УДК 517.55

ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ $A_\alpha^{p,q}(B_n)$

О.Е. Антоненкова

Описываются те символы, при которых операторы Теплица ограниченно действуют в весовых пространствах, аналитических в единичном шаре функций со смешанной нормой.

Ключевые слова: *весовые пространства, аналитические функции, смешанные нормы, теплицевы операторы.*

$B_n=\left\{z=(z_1,...,z_n):\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2}<1\right\}$ – открытый единичный шар в n-мерном комплексном пространстве C^n, S_n – граница шара B_n, $H(B_n)$ – множество всех голоморфных в B_n функций. Пусть далее $1<p,q<+\infty$, обозначим

$$A_\alpha^{p,q}(B_n)=\left\{f\in H(B_n):\|f\|_{A_\alpha^{p,q}}=\left\{\int\limits_0^1(1-r^2)^\alpha\left(\int\limits_{S_n}|R^\alpha f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}r^{2n-1}dr\right\}^{\frac{1}{q}}<+\infty\right\},$$

здесь $R^\alpha f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(k+1)^\alpha f_k(z),\quad \alpha>-1,\quad f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}f_k(z)$ – однородное разложение функции $f\in H(B_n)$, $d\sigma(\zeta)$ – нормированная мера Лебега на S_n. Оператором Теплица с символом $h\in L^1(S_n)$ называется интегральный оператор вида

$$T_h(f)(z)=\int\limits_{S_n}\frac{f(\zeta)h(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n}d\sigma(\zeta),$$

где $f\in C(B_n\cup S_n)\cap H(B_n)$, $\langle z,\zeta\rangle=\sum\limits_{j=1}^{n}z_j\overline{\zeta}_j$, $\zeta=(\zeta_1,...,\zeta_n)\in S_n$, $z=(z_1,...,z_n)\in B_n$.

Операторы Теплица в весовых пространствах голоморфных в поликруге с обычной L^p-нормой были исследованы в работах [1], [2].

Положим

$$D^\alpha f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}f_k(z),$$

$z=(z_1,...,z_n)\in B_n$, $\alpha>-1$, Γ – хорошо известная функция Эйлера.

Теорема. *Пусть* $h\in H^1(B_n)$, $1<p,q<+\infty$, *тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $T_{\overline{h}}$ *действует в пространстве* $A_\alpha^{p,q}(B_n)$, $\alpha>0$;

2) $h\in H^\infty(B_n)$.

Лемма 1. [3] *Пусть* $1\le p<+\infty$, $f\in H(B_n)$, $\beta>0$, *тогда имеет место оценка*

$$C_1\sup\limits_{0<r<1}\left(\int\limits_{S_n}\left|R^\beta f(r\zeta)\right|^p d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}\le\left[\int\limits_{S_n}\left(\int\limits_0^1(1-\rho)^{2(s-\beta)-1}\left|R^s f(\rho\zeta)\right|^2 d\rho\right)^{\frac{p}{2}}d\sigma(\zeta)\right]^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le C_2\sup\limits_{0<r<1}\left(\int\limits_{S_n}\left|R^\beta f(r\zeta)\right|^p d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $s>\beta$.

Лемма 2. [4] *Пусть* $1 \le p \le +\infty$, $f \in H^p(B_n)$, $g \in H^{p'}(B_n)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, $\beta > 0$, *тогда имеет место равенство:*

$$\int_{S_n} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}d\sigma(\zeta) = C(\beta)\int_{B_n}\left(\log\frac{1}{|\zeta|^2}\right)^{\beta} R^{\beta+1} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}d\nu(\zeta),$$

где $C(\beta)$ *- некоторая константа, зависящая только от* β.

Лемма 3. *Пусть* $1 \le p, q < +\infty$, $f \in H(B_n)$, $\alpha > 0$, $\beta > -1$ *тогда имеет место оценка*

$$C_1\left[\int_0^1 (1-r)^{\beta}\left(\int_{S_n}\left|R^{\alpha} f(r\zeta)\right|^p d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}} dr\right]^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left\{\int_0^1 (1-r)^{\beta}\left[\int_{S_n}\left(\int_0^1 (1-\rho)^{2(s-\alpha)-1}\left|R^s f(\rho\zeta)\right|^2 d\rho\right)^{\frac{p}{2}} d\sigma(\zeta)\right]^{\frac{q}{p}} dr\right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C_2\left[\int_0^1 (1-r)^{\beta}\left(\int_{S_n}\left|R^{\alpha} f(r\zeta)\right|^p d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}} dr\right]^{\frac{1}{q}},$$

где $s > \alpha$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$C_1\left(\int_{S_n}\left|R^{\alpha} f(r\zeta)\right|^p d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} \le \left[\int_{S_n}\left(\int_0^1 (1-\rho)^{2(s-\alpha)-1}\left|R^s f(r\rho\zeta)\right|^2 d\rho\right)^{\frac{p}{2}} d\sigma(\zeta)\right]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C_2\left(\int_{S_n}\left|R^{\alpha} f(r\zeta)\right|^p d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $s > \alpha$. Возведем обе части данного неравенства в степень q, умножим на $(1-r)^{\beta}$, $\beta > -1$ и, проинтегрировав по $(0,1)$, получим необходимую оценку. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $T_{\bar h}(f) \in A^{p,q}_{\alpha}(B_n)$ при $f \in A^{p,q}_{\alpha}(B_n)$. Положим $f_r(z) = \frac{C(r)}{(1-\langle z, r\rangle)^n}$, $\|f_r\|_{A^{p,q}_{\alpha}(B_n)} \sim const$, где $C(r)$ – положительное число, зависящее только от $r \in (0,1)$. Вычислим

$$T_{\bar h}(f_r)(z) = C(r)\int_{S_n}\frac{\overline{h(\zeta)}d\sigma(\zeta)}{(1-\langle\zeta, r\rangle)^n(1-\langle z,\zeta\rangle)^n} = C(r)\overline{\int_{S_n}\frac{h(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(1-\langle r,\zeta\rangle)^n(1-\langle\zeta, z\rangle)^n}} =$$

$$= C(r)\overline{\frac{h(r)}{(1-\langle r, z\rangle)^n}} = C(r)\frac{\overline{h(r)}}{(1-\langle z, r\rangle)^n} = f_r(z)\overline{h(r)}.$$

Таким образом, мы получили, что $T_{\bar h}(f_r)(z) = f_r(z)\overline{h(r)}$. Следовательно,

$\left\|T_{\bar h}(f_r)\right\|_{A^{p,q}_{\alpha}(B_n)} = \|f_r(z)\|_{A^{p,q}_{\alpha}(B_n)}|h(r)| = const|h(r)|$.

Отсюда и из ограниченности $T_{\bar h}(f)$ следует, что $|h(r)| \le const$. Положив теперь вместо функции $f_r(z)$ функцию $f_r(\eta z)$, $\eta \in S_n$, получаем, что $|h(z)| \le const$, $z \in B_n$. Таким образом, мы доказали, что $h \in H^\infty(B_n)$.

Обратно. Пусть $h \in H^\infty(B_n)$. Положим $F(z) = T_{\bar{h}}(f)(z)$. Чтобы доказать принадлежность $F(z)$ классу $A_\alpha^{p,q}(B_n)$, достаточно установить, что $R^\alpha F \in A^{p,q}(\alpha)$, $\alpha > -1$. Пусть $D^{\alpha+1} g \in A^{p',q'}(\alpha)$ – фиксированная функция, $p' = \dfrac{p}{p-1}$, $q' = \dfrac{q}{q-1}$. Тогда имеем $R^\alpha F(\rho z) = \int\limits_{S_n} f(\rho\zeta)\overline{h(\rho\zeta)} R_z^\alpha \left(\dfrac{1}{(1-\rho\langle z,\zeta\rangle)^n} \right) d\sigma(\zeta)$. Отсюда получаем

$$\int_0^1 (1-\rho)^\alpha \int_{S_n} R^\alpha F(\rho z)\overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)}\, d\sigma(z)\, d\rho = \int_0^1 (1-\rho)^\alpha \int_{S_n} f(\rho\zeta)\overline{h(\rho\zeta)} \times$$

$$\times \int_{S_n} \overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)} R_z^\alpha \left(\frac{1}{(1-\rho\langle z,\zeta\rangle)^n} \right) d\sigma(z)\, d\sigma(\zeta)\, d\rho. \quad (1)$$

Преобразуем внутренний интеграл

$$\int_{S_n} \overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)} R_z^\alpha \left(\frac{1}{(1-\rho\langle z,\zeta\rangle)^n} \right) d\sigma(z) = \overline{\int_{S_n} D^{\alpha+1} g(\rho z) R_\zeta^\alpha \left(\frac{1}{(1-\rho\langle \zeta, z\rangle)^n} \right) d\sigma(z)} =$$

$$= R_\zeta^\alpha \int_{S_n} \frac{\overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)\, d\sigma(z)}}{(1-\rho\langle \zeta, z\rangle)^n} = R^\alpha\, \overline{D^{\alpha+1} g(\rho^2 \zeta)}.$$

Следовательно, из (1) получаем

$$\int_0^1 (1-\rho)^\alpha \int_{S_n} R^\alpha F(\rho z)\overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)}\, d\sigma(z)\, d\rho = \int_0^1 (1-\rho)^\alpha \times$$

$$\times \int_{S_n} f(\rho\zeta)\overline{h(\rho\zeta)} R^\alpha\, \overline{D^{\alpha+1} g(\rho^2\zeta)}\, d\sigma(\zeta)\, d\rho.$$

Применим лемму 2, будем иметь:

$$\int_0^1 (1-\rho)^\alpha \int_{S_n} R^\alpha F(\rho z)\overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)}\, d\sigma(z)\, d\rho = \int_0^1 (1-\rho)^\alpha \times$$

$$\times \int_{B_n} \left(\log \frac{1}{|\zeta|^2} \right)^\alpha R^{\alpha+1} f(\rho\zeta)\overline{h(\rho\zeta)} R^\alpha\, \overline{D^{\alpha+1} g(\rho^2\zeta)}\, d\nu(\zeta)\, d\rho.$$

Отсюда следует $\left| \int\limits_0^1 (1-\rho)^\alpha \int\limits_{S_n} R^\alpha F(\rho z)\overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)}\, d\sigma(z)\, d\rho \right| \le \int\limits_0^1 (1-\rho)^\alpha \times$

$$\times \int_{B_n} \left(1-|\zeta|^2\right)^\alpha \left|R^{\alpha+1} f(\rho\zeta)\right| \left|h(\rho\zeta)\right| \left|R^\alpha D^{\alpha+1} g(\rho^2\zeta)\right| d\nu(\zeta)\, d\rho.$$

Переходя к полярным координатам, будем иметь

$$\left| \int_0^1 (1-\rho)^\alpha \int_{S_n} R^\alpha F(\rho z)\overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)}\, d\sigma(z)\, d\rho \right| \le \int_0^1 (1-\rho)^\alpha \times$$

$$\times \int_{S_n} \int_0^1 (1-r)^\alpha \left|R^{\alpha+1} f(r\rho\zeta)\right| \left|h(r\rho\zeta)\right| \left|R^\alpha D^{\alpha+1} g(\rho^2 r\zeta)\right| r^{2n-1}\, dr\, d\sigma(\zeta)\, d\rho.$$

Применяя во внутреннем интеграле неравенство Шварца, получим

$$\left|\int_0^1 (1-\rho)^\alpha \int_{S_n} R^\alpha F(\rho z)\overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)}d\sigma(z)d\rho\right| \le C_1(\alpha)\|h\|_\infty \int_0^1 (1-\rho)^\alpha \times$$

$$\times \int_{S_n}\left(\int_0^1 (1-r)\left|R^{\alpha+1} f(r\rho\zeta)\right|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 (1-r)^{2\alpha-1}\left|R^\alpha D^{\alpha+1} g(\rho^2 r\zeta)\right|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma(\zeta)d\rho.$$

Применим теперь неравенство Гельдера с показателем $p'=\dfrac{p}{p-1}$:

$$\left|\int_0^1 (1-\rho)^\alpha \int_{S_n} R^\alpha F(\rho z)\overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)}d\sigma(z)d\rho\right| \le \|h\|_\infty \int_0^1 (1-\rho)^\alpha \times$$

$$\times\left[\int_{S_n}\left(\int_0^1 (1-r)\left|R^{\alpha+1} f(r\rho\zeta)\right|^2 dr\right)^{\frac{p}{2}} d\sigma(\zeta)\right]^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times\left[\int_{S_n}\left(\int_0^1 (1-r)^{2\alpha-1}\left|R^\alpha D^{\alpha+1} g(\rho^2 r\zeta)\right|^2 dr\right)^{\frac{p'}{2}} d\sigma(\zeta)\right]^{\frac{1}{p'}} d\rho.$$

Еще раз применим неравенство Гельдера с показателем $q'=\dfrac{q}{q-1}$, а затем воспользуемся леммой 3: $\left|\int_0^1 (1-\rho)^\alpha \int_{S_n} R^\alpha F(\rho z)\overline{D^{\alpha+1} g(\rho z)}d\sigma(z)d\rho\right| \le \|h\|_\infty \times$

$$\times\left\{\int_0^1 (1-\rho)^\alpha\left[\int_{S_n}\left(\int_0^1 (1-r)\left|R^{\alpha+1} f(r\rho\zeta)\right|^2 dr\right)^{\frac{p}{2}} d\sigma(\zeta)\right]^{\frac{q}{p}} d\rho\right\}^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times\left\{\int_0^1 (1-\rho)^\alpha\left[\int_{S_n}\left(\int_0^1 (1-r)^{2\alpha-1}\left|R^\alpha D^{\alpha+1} g(\rho^2 r\zeta)\right|^2 dr\right)^{\frac{p'}{2}} d\sigma(\zeta)\right]^{\frac{q'}{p'}} d\rho\right\}^{\frac{1}{q'}} \le$$

$$= C_2(\alpha)\|h\|_\infty \left\|R^\alpha f\right\|_{A^{p,q}(\alpha)}\left\|D^{\alpha+1} g\right\|_{A^{p',q'}(\alpha)}.$$

Из полученной оценки имеем $\left\|R^\alpha F\right\|_{A^{p,q}(\alpha)} \le C_3(\alpha)\|h\|_\infty\|f\|_{A_\alpha^{p,q}(B_n)}$.

Тогда применяя результаты работы [5], получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

The paper presents a complete characterization of those symbols for which the Toeplitz operators is bounded operators acting in the weighted spaces of functions holomorphic in the unit ball with mixed norm.

The key words: *weighted spaces, holomorphic functions, mixed norm, Toeplitz operators.*

Список литературы

1. Шамоян Ф.А., Арутюнян А.В. Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций// ДАН АрмССР. 1990. Т.91. №4. С. 147 151.
2. Шамоян Ф.А., Часова Н.А. О теплицевых операторах в пространствах Харди-Соболева // Интегральные преобразования и специальные функции. 2003. Т. 4. № 1. С. 46-54.
3. Ahern P., Bruna J. Maximal and area Integral characterizations of Hardy-Sobolev spaces in unit ball of C^n // Rev. Math. Ieroamericana. 1988. V. 4. P. 123-153.
4. Александров А.Б. Теория функций в шаре// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985. Т.8. С. 115 186.
5. Антоненкова О. Е., Шамоян Ф. А. Преобразование Коши линейных непрерывных функционалов и проекторы в весовых пространствах аналитических функций// Сиб. мат. журн. 2005. Т.46. №6. С. 1208 1234.

Об авторе

Антоненкова О.Е. – кандидат физико-математических наук, доцент Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, anto-olga@yandex.ru