

ТРИЗ-МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

Клепиков Валерий Николаевич,

кандидат педагогических наук, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «Институт изучения детства, семьи и воспитания» РАО, учитель математики и этики МБОУ СШ № 6 г. Обнинска, Klepikovvn@mail.ru

ТРИЗ-МАТЕМАТИКА – ЭТО НЕ ПРОСТО НЕЧТО ЗАНИМАТЕЛЬНОЕ И УВЛЕКАТЕЛЬНОЕ. БЛАГОДАРЯ МЕТОДИЧЕСКОМУ ИНСТРУМЕНТАРИУ ТРИЗ-МАТЕМАТИКИ РЕБЯТА ИЗОБРЕТАЮТ НОВЫЕ, ПОДОБНЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, ВЫХОДЯТ НА НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ПУТИ РЕШЕНИЯ, РАЗРЕШАЮТ ПАРАДОКСЫ И ПРОТИВОРЕЧИЯ, А ЗНАЧИТ, УСТРАНЯЮТ В МЫСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ ИНЕРЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ И – ГЛАВНОЕ – ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО РАЗВИВАЮТСЯ.

- ТРИЗ-математика • эвристический поиск • закрытые задачи • открытые задачи
- стратегия решения задачи • инерционное мышление • результат • продукт
- математическая картина мира

Математический опыт учащегося нельзя считать полным, если он не имел случая решить задачу, изобретённую им самим.
Д. Пойя

За последние годы школьная математика обогатилась и обогащается многими содержательными линиями: практическая, историческая, метапредметная, эстетическая, экологическая, экономическая, этическая, художественная, сакральная, эвристическая, философская и т.д. Все данные линии придают математике дополнительные привлекательные черты, если, конечно, математическое образование не выхолащивается и не сводится лишь к подготовке учащихся к государственной итоговой аттестации. Одним из важнейших содержательных компонентов является ТРИЗ-математика, которая недостаточно разработана, и именно ей мы уделим основное внимание в предлагаемой статье.

Основоположник ТРИЗ Г.С. Альтшуллер в статье «Теория решения изобретательских задач как основа развития творческого мышления учащихся» пишет: «ТРИЗ нуждается в школе в той же мере, в какой современная школа нуждается в ТРИЗ. Первая цель: развивать в наиболее благоприятном для этого возрасте вкус к творчеству (не только техническому; обучение ТРИЗ можно вести на задачах и упражнениях, относящихся к самым различным областям знания). Открыть мир творчества, привить начальные навыки поведения в этом необычном мире, заразить творчеством, вырабатывать элементы культуры творческого

мышления. Вторая цель: использовать ТРИЗ как «живую воду», стимулятор интереса к основным учебным предметам. Освоение и применение ТРИЗ вызывают устойчивую тягу к физике, химии, математике» [1]. Г.С. Альтшуллер приходит к выводу, что основная функция образования – подготовить к встрече с новыми задачами, с которыми не приходилось сталкиваться раньше.

Важно добавить, что ТРИЗ-математика имеет огромное значение для общекультурного развития человека, в частности – для его творческого развития. Базовые знания, идеи, проблемы и методы решения классических задач составляют основу не только математической, но и его общей культуры [2]. В современном мире высоких технологий невозможно полноценно существовать, если не владеть классическими и эвристическими методами познания мира, различными способами решения стандартных и нестандартных задач. И весомый вклад в этот процесс привносит ТРИЗ-математика.

Как считает продолжатель идей Г.С. Альтшуллера в педагогике А.А. Гин, количество новых задач, с которыми приходится сталкиваться людям, резко возросло. И ответственность за решение новых задач также возросла. Хорошее решение задачи – новые возможности, плохое – новые неприятности, вплоть до экологических катастроф.

Впервые в истории человечества появилась потребность в целенаправленной и массовой подготовке универсальных Решателей. Поэтому крайне необходима профессия добротного Решателя. Не просто химика или биолога, физика или техника, психолога или социолога, а именно – Решателя. Потому что современность всё чаще сталкивает нас со сложными многофакторными задачами, которые шире любой конкретной специальности. Кто-то ведь должен вязать концы в единый узел, кто-то должен принимать язык и методы представителей разных специальностей [3].

Возникает вопрос: чем же отличается детское тризовское мышление от нетризовского? Вот далеко неполный перечень особенностей тризовского мышления:

- 1) умение ставить множество острых вопросов («искусство вопрошания»);
- 2) отсутствие страха перед противоречиями и умение приблизиться к их решению;
- 3) умение находить противоречие, проблему, различные «нестыковки», затруднения;
- 4) умение не только обобщать, но и легко переходить от абстрактного к конкретному и наоборот;
- 5) умение не только видеть в различных предметах и ситуациях аналогии, одинаковые признаки, но и работать с ними в проблемных ситуациях;
- 6) использование не только формальной логики, но и вероятностной, парадоксальной, диалектической;
- 7) наличие не только спонтанного воображения, но и воображения управляемого;
- 8) умение перевести не только реальную ситуацию в воображаемую (модельную), но и воображаемую – в реальную;
- 9) большая вариативность решений поставленной задачи;
- 10) наличие более целенаправленного и организованного мышления;
- 11) умение строить адекватные и аутентичные модели;
- 12) уменьшение влияния стереотипов мышления;
- 13) наличие большого направленного внимания и навыки работать в группе.

Как известно, к ТРИЗ-математике в школе учителя относятся до сих пор насторожен-

но, так как не совсем понятно, как оценивать так называемые открытые задачи, которые всегда имеют несколько путей решения и могут иметь несколько возможных равноценных ответов. Однако именно математика привносит в ТРИЗ-педагогику множество интереснейших задач, подводящих детей не только к математическому, но и техническому творчеству.

Наталкивают на необходимость введения элементов ТРИЗ-математики и оригинальные высказывания детей, которые просто необходимо органично встраивать в общий контекст математического познания мира. Приведём некоторые примеры детских реплик.

- ✓ «Между любыми двумя числами залегает целая пропасть чисел».
- ✓ «Доля всегда помнит о целом и части, в отличие от целого и части».
- ✓ «Трёхмерные фигуры дают тень».
- ✓ «Прямоугольник нельзя поддержать в руке, так как он существует только на плоскости».
- ✓ «Любая точка прямой является её центром».
- ✓ «Бесконечную прямую охватить нельзя, поэтому назвать и определить её невозможно».
- ✓ «Окружность – это фигура, у которой ни одна точка не выпячивается, потому что она ровная».
- ✓ «Точка – это окружность бесконечно малого радиуса».
- ✓ «Число есть единство конечного и бесконечного, ведь не существует наибольшего числа и любое число можно делить до бесконечности».
- ✓ «Так как точка является безразмерной и бесформенной геометрической фигурой, то из неё могут возникнуть все другие математические фигуры».
- ✓ «Через две точки можно провести сколько угодно прямых, так как они безразмерные».
- ✓ «Два любых отрезка равны, так как они состоят из бесконечного количества точек, а бесконечность не может быть больше бесконечности».

На наш взгляд, именно ТРИЗ-математика помогает в мыслительной деятельности человека устранить инерционные явления (трафареты, шаблоны, заикленность на

штампах и т.п.). Для этого используются следующие задачи: шуточные, замысловатые (запутанные), нестандартные (с подвохом), избыточные (есть лишние данные), двусмысленные, ошибочные, провокационные, противоречивые, софистические (обманчивые), парадоксальные, эвристические и многие другие.

На уроках математики можно найти компромиссный вариант между закрытыми и открытыми заданиями, ведь в математике существует множество различных по смыслу задач. Поэтому сила математики заключается в умелом сопряжении однозначных и многозначных задач. Математика может легко заполнить недостающие пустоты и лакуны, воссоздавая всё новые и новые задачи. Таким образом, можно не сразу, а постепенно подводить ребят к тому, что существуют не только закрытые (однозначные), но и открытые (многозначные) задачи, которые в жизни чаще всего и встречаются.

Перечислим три основных требования к условию творческой или исследовательской задачи:

- 1) наличие противоречия;
- 2) корректность вопроса;
- 3) достаточность условия.

Условно разделим предложенные ниже задачи на несколько типов: необычные, софистические, парадоксальные, конструктивные, открытые.

I. Необычные задачи – это задачи, которые на первом этапе осмысления противоречат «здравому смыслу», непривычные для восприятия. При этом очевидно, что «здоровый смысл» не является величиной постоянной. Мы приводим примеры задач, взятых из собственной практики. Нередко трудности с решением данных задач возникают из замкнутости сознания учащихся на штампах, шаблонах, трафаретах. Известный пример: подобная «интеллектуальная инерция» происходит в том случае, когда ученик на «семью восемь» быстро отвечает – «сорок восемь».

Первая задача. «Рыба весит 4 кг плюс половина её собственного веса. Сколько весит рыба?» Ответ: 8 кг. Очень часто учени-

ки отвечают, что 6 кг. Объяснение: фразой «рыба весит 4 кг», где 4 кг – это только часть, делается попытка закамouflировать вес всей рыбы (целое), который больше в два раза, т.е. делается попытка подменить часть целым.

Вторая задача. «Ребята пилият брёвна на метровые куски. Отпиливание одного такого куска занимает одну минуту. За сколько минут они распилят бревно длиной 5 метров?» Некоторые ребята, не подумав, быстро отвечают: 5 минут. Однако на самом деле 4 минуты. Можно сказать, что это задача практико-ориентированная – нужно представить сам процесс.

Третья задача. «Цену товара повысили на 20%. Через некоторое время её понизили на 20%. Когда товар стоил дешевле: до повышения или после снижения?» Иногда, не думая, ребята говорят, что цена товара не изменилась. Однако правильный ответ: после снижения. Объяснение: в задаче фигурируют два целых (две цены: большая и меньшая), относительно которых мы находим 20%.

Четвёртая задача. «В заданной последовательности, состоящей из одиннадцати чисел, сумма любых трёх рядом стоящих целых чисел больше нуля. Может ли сумма всех чисел последовательности быть отрицательной?» Странно, но факт – может. Вот эта последовательность: $-7, 2, 6, -7, 2, 6, -7, 2, 6, -7, 2$. Что же это означает? Это означает, что, например, фирма может быть прибыльной за любые три подряд дня, но убыточной – за одиннадцать дней.

Пятая задача. «В сосуд кладут бактерию, которая каждую секунду делится на две. Через одну минуту бактериями заполняется весь сосуд. Спрашивается, за какое время заполнится сосуд, если вначале положить не одну бактерию, а две?» Ответ «за 59 секунд» новичка обычно шокирует. Можно гарантировать, что подавляющее большинство ребят будут настаивать на 30 секундах. Более того, как показывает практика, когда они поймут ход решения и согласятся с 59 секундами, то через некоторое время вновь возвращаются к своим 30 секундам.

Шестая задача. «Три курицы за три дня снесли три яйца. Сколько снесут двенад-

цать кур за двенадцать дней, если производительность будет та же?» Ребята сильно удивляются, когда узнают, что «очевидный» ответ «12 яиц» неверен. В ходе решения нужно выяснить, во сколько раз увеличилось число кур (в 4 раза); как при этом изменилось число яиц, если число дней не изменилось (увеличилось в 4 раза); во сколько раз увеличилось число дней (в 4 раза); как при этом изменилось число яиц (увеличилось в 4 раза). Тогда число яиц равно: $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

Седьмая задача. «Автомобиль проехал расстояние между двумя городами со скоростью 60 км/ч и возвратился со скоростью 40 км/ч. Какова была средняя скорость его езды?» Ребята тут же говорят ответ: 50 км/ч, но данный ответ неверен. Правильный ответ: 48 км/ч. Объяснение: в данной задаче отсутствует расстояние, но так как оно одинаковое, то его можно взять за единицу, тогда $x = (1 + 1) : (1/60 + 1/40) = 48$ км/ч. Полученная величина называется средним гармоническим. В этой связи хорошо бы параллельно предложить задачу, где действительно получается 50 км/ч. «Автомобиль ехал сначала 1 час со скоростью 60 км/ч, а потом 1 час со скоростью 40 км/ч. Найти среднюю скорость езды автомобиля».

Восьмая задача. «Две гусеницы забрались на один листок площадью 40 кв. см.

– Это моё! – грозно сказала одна и очертила на листе территорию площадью 25 кв. см.

– Нет, это моё! – сказала ещё более грозно вторая и очертила территорию такой же площади.

Образовалась спорная территория. Чему равна её площадь?» Ответ: 10 кв. см.

Девятая задача. «Полтрети – число 100». Что это за число? Ответ: полтрети есть $1/6$, значит, 600.

II. Софистические задачи – это задачи, в которых сознательно «спрятана» ошибка, которую нужно распознать. При этом «внешне» задачи могут выглядеть вполне благопристойно. В ходе поиска ошибок в таких задачах очень важно выявить, какие законы и правила математики нарушены.

Первая задача. «Полупустое есть то же, что и полуполное. Если равны половины, значит, равны и целые. Следовательно, пустое есть то же, что и полное». Это софистическая задача. В данном умозаключении обыгрывается редкая ситуация, когда мы можем сказать, что полуполное есть полупустое. Если быть точными, то полупустое – это половина от пустого сосуда, полуполное – это половина от полного сосуда. Эти половинки не эквивалентны. Но в разговорной речи их употребляют как равноправные слова, синонимы. Недаром говорят, что оптимист видит полуполный сосуд, а пессимист – полупустой.

Вторая задача. «Чем больше сыра, тем больше дырок. Чем больше дырок, тем меньше сыра. Значит, чем больше сыра, тем меньше сыра». Ребята, прочитав этот софизм, нередко находятся в замешательстве. Хотя здесь всё достаточно просто: данные утверждения рассматривают разные состояния сыра: первый – в динамике, второй – в статике, поэтому и возникает противоречие. Здесь нарушен логический закон тождества: объект, по отношению к которому мы формулируем суждения, должен находиться в одном и том же состоянии.

Третья задача. «Докажем, что 4 руб. = 40 000 коп. Возьмём равенство: 2 руб. = 200 коп., возведём обе части в квадрат, получим 4 руб. = 40 000 коп». Что в этом утверждении неправильно? Обычно ребята замечают только одну ошибку, например математическую: если мы возводим в степень числа, то должны возвести в степень и единицы измерения. Но здесь наличествует и ошибка фактическая: не существует рублей и копеек в квадрате. Таким образом, ответ будет полным, если мы найдём и математическую, и фактическую ошибки.

Четвёртая задача. «Однажды древнегреческий математик Зенон в ответ на вопрос ученика, почему он сомневается во всём, нарисовав две неравные окружности, сказал: «Большая окружность – ограничивает мои знания, малая – твои. Всё, что за пределами окружности, – область неизвестного. Ты видишь, что граница соприкосновения моего знания с неизвестным гораздо больше. Вот почему мне кажется, что я знаю меньше тебя. Прав ли Зенон?» Здесь всё зависит от первоначальной мировоззренче-

ской установки: если область непознанного стремится к бесконечности (она не уменьшается), то Зенон прав, но если область неизвестного имеет ограниченную площадь (и она постоянна), то Зенон не прав.

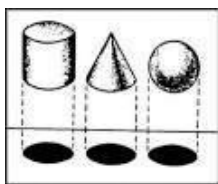
III. Конструкторские задачи¹ – это задачи, для решения которых нужно произвести геометрические, пространственные, топологические преобразования или построить в своём воображении адекватную и эффективную модель решения задачи.

Первая задача. «Однажды Карлсон взял с собой банку с вареньем. Он обычно сначала съедал половину, а когда проголодается – ещё половину. На банке нет делений. Как отмерить из этой банки ровно половину с одной попытки?» Ответ: наклонить банку так, чтобы верхняя часть доньшка оказалась на одной горизонтали с нижней точкой горлышка.



Вторая задача. «Сколько равных треугольников можно составить из шести спичек?» Ребята сначала пытаются построить модель на плоскости,

но у них получается только два треугольника и одна спичка остаётся. Затем они приходят к догадке, что нужно выходить в пространство и строить пирамиду. И только тогда получается 4 треугольника. Таким образом, данная задача не решается на двумерной плоскости, но легко решается в трёхмерном пространстве.



но у них получается только два треугольника и одна спичка остаётся. Затем они приходят к догадке, что нужно выходить в пространство и строить пирамиду. И только тогда получается 4 треугольника. Таким образом, данная задача не решается на двумерной плоскости, но легко решается в трёхмерном пространстве.

Третья задача. «Какие трёхмерные фигуры в геометрии могут дать в проекции круг?» Ответ: шар, цилиндр, конус. Объяснение: если спроецировать цилиндр, конус и шар на плоскость, то проекции могут дать одну и ту же фигуру – круг.

Четвёртая задача. «На полке в кабинете русского языка стоит собрание сочинений одного из писателей. В каждом томе 320

страниц. Толщина одной страницы 0,05 мм. Толщина переплётного картона 2 мм. Червяк прогрыз ход от пер-

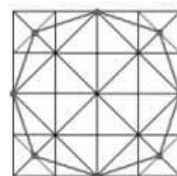
вой страницы первого тома до последней страницы второго. Какой путь он прогрыз?» Обычно, перед тем как начать вычислять, ребята отвечают, что червяк прогрыз $320 + 320$ страниц и ещё две обложки. Но это неверно! Это, собственно, топологическая задача: червяк прогрыз только две обложки, то есть 4 мм.

Пятая задача. «Сколько измерений имеет треугольник Пенроуза?» Обычный треугольник не существует в пространстве (это двумерная фигура), поэтому его невозможно «подержать в руке». В пространстве может существовать пирамида. У треугольника Пенроуза странное существование: существуя как будто в плоскости, он явно «претендует» на существование и в пространстве. Отсюда получается раздвоение: по-настоящему он не существует ни в плоскости, ни в пространстве. Таким образом, треугольник Пенроуза и провокация, так как он претендует на «полноценное» существование как на плоскости, так и в пространстве, и геометрический парадокс, так как он заставляет почувствовать диалектику подлинного и мнимого, существующего и несуществующего, истинного и кажущегося.



Шестая задача. «Однажды учитель предложил ученикам третьего класса сложить числа от 1 до 10 включительно. Ответ последовал незамедлительно. Карл Гаусс назвал число 55». Но самое удивительное, что он нашёл наиболее простой способ решения этого примера. Во-первых, он мог решить так: $(1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) = 11 \cdot 5 = 55$. Во-вторых, он мог сложить не одну, а две суммы – прямую и обратную: $(1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) + (6 + 5) + (7 + 4) + (8 + 3) + (9 + 2) + (10 + 1)$, заметив, что каждая пара чисел даёт одно и то же число 11. Затем всё оказалось очень просто: $(11 \cdot 10) : 2 = 55$. Таким образом, Карл Гаусс построил эффективную модель решения задачи, которая стала классической.

Седьмая задача. «Как с помощью циркуля и линейки наиболее быстро, эффективно, точно и красиво построить правильный пятиугольник, шестиугольник,

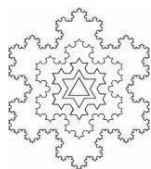


¹ Как известно, занятиям, имеющим конструкторскую направленность, особое значение придавал известный педагог и философ Д. Дьюи; отсюда его положительное отношение к созданию проектов.

восьмиугольник и т.д.» Указание: перед тем как выбрать наиболее эффективный способ, необходимо рассмотреть несколько возможных.

Восьмая задача. «Разделить с помощью циркуля и линейки угол на три равные части». Как известно, это задача на трисекцию угла. Некоторые углы разделить достаточно просто (трисекция осуществима для углов $\alpha = 360^\circ / n$ при условии, что целое число n не делится на 3), но большинство углов разделить невозможно, однако можно придумать способ, который позволит разделить достаточно точно.

IV. Парадоксальные задачи – это задачи, которые дают возможность разрешить противоречие между единым и многим, конечным и бесконечным, частью и целым, статикой и динамикой, закономерным и случайным, рациональным и иррациональным, предсказуемым и непредсказуемым и т.п.



Первая задача. «Можно ли обнаружить такую фигуру, у которой периметр был бы бесконечным, а площадь – конечным числом?» Это удивительно, но можно. Такой фигурой, например, является фрактал. Фрактал (от лат. fractus – дроблёный, сложенный) – это бесконечно самоподобная геометрическая фигура, каждый фрагмент которой повторяется при уменьшении масштаба. Или ещё одна подобная задача: может ли фигура, собранная из бесконечного числа частей, иметь тем не менее конечную площадь?

Вторая задача. «Можно ли делить на ноль?» Давайте попробуем единицу разделить на ноль. Но так как на ноль делить нельзя, то попробуем делить на числа, близкие к нулю. $1 : 0,1 = 10$; $1 : 0,01 = 100$; $1 : 0,001 = 1000$; $1 : 0,00001 = 10\,000$; $1 : 0,00001 = 100\,000$; $1 : 0,000001 = 1\,000\,000$. Таким образом, чем ближе делитель будет к нулю, тем больше будет частное. И в своём пределе мы получим бесконечно большое число. Следовательно, $1 : 0 = \infty$. Нетрудно также догадаться, что вместо делимого можно подставить любое число, кроме нуля.

Третья задача. «Согласно древней легенде, индийский царь Шерам был восхищён но-

вой игрой – шахматами и предложил её изобретателю, мудрецу Сете, любую награду. Сете попросил плату пшеницей, исходя из следующего расчёта: за первую клетку доски заплатить 1 зерно, за вторую – 2 зерна, за третью – 4 зерна и т.д., за каждую следующую клетку дать в два раза больше зёрен, чем за предыдущую. Конечно же, царь, не догадываясь о подвохе, согласился. Как вы думаете, сколько зёрен попросил Сете за изобретение шахмат?» Итак: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024; 2048; 4096; 8192; 16 384... А теперь укажем результат: 18 446 744 073 709 551 615. Огромность этого числа хорошо иллюстрируется следующим примером. Если всю эту пшеницу удалось бы поместить в амбар шириной 10 м и высотой 8 м, то его длина оказалась бы равной расстоянию от Земли до Солнца (150 000 000 км)! Понятно, что царь этим обстоятельством был не просто удивлён, но шокирован.

Четвёртая задача. «Возьмём натуральные числа, возведём их в квадрат. Зададимся вопросом, каких чисел больше: натуральных или их квадратов?» Ответ: это эквивалентные множества чисел. Объяснение: рассмотрим нижеприведённую таблицу; третья строчка – лишь часть натурального ряда чисел, в ней отсутствуют 2, 3, 5, 6, 7, 8 и множество других натуральных чисел, но каждому числу третьей строчки соответствует одно, и только одно, число первой строчки, следовательно, целое (весь натуральный ряд в первой строчке) «равно» своей части (третья строчка); таким образом, в теории бесконечных множеств теряет силу утверждение «часть меньше целого».

1	2	3	4	5	6	...
1 ²	2 ²	3 ²	4 ²	5 ²	6 ²	...
1	4	9	16	25	36	...

V. Открытые задачи – это задачи, которые всегда имеют несколько путей решения и могут иметь несколько возможных равноценных ответов. В задачниках подобные задачи иногда идут под рубрикой «шуточные». Некоторые задачи формулируют таким образом, чтобы что-то существенное не договорить, а полагать существующим между строк.

Первая задача. «Назовите самое большое число». Здесь могут быть два равнознач-

ных ответа: 1) назвать наибольшее число невозможно и 2) 31 – под числом подразумеваемая число месяца.

Вторая задача. «Можно ли указать наименьшее из всех положительных чисел?» Ответ: нет. Любое предполагаемое ближайшее число всегда можно поделить, например на два. Именно поэтому древнегреческий математик Зенон говорил, что с точки зрения математики движение начать невозможно, так как мы никогда не сможем найти ближайшую точку, в которую нужно переместиться. Другое дело, если это будут натуральные числа, тогда наименьшим числом будет 1.

Третья задача. «Горели семь свечей, три потушили, сколько свечей осталось?» Данная задача имеет три противоречивых ответа. Первый ответ: четыре свечи, так как полноценными свечами считаются только те, которые горят. Второй ответ: семь свечей, так как всё-таки все свечи остались. Третий ответ: три свечи, так как остальные, в конце концов, догорят и исчезнут. Вот такой вот курьёз.

Четвёртая задача. «Половина – треть его». Здесь задача построена на том, что вкладывается разный смысл в понятия «половина» и «треть». Здесь половина – это не от «него». Половина – это всего лишь самодостаточное число 0,5, а треть – это доля от искомого числа. Тогда получается следующее уравнение: $0,5 = x : 3$, очевидно, что результатом будет 1,5.

Пятая задача. Нередко задачи в режиме переговоров выглядят совсем уж двусмысленными. Вот подобная задача. «Требуется полсотни разделить на половину. Сколько получится?» Ответ: не 25, а 100! Объяснение: «на половину» – это не доля от целого, а просто число 0,5.

Конечно, достаточно сложно создавать принципиально новые математические задачи, но вполне возможно изобретать обратные, «противоположные», подобные, находить оригинальные решения, выстраивать модели понимания сложных и нетривиальных задач. ТРИЗ-математика может помочь в понимании задач, которые являются нестандартными и плохо осознаются и понимаются ребятами.

Возьмём для примера задачу из вышеприведённых: «Бактерии размножаются делением – каждую секунду каждая бактерия разделяется на две, которые, в свою очередь, ещё через секунду удваиваются. Известно, что если в стакан поместить 1 бактерию, он заполнится за 1 минуту. В стакане 1 бактерия. Через какое время бактерии заполнят половину стакана? В стакане 2 бактерии. Через какое время бактерии заполнят стакан?» Как, используя ТРИЗ-технологии, её осознать, понять? Как выработать стратегию решения задачи?

Давайте применим метод упрощающей реконструкции задачи. Для начала чуть-чуть изменим условие: пусть сосуд условно заполняется не за 1 минуту, а всего за 5 секунд. Тогда бактерии будут размножаться в следующем режиме: было – 1; затем происходило нарастание – 2; 4; 8; 16; 32. Мы видим, что перед последней секундой сосуд заполнен наполовину, значит, на последней секунде он заполнится также наполовину и станет полным. Таким образом, за 4 секунды сосуд будет заполнен наполовину.

Со вторым вопросом чуть сложнее. Очевидно, вторая бактерия будет размножаться в том же режиме: было – 1; затем происходило нарастание – 2; 4; 8; 16; 32. Кстати, данные процессы можно легко наглядно изобразить с помощью квадратов, заполняющих искомую площадь! А можно ли два данных процесса как-то объединить? Конечно, нужно начать не с 1 бактерии, а с 2 бактерий. Тогда получится: было – 2; затем происходило нарастание – 4; 8; 16; 32. Таким образом, заполнение произойдёт на 1 секунду меньше или раньше, чем 5 секунд, то есть за 4 секунды!

Для ребят в этой задаче обычно сложным является понимание самого процесса размножения, его, так сказать, динамики. В этой связи можно придумать «параллельные» задачи, где рассматриваются процессы изменения по трём законам: $2x$; x^2 ; 2^x . Будем начинать с 2. В первом случае имеем: 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14 и т.д. Во втором случае имеем: 2; 4; 9; 16; 25; 36; 49 и т.д. В третьем случае имеем: 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128 и т.д. Таким образом, мы видим, что последний процесс, по сравнению с двумя первыми, с некоторой «заминкой» вначале довольно быстро возрастает. И этим, отчасти, объяс-

сняется первоначальная сложность понимания задачи: ребята не готовы к такому «радикальному» размножению бактерий.

В контексте задачи на размножение бактерий можно придумать подобные задачи. Например. «В 8 часов утра Вовочка пришёл в школу и в течение первого часа рассказал другу новый анекдот. Затем они в течение одного часа рассказали анекдот другим двум ребятам. За следующий час каждый из ребят, знающих анекдот, сообщал его одному человеку и т.д. Во сколько часов анекдот узнают все ребята в классе, в котором учатся 32 человека? Итак: было – 1; далее – 2; 4; 8; 16; 32. Анекдот в классе узнали за 5 часов, то есть уже в 13 часов все ребята знали свежий анекдот.

На следующем этапе ребята могут познакомиться с показательной функцией $y = 2^x$ и её графиком, решить уравнение $2^x = 32$, где $x = 5$. Такой стремительный рост называется «экспоненциальным». График этой функции, а иногда и саму функцию называют «экспонентой». Тем самым ребята знакомятся не просто с отдельной задачей, а с определённой закономерностью, выраженной графиком и формулой, что намного эффективней.

Другая задача, сочинённая ребятами: «Однажды Геракл встретился с трёхглавой Гидрой и каждую минуту начал отсекать ей головы, но на месте каждой из них сразу же вырастало ещё три. Когда Геракл отрубил 27 голов, то он понял, что сражаться с Гидрой таким способом бесполезно. Через сколько минут Геракл осознал, что отсекать головы змеи бессмысленно?» Итак, Гидра воспроизводила свои головы в соответствии с формулой $f(n) = 3^{n+1}$, где $n = 0; 1; 2; 3...$ Решив уравнение $3^{n+1} = 27$, получим $n = 2$ (минуты). По всей видимости, Геракл стал первым человеком, который в такой критической ситуации столкнулся с экспоненциальным ростом.

Добавим, что с помощью показательной функции описываются многие физические, биологические, социальные, экономические и другие процессы развития (радиоактивный распад, рост народонаселения, расчёты банковских вкладов и т.п.). Например, в процессе размножения бактерий их масса находится по формуле $m = m_0 \cdot a^t$, где m_0 –

масса бактерий в момент $t = 0$, число $a > 1$ зависит от вида бактерий и внешних условий. Обратим внимание, что, по мнению некоторых учёных, объём совокупных знаний цивилизации растёт по экспоненте, поэтому многие знания в современном мире быстро устаревают. Отсюда делается вывод, что современный человек должен и лично, и профессионально самосовершенствоваться всю свою сознательную жизнь.

Интересно, что одна из фирм, которая выпускает противобактериальные средства, ловко воспользовалась для рекламы математическими символами и образами: она изобразила на своей упаковке два графика (части показательной и линейной функций), символизирующие размножение бактерий до и после применения средства.



Напомним, что математическая деятельность имеет и общекультурную цель – человек изобретает и конструирует собственную картину мира [4]. И в этой картине должны быть яркие, опорные и прожитые сведения, формулы, символы, задачи. Ребёнку важно не просто решить задачу, но осмыслить её в контексте личностного развития, отразить приёмы и методы её решения, встроить в систему предметных и собственных знаний. Другими словами, сделать из задачи полноценный личностный продукт.

Более высокий уровень образования достигается тогда, когда задача не «замыкается в себе» («задача ради задачи», «задача для экзамена»), не растворяется среди других задач, но является органичной частью решения какой-либо проблемы. И тогда возможно появление полноценного исследования (проекта), которое подразумевает решение целого комплекса взаимосвязанных задач. При этом в ходе исследования обнаруживается какой-либо универсальный способ понимания, решения, оценивания, что и требуется для достижения метапредметного уровня образования.

Итак, наметим возможный алгоритм подхода к задаче методом ТРИЗ.

1. Понять, определить тип (если это возможно), выбрать способ и решить задачу.
2. Придумать обратные и подобные задачи с ярким содержанием.
3. Обнаружить общую форму (формулу) решения искомых задач.
4. Выявить цель и смысл задачи (что она разрешает, формирует, приоткрывает и т.п.).
5. Усложнить формулировку задачи, изменяя прежние данные или вводя новые параметры.
6. Выявить общую направленность задачи, в частности – на решение какой проблемы она направлена.
7. Осознать значение данной ключевой задачи в истории математики, общекультурную роль.
8. Кристаллизовать опорную задачу (для запоминания, экзамена).

Итак, ТРИЗ-математика – это не просто нечто занимательное и увлекательное. Благодаря методическому инструментарию ТРИЗ-математики ребята изобретают новые, подобные и обратные задачи, выхо-

дят на нетривиальные пути решения, разрешают парадоксы и противоречия, а значит, устраняют в мыслительных процессах инерционные явления и – главное – интеллектуально развиваются. К методам ТРИЗ-математики можно отнести: метод эвристического моделирования, метод реконструкции, метод переизобретения и многие другие творчески ориентированные методы. □

Литература

1. *Альтшуллер Г.С.* «Теория решение изобретательских задач как основа развития творческого мышления учащихся» // Новые ценности образования: ТРИЗ-педагогика. – 2003. – № 1 (12). – С. 3–4.
2. *Клепиков В.Н.* Математическая культура современного школьника // Школьные технологии. – 2015. – № 6. – С. 91–100.
3. *Гин А.А.* Приёмы педагогической техники. – М.: Вита-Пресс, 2013. – С. 80.
4. *Клепиков В.Н.* Формирование математической картины мира в современном школьном образовании // Педагогика. – 2017. – № 3. – С. 49–56.