-45.

Статья поступила в редакцию 31.05.2015