

Галсы	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	k_1	k_2	$k_3 - 1$	τ
12	0,0006	0,0005	0,0010	0,0032	-0,003	+0,001	+0,005	+2,009
13	0,0010	0,0009	0,0011	0,0035	+0,002	-0,004	+0,003	+2,018
14	0,0008	0,0007	0,0007	0,0033	-0,003	+0,002	+0,001	+2,033
23	0,0006	0,0005	0,0012	0,0027	-0,004	+0,003	+0,002	+2,037
24	0,0008	0,0006	0,0007	0,0022	-0,005	+0,004	+0,004	+2,043
34	0,0008	0,0007	0,0009	0,0032	-0,003	+0,003	+0,002	+2,038
123	0,0004	0,0004	0,0007	0,0024	-0,002	+0,000	+0,000	+2,026
124	0,0006	0,0005	0,0007	0,0022	-0,003	+0,002	-0,001	+2,027
134	0,0006	0,0005	0,0007	0,0025	-0,003	+0,002	+0,002	+2,018
234	0,0009	0,0008	0,0008	0,0021	-0,003	+0,003	-0,002	+2,027
1234	0,0004	0,0003	0,0005	0,0019	-0,003	+0,002	+0,002	+2,026

8. Выводы. Калибровка гравиметра на повторных галсах позволяет исключить влияние на ее точность неизвестной гравитационной аномалии. При этом обеспечивается точность, сравнимая с точностью стендовой калибровки, в процессе геофизических съемок и не требуется дополнительных экспериментов. Эффективным методом решения задачи является метод кратно-масштабного анализа на основе вейвлет-разложения. Для повышения точности метода необходимо проводить дальнейшие исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Торге В. Гравиметрия / Пер. с англ. М.: Мир, 1999.
2. Болотин Ю.В., Голован А.А., Парусников Н.А. Уравнения аэрогравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2002.
3. Болотин Ю.В., Голован А.А., Кручинин П.А. Задача авиационной гравиметрии. Некоторые результаты испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1999. № 2. 36–41.
4. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001.
5. Stepanov O.A., Blazhnov B.A., Koshaev D.A. The Efficiency of Using Velocity and Coordinate Satellite Measurements in Determining Gravity Aboard an Aircraft // Proc. 9th Saint-Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems. Russia, St. Petersburg, May 27–29, 2002.
6. Berzhitsky V.N., Iljin V.N., Saveliev E.B. GT-1A Inertial Gravimeter System Design Consideration and Results of Flight Tests // Proc. 9th Saint-Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems. Russia, St. Petersburg, May 27–29, 2002.
7. Болотин Ю.В., Попеленский М.Ю. Анализ точности решения задачи авиагравиметрии на основе стохастических моделей // Авиакосмическое приборостроение. 2003. № 4. 42–48.
8. Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.
9. Бендат Дж., Пирсол Л. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.

Поступила в редакцию
22.10.2006

УДК 532.581; 539.379.4

ТРЕЩИНА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Г. Т. Бажул, Б. В. Куксенко

Получено аналитическое частное решение для задачи о плоском течении, которое вынуждается в несжимаемой идеальной жидкости окружающей ее жесткой подвижной стенкой, внезапно включаемой во вращение с угловой скоростью ω . Стенка имеет форму эллиптического цилиндра и вращается вокруг своей оси. Решение содержит тангенциальный разрыв скоростей — “висячую” вихревую пелену переменной интенсивности, расположенную между фокусами эллипса (который является направляющей линией цилиндра оболочки). Пелена является аналогом сдвиговой трещины в твердом теле. Предлагаемая работа

продолжает поиск [1] аналитических решений для описания движений материала в установке сложного нагружения — так называемой “вертушке”, в которой величина нагружения материала неизменна, а главные направления нагружения поворачиваются.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскопараллельное, независимое от координаты z , потенциальное нестационарное поле скоростей течения идеальной несжимаемой жидкости внутри эллиптического цилиндра (рис. 1), который в лабораторной системе отсчета вращается вокруг своей оси. Подчеркнем, что исследуется только поле скоростей, а не создаваемое этим полем течение по той причине, что наличие в центральной области течения разрыва в виде висячей вихревой пелены ведет к появлению там зоны активного перемешивания, которое необходимо изучать отдельно. Из множества возможных потенциальных течений мы выберем то частное, которое может быть получено при внезапном разгоне изначально покоившегося эллиптического цилиндра, наполненного покоящейся жидкостью. В несжимаемой жидкости поле скоростей самосогласовано, поэтому оно определяется формой ее границы в совокупности с мгновенным значением угловой скорости. Массовые силы отсутствуют. Обозначим область течения символом Ω , а ее границу — эллипс — символом $\partial\Omega$.

2. Математическая модель. Потенциал Φ течения с полем скоростей $\mathbf{v}(x, y)$: $v_x = \partial\Phi/\partial x$, $v_y = \partial\Phi/\partial y$ удовлетворяет уравнению Лапласа в силу уравнения неразрывности для несжимаемой однородной жидкости, которое сводится к соотношению $\text{div } \mathbf{v} = 0$, т.е.

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{или} \quad \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Граничные условия для идеальной жидкости, находящейся в сосуде с непроницаемыми стенками, зададим в виде безотрывного проскальзывания:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = v_n, \quad (2)$$

где v_n — нормальная составляющая скорости границы.

Мы располагаем для потенциала скорости Φ в области Ω уравнением Лапласа (1) и распределением нормальной к ней производной на границе (2) $\partial\Omega$, т.е. имеем внутреннюю задачу Неймана.

3. Вырожденные эллиптические координаты. Введем криволинейные координаты на плоскости таким образом, чтобы эллипс границы стал одной из координатных линий. Пусть [2] переход от прямоугольной системы координат (x, y) к эллиптической осуществляется по правилу

$$f : \begin{cases} x = \text{ch } \xi \cos \eta, \\ y = \text{sh } \xi \sin \eta, \end{cases} \quad (3)$$

где $\eta \in [0, 2\pi)$, а $\xi > 0$. Линии $\xi = \text{const}$ в плоскости (x, y) образуют семейство вложенных друг в друга эллипсов с общими фокусами, но разным эксцентриситетом. Фокусы $(x = \pm 1, y = 0)$ соответствуют точкам $\xi = 0, \eta = \pi k$ ($k = 0, 1$). Линии $\eta = \text{const}$ представляют собой семейство ортогональных к эллипсам гипербол с теми же фокусами. Якобиан $J = \text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta$ отображения f отличен от нуля везде, кроме изолированных точек — фокусов. Отображение f конформно. Дифференциальные формулы связи между двумя системами координат имеют вид

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta = \text{sh } \xi \cos \eta d\xi - \text{ch } \xi \sin \eta d\eta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta = \text{ch } \xi \sin \eta d\xi + \text{sh } \xi \cos \eta d\eta. \end{aligned} \quad (4)$$

Ограничивающий нашу область эллипс $\partial\Omega$ в новых координатах имеет уравнение вида $\xi = \xi_*$, при этом ξ_* связано с эксцентриситетом $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, где a — большая ось эллипса, а b — малая, следующим образом: $\xi_* = -\ln(e/(1 + \sqrt{1 - e^2}))$. Например, для эллипса с эксцентриситетом $e = 0,03$

$$\xi_* = -\ln(0,03/(1 + \sqrt{0,9991})) \sim -\ln 0,0150 \sim 4,2.$$

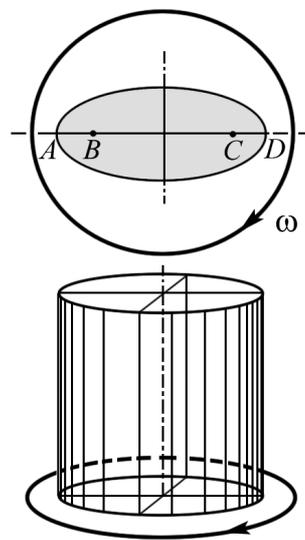


Рис. 1

В плоскости (ξ, η) граничный эллипс (рис. 2, б) отображился на отрезок прямой $A'DA''$: $\xi = \xi_*$, $\eta \in [0, 2\pi]$. Образ большой оси эллипса AD (см. рис. 1; 2, а) разбился на три отрезка: на соединяющий фокусы отрезок BC и отрезки AB и CD , которые соединяют фокусы с близлежащими вершинами эллипса. Отрезок AB отображен в два отрезка $A'B'$ и $A''B''$, каждый из которых является отдельной стороной большого прямоугольника, примыкающего двумя вершинами углов к концам отрезка $A'DA''$. Отрезок BC превратился в разрез, два берега которого отобразились в две половины отрезка $B'CB''$. А образ отрезка CD соединил середины отрезков $B'CB''$ и $A'DA''$, разрезав большой прямоугольник $A'A''B''B'$ на два равных. Вся оставшаяся (после удаления большой оси AD эллипса) часть области Ω заполнила внутренности обоих малых прямоугольников.

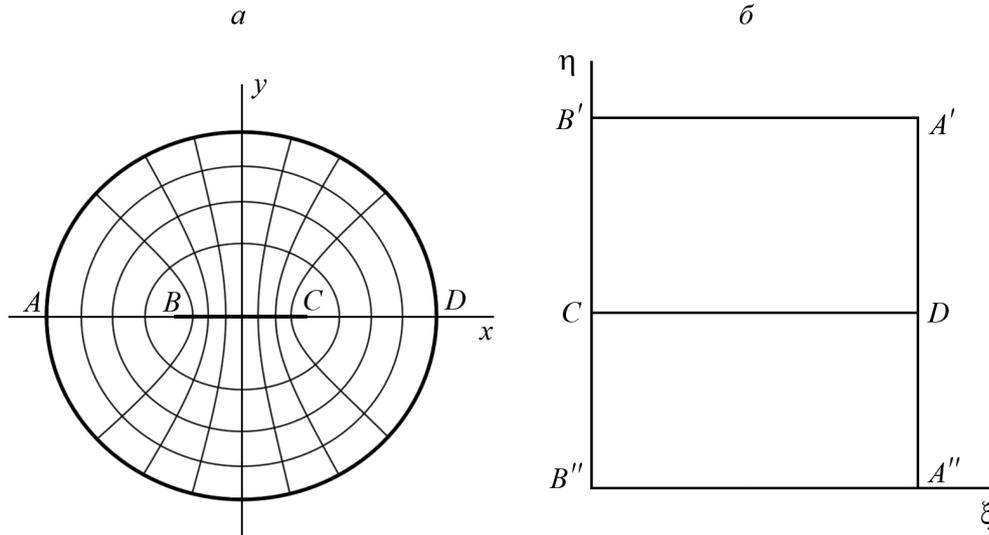


Рис. 2

Соответствие (3) отображает на прямоугольник не эллипс с внутренней областью, а эллипс и внутреннюю область с прямолинейным разрезом от фокуса до фокуса. Область Ω стала двусвязной. В результате изменилась область, в которой выполняется уравнение Лапласа, но всего лишь на множество меры нуль. А граничное условие задачи Неймана перенесено в плоскость (ξ, η) , но не на всю границу. В этой плоскости область (прямоугольник), в которой ищется решение, односвязна, но решается уже не задача Неймана, поскольку прежняя граница отображена только на часть новой (на рисунке это правая сторона прямоугольника). Остальные части границы являются новыми, приобретенными при отображении. При этом верхняя сторона связана с нижней только условием периодичности. Левая сторона прямоугольника получена из двух берегов разреза, и на ней математическая модель не имеет никаких условий. Здесь следует привлечь интеграл уравнения импульсов из механической задачи и удовлетворить на разрезе дополнительному условию непрерывности давления, которое эквивалентно непрерывности модуля скорости или, что то же, модуля градиента потенциала Φ . При этом решение задачи приобретет физический смысл и будет определено.

4. Математическая модель в новой системе координат. Так как особые точки отображения, расположившись на границе прямоугольника, не попали в его внутренность, то в силу конформности отображения оператор Лапласа приобретает там отличный от нуля множитель, равный якобиану перехода. Поэтому уравнение Лапласа в новых координатах сохраняет свой вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0.$$

В силу той же конформности нормаль к эллиптической границе перешла в нормаль к правой стороне прямоугольника, и поэтому возле этой границы сохранилась часть задачи Неймана: на границе задано значение нормальной производной решения, причем в окрестности границы решение должно удовлетворять уравнению Лапласа.

Сформулированная таким образом задача заведомо не имеет единственного решения, однако можно построить такое ее частное решение, которое не только удовлетворит надлежащему граничному условию,

но и будет гармонической функцией во всей области, удовлетворит условию периодичности, условию непрерывности давления на разрезе и к тому же еще будет обладать нулевой циркуляцией вокруг разреза.

5. Компоненты скорости в эллиптической системе координат. Найдем граничные условия для поля скоростей из геометрических соображений. Каждая точка эллипса движется по окружности с постоянной угловой скоростью. Вектор скорости точки можно разложить на составляющие и в декартовых (орты \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y), и в полярных (орты \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_φ) координатах:

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi = r \omega \mathbf{e}_\varphi,$$

учитывая, что $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$. Из связи между ортами $(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\varphi) = -\sin \varphi$, $(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\varphi) = \cos \varphi$ и формул пересчета $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ следует

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\omega \sin \varphi, \\ \dot{y} = r\omega \cos \varphi, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} dx = -\omega y dt, \\ dy = \omega x dt. \end{cases}$$

Значит, в силу (3)

$$\begin{cases} \text{sh } \xi \cos \eta \frac{d\xi}{dt} - \text{ch } \xi \sin \eta \frac{d\eta}{dt} = \frac{dx}{dt} = -\omega y = -\omega \text{sh } \xi \sin \eta, \\ \text{ch } \xi \sin \eta \frac{d\xi}{dt} + \text{sh } \xi \cos \eta \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} = \omega x = \omega \text{ch } \xi \cos \eta, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\eta}{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\omega}{2} \frac{\text{sh } 2\xi}{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}.$$

Производная $d\xi/dt$ представляет собой нормальную к границе составляющую скорости стенки и жидкости в новых координатах. Ее нужно связать с производной от потенциала скорости в тех же координатах. Для этого положим в формулах (4) $d\eta = 0$. Дифференциалы $dx = \text{sh } \xi \cos \eta d\xi$ и $dy = \text{ch } \xi \sin \eta d\xi$ станут декартовыми составляющими элементарного вектора $d\mathbf{n}$ нормали. При этом $|dn| = \sqrt{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta} |d\xi|$, значит, $|d\xi/dt| = |dn/dt| / \sqrt{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}$. С другой стороны,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right| = \sqrt{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|.$$

Из соотношений $|\partial \Phi / \partial n| = |v_n| = |dn/dt|$ имеем

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right| = (\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta) \left| \frac{d\xi}{dt} \right| = (\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta) \left| \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\eta}{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta} \right| = \left| \frac{\omega}{2} \sin 2\eta \right|. \tag{5}$$

Поскольку мы используем внутреннюю нормаль, из (5) следует граничное условие (одинаковое при всех значениях ξ)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi_*} = -\frac{\omega}{2} \sin 2\eta. \tag{6}$$

6. Решение уравнения Лапласа. Метод разделения переменных для решения уравнения Лапласа дает несколько семейств решений. Выберем из них одно, хорошо соответствующее по форме граничному условию (6) и при $\lambda > 0$ убывающее по мере приближения к центру от вынуждающего движение края:

$$C e^{\lambda \xi} \sin \lambda \eta. \tag{7}$$

Константы C и λ определяются граничным условием (6), и решение (7) приобретает вид

$$\Phi = -\frac{\omega}{4} e^{-2(\xi_* - \xi)} \sin 2\eta, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{\omega}{2} e^{-2(\xi_* - \xi)} \sin 2\eta, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{\omega}{2} e^{-2(\xi_* - \xi)} \cos 2\eta. \tag{8}$$

Оно периодически по η и удовлетворяет условию на внешней границе ($\xi = 0$), т.е. на разрезе, на разных его берегах, направления роста переменной η противоположны, и поэтому содержащая нечетную функцию $\sin 2\eta$ производная по ξ , которая определяет поперечную к разрезу составляющую

скорости, оказывается на разрезе непрерывной, а содержащая косинус продольная составляющая скорости оказывается нечетной, так как ее значения на разных берегах равны по модулю, но противоположны по знаку. Модуль скорости, а с ним и давление на разрезе непрерывны. Картина движения центрально-симметрична.

Построение поверхности потенциала как функции координат в трехмерном пространстве показывает, что на разрезе он разрывен и граница разреза образует в пространстве плоскую (плоскость проходит через ось вращения) линию, которая сходна с лемнискатой Бернулли и которая окружает две симметричные дырки в гладкой поверхности потенциала. В двух самых крайних точках границы касательная к ней вертикальна, однако же возникающая при этом особенность в поле скоростей является слабой (сходной с логарифмической) и для физических интерпретаций затруднений не создает (интеграл от скорости, он же потенциал, всюду ограничен).

7. Предположения качественного характера. Из физических соображений можно понять, что везде вне отрезка, соединяющего фокусы эллипса, выполнены условия несжимаемости жидкости и отсутствия в ней завихренности. Ввиду того что в идеальной жидкости нет сдвиговых напряжений, невозможно изменить интегральный момент количества движения всей массы жидкости, а по причине того, что оболочка является некруговой, удаленная от центра часть жидкости вовлекается в окружное движение и приобретает момент. Отсутствие вязкости приводит к тому, что единственным способом взаимодействия частей жидкости является вытеснение. Вытеснение в сторону центра с разных направлений не вполне согласовано. В итоге у центра появляется компенсирующая вихревая пелена с завихренностью противоположного направления. Именно этот эффект наблюдается в нашем решении.

8. Безвихревое решение той же задачи в рамках постановок, описанных в [3], предложил профессор А.Н. Голубятников. Для удобства сравнения мы это решение приведем в наших обозначениях:

$$\Phi = -\frac{\omega}{4} \frac{\operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi_*} \sin 2\eta, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{\omega}{2} \frac{\operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi_*} \sin 2\eta, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{\omega}{2} \frac{\operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi_*} \cos 2\eta. \quad (9)$$

Решения (8) и (9) удовлетворяют одному и тому же уравнению и имеют одинаковое граничное условие на эллиптической (внешней) границе. Но решение (9) является непрерывным, гладким и безвихревым во всей области. А решение (8) обладает теми же свойствами в двусвязной области, которая получается удалением из внутренности эллипса прямолинейного отрезка, соединяющего фокусы. На этом отрезке располагается вихревая пелена. Наличие этой пелены выводит решение (8) из предположений постановок, описанных в [3], т.е. оно является новым.

В чистом виде невозможна реализация решения, возможно лишь сопоставление решения с экспериментами на маловязких жидкостях. Но поскольку даже в очень маловязкой жидкости наше решение потеряет сингулярности в поле скоростей, расположенные в фокусах эллипса, оба решения станут в каком-то смысле равноправными. Из формул можно усмотреть, что в области, примыкающей к внешней границе, окружная скорость жидкости у решения с вихревой пеленой немного больше, чем у непрерывного решения, и это обстоятельство может иметь значение при их естественном отборе.

Что же касается самой возможности появления вихревой пелены, несколько сходной со сдвиговой трещиной в твердом теле, то непрерывность и даже гладкость поля напряжений в идеальной жидкости не имеют никакого значения для поля перемещений, которое формируется под воздействием граничных и начальных условий (возможно, несовместных для гладких решений), при этом идеальная жидкость *не имеет никаких механизмов сопротивления геометрическому сдвиговому воздействию*. Например, если у жидкости, текущей вдоль жесткой стенки и образующей пограничный слой, будет изменяться вязкость в сторону уменьшения, то пределом для пограничного слоя будет не непрерывное течение, а вихревая пелена, расположенная непосредственно на стенке.

Авторы выражают глубокую благодарность А.Н. Голубятникову за внимание к работе и полезные указания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куксенко Б.В. Два аналитических решения для установки сложного нагружения // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2005. № 5. 49–54.
2. Бермант А.Ф. Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина. М.: ГИФМЛ, 1958.
3. Милл-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.

Поступила в редакцию
16.06.2006