

ции и функции Грина имеют сингулярные особенности только на световом конусе четырехмерного пространства времени. В случае шестимерной электродинамики, из-за учета механизма образования электрического заряда, световой конус заменяется на однополостный гиперboloид, что должно привести к радикальному пересмотру техники расчетов. Возможно, возникновение бессмысленных выражений при расчетах в рамках традиционной четырехмерной квантовой электродинамики связано именно с неправильным выбором размерности и структуры реального физического пространства-времени.

Список литературы:

1. Г.Вейль. Гравитация электричество. Сборник «Альберт Эйнштейн и теория гравитации» Мир, М., 1979, с. 513-527.
2. Х. Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., Наука, 1981, 504 с.
3. Г.И. Герасько. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009, 268 с.
4. Н.Н. Попов. Геометрическая модель гравитации и электромагнетизма в шестимерном пространстве-времени. XXIII Международная конференция. Актуальные проблемы в современной науке. Россия, Москва, 26-27 февраля, 2016. ISSN 2413-9335.
5. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1976, 480 с.

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ

Пащенко Зоя Дмитриевна

Канд. физ.-мат. наук, доцент, ГВУЗ «Донбасский Государственный Педагогический Университет», г. Славянск

Рябухо Елена Николаевна

Канд. физ.-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Керченский Государственный Морской Технологический Университет», г. Керчь

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматриваются цепные дроби в кольце гауссовых чисел, а также свойства таких дробей. Описаны возможные случаи уменьшения (увеличения) порядка конечной цепной дроби целых гауссовых чисел.

ABSTRACT

This article discusses the continued fractions of the ring of Gaussian integers, and also properties of these fractions. The possible cases of reduction (increase) of the order of a finite continued fraction of Gaussian integers.

Ключевые слова: гауссовы числа, алгоритм Евклида, цепные дроби гауссовых чисел.

Keywords: Gaussian numbers, Euclidean algorithm, continued fractions of Gaussian numbers..

Широкое применение в теории чисел нашли цепные дроби. Они используются для представления действительных чисел, при решении диофантовых уравнений, для линейного представления НОД двух целых чисел, для приближенных вычислений рациональных дробей, квадратных корней целых чисел и др.

Для построения цепных дробей рациональных чисел используется алгоритм Евклида. В [4] рассматриваются существование и свойства алгоритма Евклида в произвольных евклидовых кольцах. Поэтому можно рассматривать вопрос о цепных дробях в любом из них. В [1] описана возможность построения конечных цепных дробей в кольце целых чисел, в кольце многочленов над полем и в кольце целых гауссовых чисел. Основным её результатом являются критерии существования разложения в обобщенную цепную дробь фиксированной длины элемента поля частных евклидовых колец, удовлетворяющих некоторым условиям. Кольцо целых гауссовых чисел входит в их число. Вообще, гауссовы числа достаточно интересный объект для изучения.

В данной работе рассматриваются цепные дроби целых гауссовых чисел и свойства таких дробей. Описаны возможные случаи уменьшения (увеличения) порядка конечной цепной дроби целых гауссовых чисел.

Область целостности $\mathbb{Z}[i]$ с нормой $\delta(a + bi) = a^2 + b^2$ образует евклидово кольцо. Для произвольных комплексных чисел

$$\delta(z) = |z|^2, \quad \delta(z_1 z_2) = \delta(z_1) \delta(z_2),$$

$$\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\delta(z_1)}{\delta(z_2)},$$

$$\delta(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0, \quad \delta(z) < n \Leftrightarrow |z| < \sqrt{n},$$

$$\delta(z) \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1.$$

Заметим, что частное произвольных целых гауссовых чисел есть комплексное число с рациональными коэффициентами:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad + bc}{c^2 + d^2}i.$$

С другой стороны комплексное число с рациональными коэффициентами представляется в виде частного целых гауссовых чисел:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} i = \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2 i}{a_2 b_2}$$

Поэтому полем частных $\mathbf{Z}[i]$ будет поле $\mathbf{Q}[i]$. Числа этого поля будем называть гауссовыми дробями или рациональными гауссовыми числами.

Определим целую часть $[z]$ комплексного числа z как гауссово число, ближайшее к z . Тогда дробная часть $\{z\}$ числа z определяется как разность $\{z\} = z - [z]$ и

владеет свойством $\delta\{z\} \leq \frac{1}{2}$. Алгоритм деления с остатком α на β заключается в выборе неполного частного

$$q = \left[\frac{\alpha}{\beta} \right] \quad r = \alpha - \beta q \quad \left(\frac{r}{\beta} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \right\} \right)$$

Дробь вида

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

где $q_k \in \mathbf{Z}[i]$, назовём цепной гауссовой дробью (ц.г.д.). Такая дробь обозначается $[q_0; q_1, q_2, \dots]$. Если эта дробь конечная (n -го порядка), то, очевидно, последний коэффициент $q_n \neq 0$.

На основании анализа алгоритма Евклида, аналогично случаю рациональных чисел, легко доказывается, что рациональные гауссовы числа, и только они представляются в виде конечных цепных гауссовых дробей.

Заметим, что в процессе использования представле-

ния рациональной гауссовой дроби $\frac{a}{b}$ мы находим ко-

эффициенты q_j как целые части $\frac{r_0}{b}, \frac{r_{j-2}}{r_{j-1}}$. Поскольку

$$\delta\left(\frac{r_0}{b}\right), \delta\left(\frac{r_j}{r_{j-1}}\right) \leq \frac{1}{2}, \quad \text{то} \quad \delta\left(\frac{b}{r_0}\right), \delta\left(\frac{r_{j-1}}{r_j}\right) \geq \frac{1}{2}$$

, в результате чего $\delta(q_j) \geq 1, j = 1, 2, \dots$, а значит

$$q_j \neq 0, j = 1, 2, \dots$$

В определении цепной гауссовой дроби $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$ не требуется условие $q_j \neq 0, j \neq n$.

Но в доказательстве представления такой цепной гауссовой дроби в виде рациональной гауссовой дроби используется

условие $q_1 \neq 0$. Рассмотренные ниже свойства цепной гауссовой дроби позволяют устранить это противоречие.

Логично предположить, что любое комплексное число можно представить в виде цепной гауссовой дроби, если последовательно выделять целые и дробные части данного числа и чисел, обратных к дробной части предыдущего.

При таком подходе, так как $\delta\left(\frac{1}{\{z\}}\right) \geq 2$, коэффициенты $q_j, j \geq 1$ будут удовлетворять условию $\delta(q_j) \geq 1$,

т.е. $q_j \neq 0$.

Гауссовы цепные дроби от классических цепных дробей отличает неоднозначность представления одного и того же комплексного числа. Например,

$$\begin{aligned} \frac{9-20i}{-5+12i} &= [-2; 3+i, 2i, 2+i] = [-2; 3+i, i, -i, 2] = \\ &= [-2; 3, 0, i, i, -i, 2] = [-2; 3, -2i, 2] = \\ &= [-2-i; -i, 3-i, -2i, 2] \end{aligned}$$

Таким образом представления отличаются не только коэффициентами, но и длиной цепной дроби.

Также отметим, что число 0 имеет несколько представлений в виде цепной гауссовой дроби. Если $x = \pm i$,

$y = \pm 1$, то $0 = [x; x] = [y; -y]$. Это представление также говорит о том, что никакая цепной гауссовой дроби по-

рядка 2 больше не может иметь вид $[t_0; t_1, t_2, \dots, t_k, x, x]$

или $[t_0; t_1, t_2, \dots, t_k, y, -y]$.

В данной статье выделяются ограничения на коэффици-

енты q_k с целью получения цепной гауссовой дроби минимальной длины для каждой гауссовой дроби.

Далее рассмотрим некоторые свойства, которые выполняются как для конечных, так и для бесконечных цепных гауссовых дробей. Отметим, что любая цепная дробь

α может быть записана в виде $\alpha = [t_0; t_1, t_2, \dots, t_k, \beta]$

где $\beta = [t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_n]$, $t_n \neq 0$ или

$\beta = [t_{k+1}, t_{k+2}, \dots]$. Будем цепную дробь β называть отрезком цепной дроби α (закрытым или открытым соответственно).

1. Пусть $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm i\}$ – обратимый элемент $\mathbf{Z}[i]$,

$\alpha = [t_0; t_1, t_2, t_3, \dots]$. Тогда цепная гауссова дробь числа

$$\alpha\varepsilon = \varepsilon t_0 + \frac{\varepsilon}{t_1 + \frac{1}{t_2 + \frac{1}{\ddots}}} =$$

$$= \varepsilon t_0 + \frac{1}{\varepsilon^{-1}t_1 + \frac{\varepsilon^{-1}}{t_2 + \frac{1}{\ddots}}} =$$

$$= \varepsilon t_0 + \frac{1}{\varepsilon^{-1}t_1 + \frac{1}{\varepsilon t_2 + \frac{\varepsilon}{\ddots}}} =$$

$$= [t_0\varepsilon; t_1\varepsilon^{-1}, t_2\varepsilon, t_3\varepsilon^{-1}, \dots]$$

Далее опишем свойства, которые касаются любого отрезка цепной гауссовой дроби α .

2. Пусть $\beta = [q_1, 0, q_3, q_4, \dots]$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta &= q_1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{[q_4, \dots]}}} = \\ &= q_1 + \frac{q_3 + \frac{1}{[q_4, \dots]}}{1} = q_1 + q_3 + \frac{1}{[q_4, \dots]} = \\ &= [q_1 + q_3, q_4, \dots]. \end{aligned}$$

Видим, что последовательность коэффициентов $(t_s, 0, t_{s+2})$ длины 3 заменяется последовательностью $(t_s + t_{s+2})$ длины 1 и цепная гауссова дробь избавляется от нулевого коэффициента. Заметим, что все сказанное касается тройки коэффициентов, где 0 стоит в её середине. Поэтому мы не можем избавиться от $t_0 = 0$ в цепной гауссовой дроби $\alpha = [0; t_1, t_2, \dots]$, если $t_1 \neq 0$, хотя в случае $t_1 = 0$ имеем $\alpha = [0; 0, t_2, t_3, \dots] = [t_2; t_3, \dots]$.

3. Из предыдущего свойства следует $\beta = [q_1, 0, 0, q_4, \dots] = [q_1, q_4, \dots]$. Т.е., пара нулевых коэффициентов в любом случае (то ли в начале, то ли в середине $t_1 \neq 0$) опускается. Возможные изменения записи цепной гауссовой дроби при наличии трех и больше

нулей подряд могут быть описаны с помощью предыдущих свойств.

4. Пусть $x = \pm i$. Тогда $x^2 = -1$. Пусть $\beta = [x, q_2, q_3, q_4, \dots]$. Тогда воспользуемся свойством

1, умножим цепную гауссову дробь на $x^{-1} = -x$, получим:

$$\begin{aligned} \beta &= x(-x)[x, q_2, q_3, q_4, \dots] = \\ &= x[1, xq_2, -xq_3, xq_4, \dots]. \end{aligned}$$

Возможно, такое представление может оказаться полезным:

$$\begin{aligned} \alpha &= [x; t_1, t_2, t_3, t_4, \dots] = \\ &= x[1; xt_1, -xt_2, xt_3, -xt_4, \dots], \end{aligned}$$

но оно не упрощает и не укорачивает цепную гауссову дробь. Оно лишь позволяет первый коэффициент $\pm i$ заменить на 1, и то с изменением оставшегося отрезка.

5. Пусть $\beta = [q_1, q_2, q_3, q_4, \dots]$, $q_2 = x$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta &= q_1 + \frac{1}{x + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{[q_4, \dots]}}} = \\ &= q_1 + \frac{1}{x + \frac{[q_4, \dots]}{q_3[q_4, \dots] + 1}} = \\ &= q_1 + \frac{q_3[q_4, \dots] + 1}{xq_3[q_4, \dots] + x + [q_4, \dots]}. \end{aligned}$$

Умножим числитель и знаменатель последней дроби на $(-x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta &= q_1 + \frac{-xq_3[q_4, \dots] - x}{q_3[q_4, \dots] + 1 - x[q_4, \dots]} = \\ &= q_1 + \frac{-xq_3[q_4, \dots] - x + x^2[q_4, \dots] + [q_4, \dots]}{q_3[q_4, \dots] + 1 - x[q_4, \dots]} = \\ &= q_1 - x + \frac{[q_4, \dots]}{q_3[q_4, \dots] + 1 - x[q_4, \dots]} = \\ &= q_1 - x + \frac{1}{q_3 - x + \frac{1}{[q_4, \dots]}} = \\ &= [q_1 - x, q_3 - x, q_4, \dots]. \end{aligned}$$

В результате получаем замену тройки коэффициентов (t_s, x, t_{s+2}) на последовательность двух

$(t_s - x, t_{s+2} - x)$, а цепная гауссова дробь α избавляется от коэффициента $\pm i$.

Отдельно рассмотрим

$$\beta = [q_1, x] = q_1 + \frac{1}{x} = q_1 + \frac{x}{x^2} = [q_1 - x]$$

Кроме того имеем:

$$\alpha = [x; x, t_2, t_3, \dots] = [0; t_2 - x, t_3, \dots],$$

$$\alpha = [x; x, x, t_3, t_4, \dots] = [0; 0, t_3, t_4, \dots] = [t_3; t_4, \dots],$$

$$\alpha = [t_0; t_1, \dots, t_{s-1}, t_s, x] = [t_0; t_1, \dots, t_{s-1}, t_s - x]$$

при $t_s \neq x$.

6. Пусть $\beta = [q_1, q_2, q_3, q_4, \dots]$, $q_2 = x$, $q_3 = x$. Тогда по предыдущему свойству 5

$$\beta = [q_1 - x, q_3 - x, q_4, q_5, \dots] = [q_1 - x, 0, q_4, q_5, \dots],$$

а по свойству 2 $\beta = [q_1 + q_4 - x, q_5, q_6, \dots]$.

7. Пусть $\beta = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \dots]$, $q_2 = q_3 = q_4 = x$. Тогда, используя предыдущее свойство 6, получим $\beta = [q_1, q_5, q_6, \dots]$. Заметим также, что из свойства 6

можно получить $\beta = [x, x, x, q_4, q_5, \dots] = [q_4, q_5, \dots]$.

Это свойство можно сформулировать следующим образом: в любой ц.г.д. тройка (x, x, x) опускается. На тройки (x, x, x) есть единственное ограничение по месту расположения: они не могут находиться в конце цепной гауссовой дроби, так как цепная гауссова дробь не заканчивается двумя

коэффициентами x . Все другие случаи $q_j = x$ могут быть описаны с помощью предыдущих.

8. Пусть $y = \pm 1$. Тогда $y^2 = 1$. Пусть $\beta = [q_1, q_2, q_3, q_4, \dots]$, $q_2 = y$. Тогда

$$\beta = q_1 + \frac{1}{y + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{[q_4, \dots]}}} =$$

$$= q_1 + \frac{q_3[q_4, \dots] + 1}{yq_3[q_4, \dots] + y + [q_4, \dots]}.$$

Умножим числитель и знаменатель последней дроби на y . Получим

$$\beta = q_1 + \frac{yq_3[q_4, \dots] + y}{q_3[q_4, \dots] + 1 + y[q_4, \dots]} =$$

$$= q_1 + \frac{yq_3[q_4, \dots] + y + y^2[q_4, \dots] - [q_4, \dots]}{q_3[q_4, \dots] + 1 + y[q_4, \dots]} =$$

$$= q_1 + y + \frac{-[q_4, \dots]}{q_3[q_4, \dots] + 1 + y[q_4, \dots]} =$$

$$= q_1 + y + \frac{1}{-q_3 - y + \frac{1}{-[q_4, q_5, q_6, \dots]}}.$$

Цепная гауссова дробь в знаменателе последней дроби умножается на (-1) . Учитывая свойство 1 и то, что

$(-1)^{-1} = -1$, получаем окончательно:

$$\beta = [q_1 + y, -q_3 - y, -q_4, -q_5, -q_6, \dots].$$

Если $\alpha = [-y; y, t_2, t_3, t_4, \dots] = [0; -t_2 - y, -t_3, -t_4, \dots]$.

9. Пусть $\beta = [q_1, q_2, q_3, q_4, \dots]$, $q_2 = y$, $q_3 = -y$. Тогда, используя предыдущее свойство 8 и свойство 2, получаем

$$\beta = [q_1 + y, 0, -q_4, -q_5, -q_6, \dots] = [q_1 + y, -q_4, -q_5, -q_6, \dots].$$

Здесь четверка коэффициентов $(t_s, y, -y, t_{s+3})$ заменяется последовательностью одного коэффициента $(t_s - t_{s+2} + y)$ и цепная гауссова дробь α избавляется от коэффициентов ± 1 .

10. Пусть $\beta = [q_1, q_2, q_3, q_4, \dots]$, $q_2 = y$, $q_3 = -y$, $q_4 = y$. Тогда, по свойству 9, получаем $\beta = [q_1, -q_5, -q_6, \dots]$.

Если $q_1 = -y$, $q_2 = y$, $q_3 = -y$, то, опять же из предыдущего случая, $\beta = [-q_4, -q_5, \dots]$. Т.е. получаем,

что тройка коэффициентов $(y, -y, y)$ (или $(-y, y, -y)$) опускается, а все коэффициенты, следующие за ними, меняют знак на противоположный. Все другие случаи

уже могут быть преобразованы с помощью случаев 8, 9, 10. Данный анализ даёт возможность получить следующее утверждение.

Утверждение. Любая цепная гауссова дробь может быть представлена с помощью такой цепной гауссовой дроби, которая содержит коэффициенты

$q_j \notin \{0, \pm 1, \pm i\}$, $j \neq 0$.

Следствие. Любая цепная гауссова дробь может быть представлена с помощью такой цепной гауссовой дроби

$[q_0; q_1, q_2, q_3, q_4, \dots]$, норма всех коэффициентов которой, кроме q_0 , не меньше 2 ($\delta(q_j) \geq 2 > 1$, $j \geq 1$).

Выделим возможные случаи преобразования отрезка β цепной гауссовой дроби и укажем величину уменьшения её в конечном случае. Не типичное преобразование отрезка, совпадающего со всей цепной гауссовой дробью α , выделено особо. Пусть, как и раньше, $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm i\}$, $x = \pm i$, $y = \pm 1$. Тогда имеют место следующие преобразования.

1. Умножение на обратимый элемент:

$$\varepsilon[t_0; t_1, t_2, t_3, \dots] = [t_0\varepsilon; t_1\varepsilon^{-1}, t_2\varepsilon, t_3\varepsilon^{-1}, \dots]$$

2. Устранение нулей:

$$\beta = [q_1, 0, q_3, q_4, \dots] = [q_1 + q_3, q_4, \dots],$$

$$\beta = [q_1, 0, 0, q_4, \dots] = [q_1, q_4, \dots].$$

Длина уменьшается на 2.

3. Устранение $x = \pm i$:

$$\beta = [q_1, x, q_3, q_4, \dots] = [q_1 - x, q_3 - x, q_4, \dots].$$

$$\alpha = [x; x, t_2, t_3, \dots] = [0; t_2 - x, t_3, \dots],$$

$$\alpha = [t_0; t_1, \dots, t_{s-1}, t_s, x] = [t_0; t_1, \dots, t_{s-1}, t_s - x]$$

при

$$t_s \neq x.$$

Длина уменьшается на 1.

$$\beta = [q_1, x, x, q_4, \dots] = [q_1 + q_4 - x, q_5, q_6, \dots],$$

$$\beta = [q_1, x, x, x, q_5, q_6, \dots] = [q_1, q_5, q_6, \dots],$$

$$\beta = [x, x, x, q_4, q_5, \dots] = [q_4, q_5, \dots].$$

Длина уменьшается на 3.

4. Устранение $y = \pm 1$:

$$\beta = [q_1, y, q_3, q_4, q_5, q_6, \dots] =$$

$$= [q_1 + y, -q_3 - y, -q_4, -q_5, -q_6, \dots],$$

$$\alpha = [-y; y, t_2, t_3, t_4, \dots] = [0; -t_2 - y, -t_3, -t_4, \dots],$$

$$\alpha = [t_0; t_1, t_2, \dots, t_k, y] =$$

$$= [t_0; t_1, t_2, \dots, t_k + y], \quad t_k \neq -y.$$

Длина уменьшается на 1.

$$\beta = [q_1, y, -y, q_4, q_5, q_6, \dots] =$$

$$= [q_1 + y - q_4, -q_5, -q_6, \dots],$$

$$\beta = [q_1, y, -y, y, q_5, q_6, \dots] = [q_1, -q_5, -q_6, \dots],$$

$$\beta = [-y, y, -y, q_4, q_5, q_6, \dots] = [-q_4, -q_5, -q_6, \dots]$$

Длина уменьшается на 3.

Полученные результаты могут стать полезными при анализе свойств подходящих дробей цепной гауссовой дроби, представляющих любое комплексное число.

Список литературы:

1. Васьковский М.М. Конечные обобщенные цепные дроби в евклидовых кольцах. / М.М. Васьковский, Н.В. Кондратёнок // Математика и информатика. – Вестник БГУ. – Сер. 1. – 2013. – № 3. – С.117-123.
2. Богданов П.С. О представлении целых гауссовых чисел в системе счисления Питти / П.С. Богданов П.С. – Компьютерная оптика. – 2010. – том 34, №4. – С.561-565.
3. Пащенко З.Д. Решето Ератосфена для гаусових чисел. / З.Д. Пащенко, О.В. Плахотя // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ – Слов'янськ: СДПУ, 2012. – №2. – С. 82-86.
4. Родосский К.А. Алгоритм Евклида. – М.: Наука, 1988. – 240 с.