



ИНФОРМАТИКА

УДК 519.72

Троичный дискретный вейвлетный базис

М. С. Беспалов

Беспалов Михаил Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Россия, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87, bespalov@vlsu.ru

Приведены дискретный вариант и основная конструкция троичного кратномасштабного анализа, аналогичная двоичному модельному случаю кратномасштабного анализа Хаара. На основе построенного базиса предложен алгоритм, аналогичный быстрому преобразованию Хаара. Приведены типичные примеры вычислений.

Ключевые слова: дискретный гармонический анализ, дискретное преобразование Хаара, вейвлет, сжатия и сдвиги, кратномасштабный анализ.

Поступила в редакцию: 06.05.2019 / Принята: 31.12.2019 /
Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-367-377>

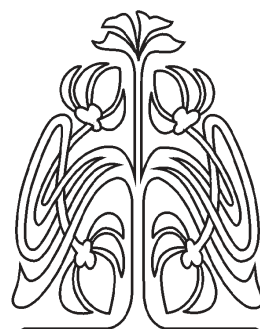
ВВЕДЕНИЕ

Простейшее *дискретное преобразование Хаара* (ДПХ) представляет собой линейный оператор в $\mathbb{R}^2$ с матрицей H :

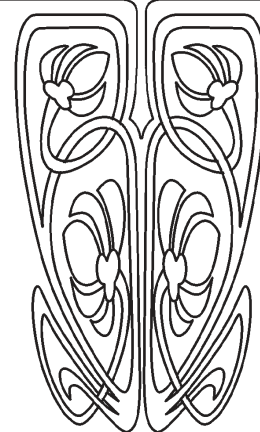
$$H[c] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ a - b \end{pmatrix}.$$

Восстановление сигнала $c = (a \ b) \in \mathbb{R}^2$ выполняется с помощью оператора $\frac{1}{2}H$, вычисляющего полусуммы и полуразности.

Переход к ДПХ соответствует замене стандартного базиса $\{(1 \ 0), (0 \ 1)\}$ в $\mathbb{R}^2$ на хааровский базис $\{(1 \ 1), (1 \ -1)\}$. В терминах теории всплесков [1] первый из элементов хааровского базиса играет роль масштаби-



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





рующего сигнала, а второй — материнского. Дискретный аналог хааровского базиса в $\mathbb{R}^N$ для $N = 2^n$ построен в [2], где конструкция двоичных сжатий и сдвигов перенесена на дискретные функции.

Троичное обобщение этой модельной конструкции проведем на основе дискретных периодических функций Бернулли (будем их называть сигналы Бернулли), введенных в [3] и подробно исследованных в [4]. В отличие от функциональной формы записи, принятой в [5], будем использовать векторную форму, взяв за основу обозначения в пособии [6].

Элементы стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$ обозначим символами $\delta = (1\ 0\ 0)$ *дельта-сигнала* и его *круговых сдвигов* $\delta^{\rightarrow} = (0\ 1\ 0)$, $\delta^{2\rightarrow} = (0\ 0\ 1)$, а вейвлетный неортогональный базис обозначим символами

$$S = (1\ 1\ 1), \quad A = (-1\ 0\ 1), \quad A^{\rightarrow} = (1\ -1\ 0).$$

Обозначим $\mathbb{R}_0^3$ подпространство $\mathbb{R}^3$ сигналов $x = (a\ b\ c)$, удовлетворяющих условию центровки

$$a + b + c = 0.$$

Аналогично для подпространств большей размерности нижний индекс 0 означает выполнение условия центровки векторов в виде равенства нулю суммы координат. Итак, векторы A и $A^{\rightarrow}$ составляют базис в $\mathbb{R}_0^3$. Разложение вектора $y = (\alpha\ \beta\ \gamma) \in \mathbb{R}^3$ по вейвлетному базису

$$y = c_0 S + c_1 A + c_2 A^{\rightarrow}, \quad c_0 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}, \quad c_1 = \gamma - c_0, \quad c_2 = c_0 - \beta.$$

Эти простейшие формулы разложения лежат в основе дальнейшей детализации сигналов с построением троичных сжатий и сдвигов.

Предложенный вариант троичного базиса с материнским вейвлетом $A = (-1\ 0\ 1)$ в виде сигнала Бернулли минус первого порядка легко по аналогии распространяется на случай большей размерности, так как в [4] установлено, что набор из $p-1$ сдвигов любого сигнала Бернулли на сетке с p отсчетами составляет базис пространства $\mathbb{R}_0^p$.

Задача поиска базиса аналогичного подпространства, состоящего из материнских ортогональных функций, в p -ичном случае сформулирована и решена Ю. А. Фарковым [7]. В последующих публикациях, начиная с [8], занимались поиском условий на масштабирующие функции. Из них выделим статью С. Ф. Лукомского [9], где приводится в других обозначениях ортогональный вариант вейвлетного базиса $(1\ 1\ 1)$, $(-1\ 0\ 1)$, $(1\ -2\ 1)$ с сигналами Бернулли минус первого и второго порядка [4] в качестве пары материнских сигналов. В данной статье мы выбрали другой подход, так как этот вариант при переходе к большим размерностям влечет существенное усложнение формул. Как пример направления исследований, усложняющих конструкцию, приведем статью [10], где в двоичном случае идет поиск нескольких масштабирующих функций.

Целью исследований служит подготовка аппарата для цифровой обработки сигналов. В этом направлении отметим статьи [11, 12], где прослеживается тенденция к изложению материала в терминах дискретных функций, которое в данной статье реализовано в векторных обозначениях.

1. МАСШТАБИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕГО ВЕЙВЛЕТНОГО БАЗИСА

В случае $n = 2$ имеем пространство $\mathbb{R}^9$ и его подпространство $\mathbb{R}_0^9$. Базовые функции в векторной форме определяются с помощью операции кронекерова произведе-



дения $\otimes$ векторов. Предложим следующую их нумерацию, которую далее перенесем на общий случай:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \mathbf{1} = S \otimes S = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1), \\ \varphi_1 &= A \otimes S = (-1\ -1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1), \quad \varphi_2 = A^{\rightarrow} \otimes S = (1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 0\ 0\ 0), \\ \varphi_3 &= \delta \otimes A = (-1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0), \quad \varphi_4 = \delta \otimes A^{\rightarrow} = (1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0), \\ \varphi_5 &= \delta^{\rightarrow} \otimes A = (0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0), \quad \varphi_6 = \delta^{\rightarrow} \otimes A^{\rightarrow} = (0\ 0\ 0\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0), \\ \varphi_7 &= \delta^{2\rightarrow} \otimes A = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 1), \quad \varphi_8 = \delta^{2\rightarrow} \otimes A^{\rightarrow} = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ -1\ 0).\end{aligned}$$

Для исходного вектора $x = (x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8) \in \mathbb{R}^9$ коэффициенты разложения находим по следующему правилу:

$$\begin{aligned}y_0 &= \frac{1}{3}(x_0 + x_1 + x_2), \quad y_1 = \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5), \quad y_2 = \frac{1}{3}(x_6 + x_7 + x_8); \\ c_3 &= x_2 - y_0, \quad c_4 = y_0 - x_1, \quad c_5 = x_5 - y_1, \quad c_6 = y_1 - x_4, \quad c_7 = x_8 - y_2, \quad c_8 = y_2 - x_7; \\ c_0 &= \frac{1}{3}(y_0 + y_1 + y_2); \quad c_1 = y_2 - c_0, \quad c_2 = c_0 - y_1.\end{aligned}$$

Отсюда получаем разложение исходного вектора по базису

$$x = \sum_{j=0}^8 c_j \varphi_j,$$

последовательное вычисление частных сумм которых реализуется в виде последовательной прорисовки деталей, что аналогично ситуации для хааровского вейвлетного базиса.

В общем случае построение троичного вейвлетного базиса в $\mathbb{R}^N$, где $N = 3^n$, начнем с масштабирующей функции

$$\varphi_0 = \mathbf{1} = S^{n\otimes} = (1\ 1\ 1\ 1 \dots 1).$$

В отличие от двоичного вейвлетного базиса в троичном случае вместо одной материнской функции вынуждены взять пару материнских функций — основную материнскую функцию и ее клон в виде кругового сдвига:

$$\varphi_1 = A \otimes S^{n-1\otimes}, \quad \varphi_2 = A^{\rightarrow} \otimes S^{n-1\otimes}.$$

Если бы рассматривали вариант $N = p^n$, то на этом этапе проделали бы $(p-2)$ -кратное клонирование в виде круговых сдвигов.

Процедура троичного сжатия (которую выполняем параллельно для пары материнских функций) состоит в замене одного кронекерова множителя S справа от множителя A на множитель δ слева:

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \delta \otimes A \otimes S^{n-2\otimes}, \quad \varphi_4 = \delta \otimes A^{\rightarrow} \otimes S^{n-2\otimes}; \\ \varphi_9 &= \delta \otimes \delta \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, \quad \varphi_{10} = \delta \otimes \delta \otimes A^{\rightarrow} \otimes S^{n-3\otimes}; \dots\end{aligned}$$

Процедура троичного сдвига, которая тоже проводится параллельно для пары образов материнских функций (но теперь соответствующую запись не приводим),



состоит в распределении значков сдвига у дельта-сигналов в лексикографическом порядке:

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= \delta \otimes \delta^{\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, & \varphi_{13} &= \delta \otimes \delta^{2\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, \\ \varphi_{15} &= \delta^{\rightarrow} \otimes \delta \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, & \varphi_{17} &= \delta^{\rightarrow} \otimes \delta^{\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, \\ \varphi_{19} &= \delta^{\rightarrow} \otimes \delta^{2\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, & \varphi_{21} &= \delta^{2\rightarrow} \otimes \delta \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, \\ \varphi_{23} &= \delta^{2\rightarrow} \otimes \delta^{\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, & \varphi_{25} &= \delta^{2\rightarrow} \otimes \delta^{2\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}.\end{aligned}$$

Для функций с четными номерами этой пачки представление получается через предыдущую заменой в разложении A на $A^{\rightarrow}$. Для кронекерова произведения сдвигов дельта-сигнала, упорядоченных в указанном лексикографическом порядке, будем использовать более короткое обозначение $\delta_{3^m}^{k\rightarrow}$, принятое для элементов стандартного базиса с 3^m отсчетами. Например, $\delta_9^{4\rightarrow} = \delta^{\rightarrow} \otimes \delta^{\rightarrow}$, $\delta_9^{7\rightarrow} = \delta^{2\rightarrow} \otimes \delta^{\rightarrow}$.

Итак, общие формулы базисных функций при j от 0 до $3^m - 1$

$$\begin{aligned}\varphi_{3^m+2j} &= \delta_{3^m}^{j\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-m-1\otimes} = \left(\underbrace{0 \dots 0}_{j3^{n-m}} \underbrace{-1 \dots -1}_{3^{n-m-1}} \underbrace{0 \dots 0}_{3^{n-m-1}} \underbrace{1 \dots 1}_{3^{n-m-1}} \underbrace{0 \dots 0}_{3^{n-(j+1)3^{n-m}}} \right), \\ \varphi_{3^m+2j+1} &= \delta_{3^m}^{j\rightarrow} \otimes A^{\rightarrow} \otimes S^{n-m-1\otimes} = \left(\underbrace{0 \dots 0}_{j3^{n-m}} \underbrace{1 \dots 1}_{3^{n-m-1}} \underbrace{-1 \dots -1}_{3^{n-m-1}} \underbrace{0 \dots 0}_{(3^{m+1}-3j-2)3^{n-m-1}} \right).\end{aligned}$$

2. ПОСТРОЕНИЕ ТРОИЧНОГО КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА

Укажем связь построенных дискретных функций с аналогичными функциями непрерывного аргумента (которые далее называем «непрерывными»). Введем понятие интервалов m -го ранга с номером k :

$$\Delta_m^k = \left[\frac{k}{3^m}, \frac{k+1}{3^m} \right),$$

а характеристическую функцию этого интервала обозначим $I_{(m)}^k(t)$.

Определим с помощью сквозной и двойной нумерации троичные аналоги системы Хаара следующими формулами на исходном интервале $[0, 1)$, положив их нулем вне этого интервала (здесь $N = 3^n$): $X_0(t) \equiv 1$,

$$\begin{aligned}X_{3^m+2j}(t) &= X_{(m)}^j(t) = \sum_{s=0}^{N-1} \varphi_{3^m+2j}(s) I_{(n)}^s(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t \in \Delta_{m+1}^{3j}, \\ 1, & \text{если } t \in \Delta_{m+1}^{3j+2}, \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases} \\ X_{3^m+2j+1}(t) &= Y_{(m)}^j(t) = \sum_{s=0}^{N-1} \varphi_{3^m+2j+1}(s) I_{(n)}^s(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \Delta_{m+1}^{3j}, \\ -1, & \text{если } t \in \Delta_{m+1}^{3j+1}, \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}\end{aligned}$$

Из приведенного явного вида функций вытекает, что данная система служит троичным вариантом системы последовательной прорисовки деталей, что конкретизировано далее в этом параграфе. Из данного утверждения и вытекает следующая теорема.

Теорема. Система функций $\{X_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ является базисом Шаудера в любом из основных пространств $C[0, 1]$, $L[0, 1]$, $L^2[0, 1]$. Она задает троичный неортogonalный КМА на $[0, 1)$.



В случае $C[0, 1]$ все базисные функции (не являющиеся элементами $C[0, 1]$) продолжаем в точку 1 по непрерывности.

Троичный КМА представляет собой цепочку вложенных пространств

$$\dots \subset \Lambda_{-1} \subset \Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots \subset \Lambda_m \subset \dots,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\bigcup_n \Lambda_n = L^2(\mathbb{R})$;
- 2) $\bigcap_n \Lambda_n = \{0\}$;
- 3) $f \in \Lambda_0 \Leftrightarrow f(\cdot - n) \in \Lambda_0, n \in \mathbb{Z}$;
- 4) $f(x) \in \Lambda_j \Leftrightarrow f(3x) \in \Lambda_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$;
- 5) существует $\varphi(x)$ такая, что $\{\varphi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ составляет базис Λ_0 .

Отличие от традиционного ([1, с. 21], [13, с. 44]) двоичного ортонормированного КМА заключено в свойствах 4 (замена 2 на 3) и 5 (отказ от ортогональности базиса).

В модельном случае данной конструкции и системы Хаара масштабирующая функция $\varphi = X_0$ организует временную локализацию за счет разложения единицы

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(x - n).$$

Для исходного сигнала $f \in L[0, 1]$ последовательность приближений $f_m \in \Lambda_m$ вычисляем отдельно для каждого m через значения цифровых сигналов $x \in \mathbb{R}^N$, где $N = 3^m$, по формуле частной суммы дискретного преобразования Крестенсона [14]

$$x_j = 3^m \int_{\Delta_m^j} f(t) dt, \quad f_m(\Delta_m^j) = x_j, \quad \text{для всех } j,$$

аналогичной формулам, применяемым для систем Хаара и Уолша. Умышленный отказ от ортогональности при построении троичного КМА вызван желанием сохранить простоту конструкции и для случая переноса ее на большие размерности.

Искомая функция $f_m(t)$ и есть частная сумма с номером 3^m следующего ряда:

$$f(t) = c_0 X_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{3^k-1} c_{3^k+2j} X_{(k)}^j(t) + c_{3^k+2j+1} Y_{(k)}^j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X_k(t). \quad (1)$$

Коэффициенты разложения (1) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 f(t) dt, \quad c_1 = 3 \int_{2/3}^1 (f(t) - c_0) dt, \quad c_2 = 3 \int_{1/3}^{2/3} (c_0 - f(t)) dt, \\ c_{3^m+2j} &= 3^{m+1} \int_{\Delta_{m+1}^{3j+2}} (f(t) - \tilde{f}(\Delta_m^j)) dt = \tilde{f}(\Delta_{m+1}^{3j+2}) - \tilde{f}(\Delta_m^j), \\ c_{3^m+2j+1} &= 3^{m+1} \int_{\Delta_{m+1}^{3j+1}} (\tilde{f}(\Delta_m^j) - f(t)) dt = \tilde{f}(\Delta_m^j) - \tilde{f}(\Delta_{m+1}^{3j+1}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $j = 0, 1, 2, \dots, 3^m - 1$, $\tilde{f}(\Delta_m^j) = 3^m \int_{\Delta_m^j} f(t) dt$ — среднее значение функции на интервале. Формулы для c_1 и c_2 в записи (2) излишни, так как они содержатся ниже в общих формулах при $m = 0, j = 0$.

Добавление двух выделенных слагаемых формулы (1) при последовательном вычислении частных сумм этого ряда соответствует уточнению значения строящейся функции: замена ступеньки $\tilde{f}(\Delta_k^j)$ на три ступеньки $\tilde{f}(\Delta_{m+1}^{3j+s})$ при $s = 0, 1, 2$.



3. БЫСТРЫЙ ТРОИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Обозначим исходный массив $x^0 = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ как массив начального нулевого уровня, $N = 3^n$. Пусть $N_0 = N$, $N_k = \frac{N_{k-1}}{3}$ — объем массива k -го уровня.

• Алгоритм быстрого троичного вейвлетного преобразования с прореживанием по частоте.

Для k от 1 до n выполняем:

– разбиваем массив x^{k-1} на непересекающиеся блоки, занумерованные подряд индексом j от 0 до $N_k - 1$, по три элемента в каждом j -м блоке, которые обозначим (a, b, c) для дальнейшего вычисления;

– формируем два массива следующего уровня: $x^k = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_{N_k-1})$ (обозначая элементы теми же символами, что и на предыдущем уровне) и $y^k = (y_0 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_{2N_k-2}, y_{2N_k-1})$, вычисляя для номера блока j от 0 до $N_k - 1$

$$x_j = \frac{a + b + c}{3}, \quad y_{2j} = c - x_j, \quad y_{2j+1} = x_j - b;$$

– формируем выходной массив C спектральных характеристик c_k из вычисленных массивов

$$C = (x^n \ y^n \ y^{n-1} \ y^{n-2} \ \dots \ y^1) = (c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_{N-1}).$$

• Обратный алгоритм быстрого восстановления сигнала.

Сначала комментарий к принятым в алгоритме обозначениям. Шаги алгоритма будем нумеровать в обратном порядке. На начальном n -м шаге два массива $x^n = (c_0)$ (обозначим a_0 вместо c_0) и $y^n = (c_1 \ c_2)$ выделяем из выходного сигнала для восстановления по ним массива $x^{n-1} = (x_0 \ x_1 \ x_2)$. На следующем $(n-1)$ -м шаге, когда массив x^{n-1} из выходного массива превращается во входной для очередного шага, его элементы x_j переобозначим в виде a_j и т.д. Выходной массив $(k+1)$ -го шага $x^k = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N_k-1})$ совпадает с входным массивом $x^k = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N_k-1})$ для k -го шага. Далее сформулируем алгоритм.

Для k от n до 1 выполняем:

– для j от 0 до $N_k - 1$ вычисляем координаты выходного массива x^{k-1} по координатам входного массива x^k и очередного блока $y^k = (y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{2N_k-1})$, извлеченного из массива C в виде очередных $2N_k$ отсчетов:

$$x_{3j} = a_j - y_{2j} + y_{2j+1}, \quad x_{3j+1} = a_j - y_{2j+1}, \quad x_{3j+2} = a_j + y_{2j}.$$

4. ПРИМЕРЫ ТРОИЧНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Пример 1. Для $n = 4$ выберем исходный сигнал $f(t) = 81t - \frac{1}{2}$, являющийся линейным преобразованием простейшего сигнала $h(t) = t$, усреднение которого по интервалам четвертого ранга приводит к целочисленному дискретному массиву

$$x^0 = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ 80).$$

Применяя шаги быстрого алгоритма, получаем:

$$\begin{aligned} x^1 &= (1 \ 4 \ 7 \ \dots \ 79), \quad y^1 = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0); \\ x^2 &= (4 \ 13 \ 22 \ 31 \ 40 \ 49 \ 58 \ 67 \ 76), \quad y^2 = (3 \ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 0 \ \dots \ 3 \ 0); \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x^3 &= (13 \ 40 \ 67), & y^3 &= (9 \ 0 \ 9 \ 0 \ 9 \ 0); \\x^4 &= (40), & y^4 &= (27 \ 0).\end{aligned}$$

Из этих массивов формируем выходной массив

$$C = (40 \ 27 \ 0 \ 9 \ 0 \ 9 \ 0 \ 9 \ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 0 \ \dots \ 3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0).$$

Разложение (1) в нашем случае превратилось в

$$\begin{aligned}f_4(t) &= 40 + 27X_1(t) + 9(X_3(t) + X_5(t) + X_7(t)) + 3(X_9(t) + X_{11}(t) + \dots + X_{25}(t)) + \\&+ (X_{27}(t) + X_{29}(t) + X_{31}(t) + \dots + X_{79}(t)) \in \Lambda_4.\end{aligned}$$

Последовательное вычисление этих слагаемых соответствует методу последовательной прорисовки деталей, который отмечают в качестве достоинств системы Хаара.

Для исходной функции $h(t)$ коэффициенты (2) разложения для ее приближения четвертого уровня (остальные $c_j = 0$)

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{40}{81} + \frac{1}{162}, & c_1 &= \frac{27}{81} = \frac{1}{3}, & c_3 &= c_5 = c_7 = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}, \\c_9 &= c_{11} = \dots = c_{25} = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}, & c_{27} &= c_{29} = \dots = c_{79} = \frac{1}{81}.\end{aligned}$$

Обобщаем их для разложения m -го уровня

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_{3^k+2j} = 3^{-(k+1)}, \quad c_{3^k+2j+1} = 0,$$

откуда вытекает разложение на $[0, 1)$:

$$t = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-(k+1)} \sum_{j=0}^{3^k-1} X_{(k)}^j(t),$$

а также разложение $h(t)$ на $[0, \infty)$:

$$t = \sum_{m=0}^{\infty} (m + \frac{1}{2}) I_{(0)}^m(t) + \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-(k+1)} \sum_{j=0}^{\infty} X_{(k)}^j(t).$$

Пример 2 (Канторова лестница). Основным примером *сингулярной* функции служит *канторова лестница* [15], заданная константой на отрезках (в данном примере правый конец считаем принадлежащим интервалу), составляющих канторово множество,

$$f(t) = \frac{2k+1}{2^n}, \quad \text{если } t \in \Delta_n^{6\mu(k)+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1,$$

где использовали вновь введенную, через разложение числа в двоичной системе счисления $k = k_1 2^0 + k_2 2^1 + \dots + k_{n-1} 2^{n-2}$, $k_j \in \{0, 1\}$, $k_{n-1} = 1$, функцию $\mu(k) = k_1 3^0 + k_2 3^1 + \dots + k_{n-1} 3^{n-2}$, $\mu(0) = 0$. Доопределим на канторовом множестве второго рода эту функцию по схеме [15] до непрерывной на $[0, 1]$ (а следовательно, и равномерно-непрерывной).



Основным свойством, которое будем использовать при вычислениях, служит следующее фрактальное свойство самоподобия канторовой лестницы $f(3t) = 2f(t)$ и $f(t + \frac{2}{3}) = f(t) + \frac{1}{2}$ при $t \in [0, 1/3]$. Дополнительно используем свойство симметрии $f(t) + f(1-t) = 1$. Из графического представления с помощью этих свойств вычисляем (2)

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{8}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = \frac{1}{8}, \quad c_8 = 0, \dots$$

$$c_{3^k+4\mu(j)} = 2^{-(k+2)} \quad \text{для } j = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1.$$

Получили разложение (1) сингулярной функции в ряд на $[0, 1]$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+2)} \sum_{j=0}^{2^k-1} X_{3^k+4\mu(j)}(t),$$

частные суммы которого служат аппаратом равномерного приближения канторовой лестницы.

5. ТРОИЧНЫЙ ВЕЙВЛЕТНЫЙ БАЗИС С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

В статье [2] предложено два варианта двоичного вейвлетного базиса — с прореживанием по частоте и по времени. Троишный аналог системы Хаара с прореживанием по частоте был рассмотрен подробно выше.

Приведем краткое описание второго базиса $\{\psi_k\}_{k=0}^{N-1}$, где $N = 3^n$, представляющего собой троичный дискретный аналог системы Хаара [2] с прореживанием по времени.

Масштабирующей дискретной функцией служит $\psi_0 = S^{n\otimes}$, а парой материнских

$$\psi_1 = S^{n-1\otimes} \otimes A, \quad \psi_2 = S^{n-1\otimes} \otimes A^{\rightarrow}.$$

Методом троичных сдвигов и сжатий получаем все дискретные функции набора последовательно по пачкам, но с другой нумерацией внутри пачек

$$\psi_{3^m+j} = S^{n-m-1\otimes} \otimes A \otimes \delta_{3^m}^{j\rightarrow}, \quad \psi_{2 \cdot 3^m+j} = S^{n-m-1\otimes} \otimes A^{\rightarrow} \otimes \delta_{3^m}^{j\rightarrow}$$

при натуральных j от 0 до $3^m - 1$. Здесь применили перестройку порядка нумерации в соответствии с упорядочением спектральных характеристик a_k в выходном массиве S предложенного ниже быстрого вейвлетного алгоритма с прореживанием по времени.

По прежней схеме строятся «непрерывные» аналоги

$$Z_k(t) = \sum_{s=0}^{N-1} \psi_k(s) I_{(n)}^s(t).$$

• Алгоритм быстрого троичного вейвлетного преобразования с прореживанием по времени.

Для k от 1 до n выполняем:

– массив x^{k-1} представляем как блочный $(b^0 \ b^1 \ b^2)$ из трех непересекающихся равновеликих блоков объема N_k ;

– вычисляем три массива, из которых формируем два массива, по формулам для векторов $x^k = \frac{1}{3}(b^0 + b^1 + b^2)$, $y^k = (\alpha_k, \beta_k) = (b^2 - x^k, x^k - b^1)$;



– формируем выходной массив спектральных характеристик из вычисленных массивов

$$C = (x^n \ y^n \ y^{n-1} \ y^{n-2} \ \dots \ y^1) = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_{N-1}). \quad \square$$

• *Обратный алгоритм быстрого восстановления сигнала.*

Для k от n до 1 выполняем:

– вычисляем $x^{k-1} = (x^k - \alpha_k + \beta_k, x^k - \beta_k, x^k + \alpha_k)$ по вектору x^k и блокам массива $y^k = (\alpha_k, \beta_k)$, извлеченного из массива C . $\square$

Прямой алгоритм анализа применительно к ступенчатой $f \in \Lambda_n$ состоит в вычислении вектора C спектральных характеристик a_k по вектору $x \in \mathbb{R}^N$ значений $f(t)$. Обратный алгоритм синтеза, состоящий в восстановлении x , соответствует вычислению исходного сигнала на $[0, 1)$ по формуле

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k Z_k(t),$$

где та же самая масштабирующая функция $Z_0(t) = 1$ при $t \in [0, 1)$, а остальные базисные функции

$$Z_{3^m+j}(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t \in \Delta_n^{3^{m+1}k+j}, \\ 1, & \text{если } t \in \Delta_n^{3^{m+1}k+2 \cdot 3^m+j}, \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases} \quad Z_{2 \cdot 3^m+j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \Delta_n^{3^{m+1}k+j}, \\ -1, & \text{если } t \in \Delta_n^{3^{m+1}k+3^m+j}, \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Здесь $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $0 \leq j \leq 3^m - 1$, $0 \leq k \leq 3^{n-m-1} - 1$.

Основной недостаток подхода к построению вейвлетного базиса с прореживанием по времени состоит в невозможности построения бесконечной системы функций, служащей «непрерывным» аналогом, который соответствует утверждению о том, что систему Уолша невозможно упорядочить в нумерации Адамара.

Кратко покажем действие алгоритма с прореживанием по времени для приведенного выше примера 1 с $f(t) = 81t - \frac{1}{2}$, $n = 4$:

$$x^4 = (40),$$

$$y^1 = (27 \ 27 \ \dots \ 27 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0), \quad y^2 = (9 \ 9 \ \dots \ 9 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0), \quad y^3 = (3 \ 3 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0), \quad y^4 = (1 \ 0).$$

В массиве y^1 два постоянных блока одинаковой длины по 27 отсчетов, в массиве y^2 постоянные блоки по 9 отсчетов.

Если процедура синтеза «непрерывного» исходного сигнала, соответствующая обратному к быстрому алгоритму по частоте, реализуется в виде последовательной прорисовки деталей, то процедура синтеза, соответствующая обратному к быстрому алгоритму по времени, реализуется в виде параллельного уточнения деталей, что менее наглядно.

Библиографический список

1. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. М. : Физматлит, 2005. 616 с.
2. Машарский С. М., Малоземов В. Н. Хааровские спектры дискретных сверток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 6. С. 954–960.
3. Бер М. Г., Малоземов В. Н. Наилучшие формулы для приближенного вычисления дискретного преобразования Фурье // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32, № 11. С. 1709–1719.



4. Беспалов М. С. Дискретные периодические функции Бернулли // ПДМ. 2019. № 43. С. 16–36. DOI: <https://doi.org/10.17223/20710410/43/2>
5. Малоземов В. Н., Машарский С. М. Основы дискретного гармонического анализа. СПб. : Лань, 2012. 304 с.
6. Беспалов М. С., Скляренко В. А. Дискретные функции Уолша и их приложения. Владимир : ВлГУ, 2014. 68 с.
7. Фарков Ю. А. Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах // Функц. анализ и его прил. 1997. Т. 31, вып. 4. С. 86–88. DOI: <https://doi.org/10.4213/faa498>
8. Lang W. C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. Vol. 24, № 3. P. 533–544.
9. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7580>
10. Плещева Е. А., Черных Н. И. Построение ортогональных базисов мультивсплесков // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 221–230.
11. Фарков Ю. А., Строганов С. А. О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений // Изв. вузов. Матем. 2011. № 7. С. 57–66.
12. Барышев А. А., Лукомский Д. С., Лукомский С. Ф. Системы сжатия и сдвигов в задаче сжатия изображений // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 505–510. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-4-505-510>
13. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 464 с.
14. Беспалов М. С. Дискретные преобразования Крестенсона // Пробл. передачи информ. 2010. Т. 46, вып. 4. С. 91–115.
15. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука. 1976. 544 с.

Образец для цитирования:

Беспалов М. С. Троишный дискретный вейвлетный базис // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 367–377. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-367-377>

Ternary Discrete Wavelet Basis

M. S. Bespalov

Mikhail S. Bespalov, <https://orcid.org/0000-0003-0661-337X>, Vladimir State University, 87 Gorky St., Vladimir 600000, Russia, bespalov@vlsu.ru

The discrete version and the basic construction of the ternary multiresolution analysis are given, similar to the binary model case of the Haar multiresolution analysis. Based on the constructed basis, an algorithm similar to the fast Haar transformation is proposed. Typical calculation examples are provided.

Keywords: discrete harmonic analysis, discrete Haar transform, wavelet, shifts and dilations, multiresolution analysis.



Received: 06.05.2019 / Accepted: 31.12.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

References

1. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Teoriya vsplezskov* [Wavelet theory]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 616 p. (in Russian).
2. Masharsky S. M., Malozemov V. N. Haar spectra of discrete convolutions. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2000, vol. 40, no. 6, pp. 914–921.
3. Ber M. G., Malozemov V. N. The best formulae for the approximate computation of discrete Fourier transforms. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1992, vol. 32, no. 11, pp. 1533–1544.
4. Bepalov M. S. Bernoulli's discrete periodic functions. *Applied Discrete Mathematics*, 2019, no. 43, pp. 16–36. DOI: <https://doi.org/10.17223/20710410/43/2>
5. Malozemov V. N., Macharskiy S. M. *Osnovy diskretnogo garmonicheskogo analiza* [Basics of Discrete Harmonic Analysis]. St. Petersburg, Lane, 2012. 304 p. (in Russian).
6. Bepalov M. S., Sklyarenko V. A. *Diskretnye funktsii Uolsha i ikh prilogeniya* [Discrete Walsh Functions and its Applications]. Vladimir, Vladimirskiy gosudarstvennyi universitet, 2014. 68 p. (in Russian).
7. Farkov Yu. A. Orthogonal Wavelets on Locally Compact Abelian Groups. *Funct. Anal. Appl.*, 1997, vol. 31, iss. 4, pp. 294–296. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02466067>
8. Lang W. C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group. *Houston J. Math.*, 1998, vol. 24, no. 3, pp. 533–544.
9. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases. *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, no. 5, pp. 669–691. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM2010v201n05ABEH004088>
10. Pleshcheva E. A., Chernykh N. I. Construction of orthogonal multiwavelet bases. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 162–172. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543815020169>
11. Farkov Yu. A., Stroganov S. A. The use of discrete dyadic wavelets in image processing. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011, vol. 55, no. 7, pp. 47–55. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X11070073>
12. Barichev A. A., Lukomskii D. S., Lukomskii S. F. Systems of Scales and Shifts in the Problem Still Image Compression. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 2, pp. 505–510 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-4-505-510>
13. Daubechies I. *Ten Lestures on Wavelets*. SIAM, 1992. 454 p. CBMS-NSR Series in Appl. Math.
14. Bepalov M. S. Discrete Chrestenson transform. *Probl. Inform. Transm.*, 2010, vol. 46, iss. 4, pp. 353–375. DOI: <https://doi.org/10.1134/S003294601004006X>
15. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka, 1976. 544 p. (in Russian).

Cite this article as:

Bepalov M. S. Ternary Discrete Wavelet Basis. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 367–377 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-367-377>
