УДК 531.46

ТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ТРЕНИЯ

А.А. Киреенков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

kireenk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предлагается обобщение двухмерной модели трения скольжения и верчения В.Ф. Журавлева, позволяющее учесть динамическую связь компонентов, определяющих силовое состояние трущихся тел в условиях комбинированной кинематики. Процедура построения моделей состоит в замене точных интегральных представлений для силы и момента трения соответствующими разложениями Паде.

Ключевые слова: поликомпонентные модели комбинированного сухого трения, разложения Паде.

О моделях трения

Известно, что в случае комбинированной кинематики, когда трущиеся тела участвуют одновременно в движениях скольжения и верчения, закон Кулона нарушается и закон трения претерпевает существенные изменения. Одна из первых попыток описать взаимосвязь трения скольжения и верчения в случае неточечного контакта движущихся тел была предпринята П. Контенсу [1]. Принципиально новое развитие теории было дано В.Ф. Журавлевым в [2]. Им были получены точные аналитические выражения для силы и момента трения в элементарных функциях для круговых площадок контакта, а для удобства использования этих функций в задачах динамики построены их аппроксимации Паде.

Удобство использования аппроксимаций Паде, позволяющее описывать эффекты комбинированного сухого трения для всего диапазона угловых и линейных скоростей, привело к созданию принципиально новых моделей трения на их основе. Для формализации развиваемой теории в зависимости от числа кинематических параметров, определяющих силовое состояние, в [3] было введено понятие размерности модели сухого трения, а в зависимости от порядка используемых Паде-аппроксимаций – понятие порядка модели. Например, для круговых площадок контакта с центрально-симметричным распределением контактных напряжений два силовых фактора – сила трения, направленная против скорости скольжения, и момент – зависят от двух кинематических факторов: угловой и линейной скоростей – это двухмерная модель трения верчения и скольжения В.Ф. Журавлева. Двухмерная модель трения была построены в предположении справедливости закона Кулона в дифференциальной форме для маленького элемента площади внутри пятна контакта. Ее обобщение на случай использования более реальной характеристики трения было дано в [4], где было показано, что в случае комбинированной кинематики использование обобщенной дифференциальной формы закона Кулона приводит к качественно новым свойствам зависимости силы трения от скоростей скольжения и верчения, но не изменяет размерность модели. Последующие исследования [5], показали, что в случае комбинированной кинематики из-за перекоса симметричной диаграммы распределения нормальных контактных напряжений возникает динамическая связь компонентов, определяющих силовое состояние трущихся тел.

Предлагаемое обобщение двумерной модели трения позволяет учесть динамическую связь компонентов, одновременно принимая во внимание представления о распределении нормальных контактных напряжений, хорошо согласуемых с результатами в области теории упругости [6], и обобщенную дифференциальную форму закона Кулона [4].

Связанные модели трения верчения и скольжения

Связанная модель трения верчения и скольжения для круговых площадок контакта трущихся тел строится в предположении справедливости закона Кулона в обобщенной дифференциальной форме для маленького элемента площади внутри пятна контакта [4]. Интегрирование дифференциалов силы и момента трения дает интегральную модель трения верчения и скольжения. Для учета результатов теории упругости [6] предполагается, что в покое распределение нормальных контактных напряжении σ_0 удовлетворяет свойству центральной симметрии: $\sigma_0 = \sigma_0(r)$, где r – радиус-вектор, проведенный из центра пятна контакта, а при наличии движения происходит смещение симметричной диаграммы распределений по направлению мгновенной скорости проскальзывания. Эти общие свойства распределений нормальных контактных напряжений позволяют представить соответствующую функцию в виде $\sigma(x, y) = \sigma_0(1 + kx/R)$, где x – ось прямоугольной системы координат с началом в центре пятна контакта, направленная по направлению мгновенного проскальзывания, а R – радиус пятна контакта. Коэффициент k определяет динамическую связь компонентов, характеризующих силовое состояние внутри пятна контакта, и вычисляется по формуле: $k = 3s/R$, где s – величина смещение центра тяжести пятна контакта по направлению оси x. С другой стороны, величина s может быть определена из равенства моментов сил, параллельных плоскости скольжения, и моментов сил, перпендикулярных ей [5]. Предположение, что, кроме сил трения и нормальной реакции, другие силы отсутствуют, дает: $s = F_{||}h/N$, где N – сила, сдавливающая трущиеся поверхности, h – высота центра тяжести движущегося тела относительно плоскости скольжения, а $F_{||}$ – компонента силы трения, направленная против скорости скольжения (направление оси x).

Из-за нарушения в симметрии распределения нормальных контактных напряжений появляется нормальная составляющая силы трения $F_{\perp}$. Таким образом, модель трения становится трехмерной. Она может рассматриваться как первое приближение к реальному закону трения в условиях комбинированной кинематики (одновременное скольжение и верчение), если считать нулевым приближением двухмерную модель трения. (Ранее было показано, что все дальнейшие упрощения двумерной модели нарушают соответствие теории и эксперимента [7].) Точная трехмерная интегральная модель дает хорошее описание эффектов комбинированного сухого трения, но неудобна при решении задач динамики, так как требует вычисления кратных интегралов в правых частях дифференциальных уравнений движения. Избежать этой трудоемкой процедуры позволяет замена точных интегральных выражений соответствующими разложениями Паде. В результате трехмерные модели трения первого и второго порядка имеют вид:

$$F_{||} = F_0\left(\frac{v}{v+au} + 2\pi((\mu_1 v^3 - \mu_2 v)I_1 + 2\mu_1 v u^2 I_3)\right),$$

$$F_{\perp} = \frac{\mu F_0 uv}{(u+bv)(v+au)}, \quad \frac{1}{a} = \frac{u}{F_0}\frac{\partial F_{||}}{\partial v}\bigg|_{v=0}, \tag{1}$$

$$M_C = M_0\left(\frac{u}{u+mv} + 2\pi((2\mu_1 v^2 - \mu_2)uI_3 + \mu_1 u^3 I_5)\right),$$

$$\frac{1}{m} = \frac{v}{M_0}\frac{\partial M_C}{\partial u}\bigg|_{u=0}, \quad \frac{1}{b} = \frac{v}{\mu F_0}\frac{\partial F_{\perp}}{\partial u}\bigg|_{u=0},$$

$$M_C = M_0\left(\frac{u^2 + muv}{v^2 + muv + u^2} + \right.$$

$$\left. + 2\pi((2\mu_1 v^2 - \mu_2)uI_3 + \mu_1 u^3 I_5)\right),$$

$$F_{||} = F_0\left(\frac{v^2 + auv}{v^2 + auv + u^2} + \right.$$

$$\left. + 2\pi((\mu_1 v^3 - \mu_2 v)I_1 + 2\mu_1 v u^2 I_3)\right), \tag{2}$$

$$F_{\perp} = \frac{\mu F_0 uv}{(u+bu)(v+u/a)}, \quad a = \frac{u}{F_0}\frac{\partial F_{||}}{\partial v}\bigg|_{v=0},$$

$$\frac{1}{b} = \frac{v}{\mu F_0}\frac{\partial F_{\perp}}{\partial u}\bigg|_{u=0}, \quad m = \frac{v}{M_0}\frac{\partial M_C}{\partial u}\bigg|_{u=0}.$$

Здесь $F_{\perp}$ – нормальная составляющая силы трения, M_C – момент сил трения, F_0 и M_0 – сила и момент трения покоя, $u = \omega R$ – угловая скорость вращения центра пятна контакта, а μ_1 и μ_2 – коэффициенты, определяющие нелинейность коэффициента трения. Коэффициенты I_1, I_3, I_5 полиномиальных членов в формулах (1) представляют собой первые моменты распределения нормальных контактных напряжений соответственно первого, третьего и пятого порядков. Они, так же как и коэффициенты Паде разложений, могут быть вычислены в элементарных функциях для большинства используемых моделей распределения нормальных контактных напряжений [4]. При решении реальных задач коэффициенты моделей (1), (2) могут быть определены из эксперимента, и, следовательно, модели (1), (2) могут интерпретироваться как феноменологические трехмерные модели трения первого и второго порядка.

Список литературы

1. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.

2. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.

3. Журавлев В.Ф., Киреенков А.А. О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновом трении // Изв. РАН. МТТ. 2005. №2. С. 3–13.

4. Киреенков А.А. Обобщенная двумерная модель трения скольжения и верчения // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 4. С. 482–486.

5. Иванов А.П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 189–203.

6. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

7. Киреенков А.А, Семендяев С.В., Филатов В.Ф. Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2010. №6. С. 192–202.

THREE-DIMENSIONAL FRICTION MODELS

A.A. Kireenkov

A generalization of Zhuravlev's two-dimensional model of the sliding and spinning friction is presented which permits to take into account both the dynamics coupling of the components defining force state and the more realistic representations of dry friction characteristics and the normal contact stress distributions in the case of combined kinematics. The procedure of constructing the model consists in replacing of the exact integral expressions for dry friction force and torque by appropriate Pade expansions.

Keywords: polycomponents models of the combined dry friction, Pade expansions.