48. Трофимов В.А., Терешин Е.Б., Федотов М.В. Консервативная разностная схема для задачи двухволнового взаимодействия фемтосекундных импульсов в фотонном кристалле // ЖВМиМФ. 2003. **43**. № 10. С. 1550–1553.
49. Трофимов В.А., Терешин Е.Б., Федотов М.В. Исследование разностных схем для задач самовоздействия фемтосекундного импульса в фотонном кристалле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2003. № 1. С. 20–27.
50. Трофимов В.А., Терешин Е.Б., Федотов М.В. О возможности локализации световой энергии в нелинейном фотонном кристалле // Оптика и спектроскопия. 2003. **95**. № 1. С. 106–109.
51. Трофимов В.А., Терешин Е.Б., Федотов М.В. Локализация световой энергии последовательности фемтосекундных импульсов в одномерном фотонном кристалле // ЖТФ. 2004. **74**. № 5. С. 66–70.
52. Трофимов В.А., Терешин Е.Б., Федотов М.В. Солитоноподобное распространение световых импульсов в нелинейном фотонном кристалле // Оптика и спектроскопия. 2004. **97**. № 5. С. 823–832.

Поступила в редакцию
18.06.04

В. Б. Андреев, А. В. Гулин, Е. С. Николаев, Б. Н. Четверушкин

ТЕОРИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ[1]

(кафедра вычислительных методов, лаборатория разностных методов факультета ВМиК)

В статье приводится обзор работ, выполненных за последние годы сотрудниками кафедры вычислительных методов (заведующий кафедрой — академик А. А. Самарский) и лаборатории разностных методов (заведующий лабораторией — Е. С. Николаев). Излагаются исследования, связанные с теорией численных методов: разностные схемы для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, теория устойчивости разностных схем, методы решения сеточных уравнений, кинетические схемы, высокопроизводительные вычисления.

1. Сингулярно возмущенные задачи. Для общего линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка рассмотрим простейшую двухточечную краевую задачу

$$\begin{gathered} Lu \equiv -\varepsilon(p(x)u')' - r(x)u' + q(x)u = f(x), \qquad 0 < x < 1, \\ u(0) = g_0, \qquad u(1) = g_1, \end{gathered} \tag{1}$$

где $p(x) \geqslant c_0 > 0$, $r(x) \geqslant c_1 > 0$, $q(x) \geqslant 0$, а $\varepsilon \in (0,1]$ — малый параметр. Хорошо известно, что при $\varepsilon \to 0$ решение этой задачи сходится на полуинтервале $0 < x \leqslant 1$ к решению вырожденной задачи

$$-r(x)v' + q(x)v = f(x), \qquad v(1) = g_1,$$

а при малых ε не использованное в вырожденной задаче граничное условие приводит к образованию в окрестности точки $x = 0$ так называемого пограничного слоя, где решение $u(x)$ исходной задачи (1) претерпевает сильные изменения. Наличие малого параметра и порождаемого им пограничного слоя приводит к значительным трудностям при численном решении задачи (1).

Обозначим одну из них на простейшем примере уравнения (1), когда $p(x) \equiv r(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$. Введем на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку с шагом $h = 1/N$ и построим на ней классическую аппроксимацию уравнения (1) с указанными коэффициентами:

$$-\varepsilon u^h_{\bar{x}x,i} - \sigma u^h_{x,i} - (1-\sigma)u^h_{\bar{x},i} = f_i, \qquad i = 1, \ldots, N-1. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02–01–01089, 02–01–00555, 01–01–00488, 99–01–01078, 01–01–00572, 04–01–00633, 01–03–00606) и программы “Университеты России”.

Здесь σ — параметр, принимающий значения 1 или 1/2 и, как обычно, $u_{x,i} = (u_{i+1} - u_i)/h$, $u_{\bar{x},i} = (u_i - u_{i-1})/h$, $u_i = u(x_i) = u(ih)$. Известно (см., например, [1]), что на гладких решениях уравнения (1) разностная схема (2) при $\sigma = 1/2$ имеет погрешность аппроксимации $O(h^2)$, а при $\sigma = 1$ ее погрешность только $O(h)$. Однако при $\sigma = 1$ схема (2) обладает принципом максимума [1], в то время как при $\sigma = 1/2$ принцип максимума для (2) имеет место, лишь когда $h/\varepsilon \leqslant 2$. Отсутствие принципа максимума у схемы (2) при $\sigma = 1/2$ приводит к тому, что ее решение приобретает "пилообразный" вид. В связи с этим А. А. Самарским [2] (см. также [1]) была построена так называемая монотонная схема, которая, как и схема (2) при $\sigma = 1$, обладает принципом максимума при любых h и ε и в то же время на гладких решениях при конечных ε имеет погрешность аппроксимации $O(h^2)$, которая, однако, ухудшается при $\varepsilon \to 0$ до $O(h)$.

Более того, монотонность схемы и ее погрешность аппроксимации на гладких решениях не характеризуют схему полностью. В работах [3, 4] проведено исследование сходимости монотонной схемы Самарского на равномерной сетке и установлено, что, в частности, при $\varepsilon \leqslant h$ вдали от точки $x = 0$ при $x_i \geqslant ch \ln 1/h$ она имеет точность $O(h)$. В непосредственной же окрестности точки $x = 0$ монотонная схема Самарского, равно как и схема (2), на равномерной сетке, вообще говоря, не сходится, а именно сколь бы ни был мал шаг h равномерной сетки, всегда найдется такое значение ε и такой узел x_i этой сетки, что модуль разности между точным u и приближенным u^h решениями в этом узле будет больше некоторой постоянной. В частности, для уравнения (1) с указанными коэффициентами при $f(x) \equiv 0$ решение соответствующей разностной схемы можно найти в явном виде и убедиться, что если $\varepsilon = O(h)$, то уже $\lim\limits_{h\to 0} \left|u(h) - u_1^h\right| \neq 0$. Тем самым монотонная схема Самарского, равно как и другие схемы вида (2), на равномерной сетке не является равномерно по малому параметру ε сходящейся.

Для преодоления этой трудности Н. С. Бахвалов [5] предложил использовать неравномерную сетку. Он, в частности, рассматривал уравнение (1) при $r(x) \equiv 0$ и $q(x) \geqslant \mathrm{const} > 0$. Для аппроксимации использовалась классическая трехточечная схема, а неравномерная сетка выбиралась из тех соображений, чтобы погрешность аппроксимации на искомом решении была примерно одинакова в каждом ее узле. Такая сетка в [5] была построена и доказана равномерная сходимость найденного на ней приближенного решения со скоростью $O(N^{-2})$, где N — число узлов сетки. Построенная сетка оказалась равномерной вне окрестностей пограничных слоев решения и гладко сгущающейся к концам отрезка $[0, 1]$. Отметим, что данная методика построения сгущающейся сетки не может быть непосредственно перенесена на случай уравнения (1) при $r(x) \equiv 0$, ибо, как доказал Г. И. Шишкин [6], для уравнения (1), вообще говоря, не существует сеток, на которых погрешность аппроксимации классических схем была бы равномерно по ε ограниченной.

Для обеспечения равномерной по ε сходимости разностных схем, аппроксимирующих уравнение (1), Г. И. Шишкин [6] предложил использовать кусочно-равномерную сетку, сгущающуюся в окрестности $O(\varepsilon \ln N)$ пограничного слоя и имеющую одинаковое по порядку число мелких и крупных шагов. В [6], в частности, установлено, что схема типа (2) при $\sigma = 1$ для уравнения (1) на этой сетке равномерно по ε сходится со скоростью $O(N^{-1} \ln^2 N)$.

В [7] была построена модификация монотонной схемы Самарского, погрешность аппроксимации которой на гладких решениях оказалась $O(h^2)$ равномерно по ε. Найденная новая априорная оценка позволила доказать равномерную по малому параметру сходимость этой схемы в норме L_∞^h на сетке Шишкина с неулучшаемой скоростью $O(N^{-2} \ln^2 N)$. В [8] этот результат обобщен на случай сетки Бахвалова с оценкой скорости сходимости $O(N^{-2})$. Показано, что с точки зрения используемой априорной оценки эта сетка является оптимальной.

Исследования [9] показали, что присущие схеме с центральной разностью (например, (2) при $\sigma = 1/2$) на равномерной сетке осцилляции решения могут оказаться несущественными при использовании сгущающихся сеток. Доказано, что на сетке Шишкина классическая схема с центральной разностью для уравнения (1) сходится в L_∞^h равномерно по ε со скоростью $O(N^{-2} \ln^2 N)$.

В [10] для уравнения (1) предложена новая неоднородная монотонная трехточечная разностная схема, которая по-разному записывается в пограничном слое и вне него. Для этой схемы доказана равномерная по ε сходимость в L_∞^h на сетках Шишкина и Бахвалова со скоростью соответственно $O(N^{-2} \ln^2 N)$ и $O(N^{-2})$. Более того, для сеточного решения получена новая, более сильная априорная оценка, которая при исследовании скорости сходимости позволяет без потери точности отказаться от предположения кусочной равномерности сетки Шишкина и равномерности вне пограничного слоя сетки Бахвалова. Тем самым сингулярно возмущенное уравнение конвекции-диффузии (1) по части использования для аппроксимации неравномерных сеток при наличии надлежащего сгущения оказалось "уравненным в правах" с регулярными уравнениями.

В [11] аналогичные результаты были получены и для уравнения реакции-диффузии из [5].

В [12] поставлен и решен вопрос об аппроксимации граничного потока $-\varepsilon p(0)u'(0)$. По приближенному решению, найденному при помощи модифицированной монотонной схемы Самарского на сетке Шишкина (с погрешностью $O(N^{-2}\ln^2 N)$), построена двухточечная аппроксимация потока на внешней границе пограничного слоя, погрешность которой есть $O(N^{-2}\ln^2 N)$.

Аналогичные аппроксимации потока с той же оценкой точности могут быть построены и в любом другом узле, отличном от граничного. Поскольку производная решения на $[0,1]$ равномерно по ε не ограничена и в окрестности пограничного слоя есть $O(\varepsilon^{-1})$, то вопрос о равномерном по ε приближении самой производной на всей области не стоит. Однако вне пограничного слоя производная решения равномерно по ε ограничена, и можно задаться целью построения здесь ее приближения с равномерной по ε точностью. Для этого нужны новые априорные оценки решения, включая весовые. В [13, 14] на дифференциальном уровне разработан математический аппарат получения нужных априорных оценок, а в [15, 16] этот аппарат перенесен на более сложный сеточный случай и установлены требуемые априорные оценки сеточного решения.

В [17] предпринята попытка разработки нового математического аппарата для исследования равномерной по ε сходимости для двумерного сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии. Для некоторых монотонных разностных схем установлены равномерные по ε анизотропные оценки функции Грина и соответствующие априорные оценки решения в L_∞^h через не слишком сильные анизотропные нормы правой части.

2. Устойчивость симметризуемых разностных схем. В работах А.А. Самарского [1] построена теория устойчивости двуслойных разностных схем

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0,\quad n=0,1,\ldots,\quad y_0\ \text{задан}, \tag{3}$$

рассматриваемых как операторно-разностные уравнения в гильбертовом пространстве H. Схема (3) называется устойчивой в пространстве H_D, если существует самосопряженный положительный оператор D такой, что для решения уравнения (3) при любых начальных данных выполняются неравенства

$$(Dy_{n+1},y_{n+1})\leqslant(Dy_n,y_n),\quad n=0,1,\ldots.$$

Были получены необходимые и достаточные условия устойчивости схемы (3) в фиксированных нормах. Например, показано, что при условии $A^*=A>0$ для устойчивости в пространстве H_A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось операторное неравенство

$$B\geqslant 0{,}5\tau A. \tag{4}$$

Поскольку свойство устойчивости не инвариантно относительно выбора нормы, возникает вопрос о необходимости условия (4) для устойчивости в пространствах, отличных от H_A. Доказано (см. [18]), что если оба оператора A и B самосопряженные и хотя бы один из них положителен, то неравенство (4) необходимо для устойчивости в любой норме. Таким образом, в этом случае условие устойчивости не может быть ослаблено за счет выбора оператора нормы D. Примеры показывают (см. [19]), что требование самосопряженности обоих операторов существенно. В работах [19–21] необходимые и достаточные условия устойчивости, не связанные с выбором нормы, получены для так называемых симметризуемых разностных схем.

Разностная схема (3) называется симметризуемой, если ее оператор перехода $S=E-\tau B^{-1}A$ является симметризуемым, т.е. существует невырожденный оператор $K:H\to H$ такой, что оператор $\tilde S=KSK^{-1}$ является самосопряженным. Справедлива

Теорема 1. *Если симметризуемая разностная схема* (3) *устойчива в каком-либо пространстве* H_D, *то для оператора* $\tilde S=KSK^{-1}$ *справедливы неравенства*

$$-E\leqslant\tilde S\leqslant E. \tag{5}$$

Обратно, для симметризуемой схемы (3) *условия* (5) *достаточны для устойчивости в* H_{K^*K}.

Пусть заданы операторы A и σ, действующие в H. Рассмотрим разностную схему

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\sigma A y_{n+1}+(E-\sigma)Ay_n=0, \quad n=0,1,\ldots,y_0, \tag{6}$$

которую будем называть *схемой с операторными весами.* Схема (6) имеет канонический вид (3) с оператором $B=E+\tau\sigma A$, который не является самосопряженным в случае неперестановочных операторов A и σ. Показано, что если операторы A и σ самосопряженные, то схема (6) является симметризуемой, причем преобразование подобия $\tilde{S}=KSK^{-1}$ осуществляется оператором $K=B$, а в случае обратимости оператора A — и оператором $K=A$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $B=E+\tau\sigma A$, $\sigma^*=\sigma$, $A^*=A$, B^{-1} существует. Если разностная схема* (6) *устойчива в каком-либо пространстве H_D, то выполнено операторное неравенство*

$$A+\tau A\mu A\geqslant 0, \tag{7}$$

где $\mu=\sigma-0{,}5E$. Обратно, если выполнено (7), *то схема* (6) *устойчива в H_{B^*B}. Если, кроме того, существует A^{-1}, то схема* (6) *устойчива и в H_{A^2}.*

Типичным примером симметризуемой разностной схемы является схема с переменными весовыми множителями

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\sigma_i y_{\bar{x}x,i}^{n+1}+(1-\sigma_i)y_{\bar{x}x,i}^n, \tag{8}$$
$$i=1,2,\ldots,N-1, \quad y_0^n=y_N^n=0, \quad n=0,1,\ldots, \quad y_i^0=u_0(x_i),$$

аппроксимирующая уравнение теплопроводности. Сформулируем теорему об устойчивости схемы (8). Пусть τ, h — шаги сетки, σ_i — весовые множители,

$$\mu_i=\sigma_i-0{,}5, \quad i=1,2,\ldots,N-1, \quad \gamma=\tau/h^2.$$

Введем в рассмотрение симметричную трехдиагональную матрицу $Q=(q_{ij})$ порядка N, у которой элементы главной и побочной диагоналей определены следующим образом:

$$\begin{gathered} q_{ii}=1+\gamma(\mu_{i-1}+\mu_i), \quad i=2,3,\ldots,N-1, \quad q_{11}=1+\gamma\mu_1, \\ q_{ii+1}=q_{i+1i}=-\gamma\mu_i, \quad i=1,2,\ldots,N-1, \quad q_{NN}=1+\gamma\mu_{N-1}. \end{gathered} \tag{9}$$

Справедлива

Теорема 3. *Если схема* (8) *устойчива в какой-либо норме, то минимальное собственное значение $q_{\min}$ матрицы Q неотрицательно. Обратно, если $q_{\min}\geqslant 0$, то схема* (8) *устойчива в H_{A^2}, так что для ее решения справедлива оценка*

$$\left\|y_{\bar{x}x}^{n+1}\right\|\leqslant\left\|y_{\bar{x}x}^n\right\|, \quad n=0,1,\ldots,$$

где $\|y_{\bar{x}x}^n\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{N-1}h(y_{\bar{x}x,i}^n)^2\right)^{1/2}$.

Следствие 1. *Пусть $\sigma_i=1$, если i нечетное, и $\sigma_i=0$, если i четное. Тогда условие $\gamma\leqslant 1$ необходимо для устойчивости схемы* (8) *в любой норме и достаточно для устойчивости в H_{A^2}.*

Приведем полезные достаточные условия устойчивости, следующие из теоремы 3.

Следствие 2. *Если выполнены неравенства*

$$\sigma_i\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2\gamma}, \quad i=1,2,\ldots,N-1, \quad \gamma=\frac{\tau}{h^2},$$
$$\frac{\sigma_i+\sigma_{i-1}}{2}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{4\gamma}, \quad i=2,3,\ldots,N-1,$$

то схема (8) *устойчива в H_{A^2}.*

Аналогичные исследования проведены для разностных схем с переменными весовыми множителями, аппроксимирующих двумерное уравнение теплопроводности. Рассматривается разностная задача

$$\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^{n}}{\tau}=\sigma_{ij}\Delta_h y_{ij}^{n+1}+(1-\sigma_{ij})\Delta_h y_{ij}^{n}, \tag{10}$$

$i=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,\quad y_{ij}^{n+1}=0$ для $x_{ij}\in\gamma,\quad n=0,1,2,\ldots,\quad y_{ij}^{0}=U_0(x_1^{(i)},x_2^{(j)})$.

В общем случае исследование устойчивости разностной схемы (10) может быть проведено численно на основе теоремы, аналогичной теореме 3. Аналитическое исследование устойчивости схемы (10) проведено в работе [22] для случая шахматного распределения весовых множителей, когда

$$\sigma_{ij}=\sigma_1,\quad \text{если } i-j \text{ четное},\qquad \sigma_{ij}=\sigma_2,\quad \text{если } i-j \text{ нечетное},$$

где σ_1 и σ_2 — заданные константы. Приведем один из результатов указанного исследования. Обозначим

$$\mu_\alpha=\sigma_\alpha-0{,}5,\quad a_\alpha=\sin^2\frac{\pi}{2N_\alpha},\quad b_\alpha=\cos^2\frac{\pi}{2N_\alpha},\quad \alpha=1,2.$$

Пусть δ и Δ — соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения пятиточечного разностного оператора Лапласа Δ_h, и $\lambda_0=0{,}5(\delta+\Delta)$. В работе [22] доказано, что в случае шахматного распределения весовых множителей следующие условия необходимы и достаточны для устойчивости схемы (10).

1. Если $\mu_1\mu_2\leqslant 0$, то $1+0{,}5\tau(\mu_1+\mu_2)\lambda_0\geqslant 0$, $(1+\tau\lambda_0\mu_1)(1+\tau\lambda_0\mu_2)\geqslant 0$.
2. Если $\mu_1\mu_2\geqslant 0$, то $1+0{,}5\tau(\mu_1+\mu_2)\lambda_0\geqslant 0$, $1+\tau\lambda_0(\mu_1+\mu_2)+\tau^2\delta\Delta\mu_1\mu_2\geqslant 0$.

В работах [23–26] предложены и реализованы вычислительные алгоритмы построения границ устойчивости одномерных и двумерных разностных схем с переменными весовыми множителями. Отметим, что разностным схемам с переменными весовыми множителями посвящена книга [27].

3. Устойчивость разностных схем с нелокальными граничными условиями. Проводились исследования по теории устойчивости разностных схем для нестационарных задач математической физики, в которых пространственный дифференциальный оператор подчинен краевым условиям, связанным на различных частях границы. Типичным примером является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<1,\quad t>0, \tag{11}$$

с граничными условиями

$$u(0,t)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t),\quad t>0. \tag{12}$$

Благодаря несимметричности граничных условий данная задача не является самосопряженной. Точнее, несамосопряженным является дифференциальный оператор

$$Lu(x)=-u''(x),\quad u(0)=0,\quad u'(0)=u'(1). \tag{13}$$

Задачи вида (11), (12) и более сложные изучались в работах В. А. Ильина, Е. И. Моисеева и их учеников [28–31].

Разностные схемы для задачи (11), (12) впервые рассмотрел Н. И. Ионкин [32] в 1977 г. Здесь в явном виде построен базис из собственных и присоединенных функций разностного оператора и на этой основе получены достаточные условия устойчивости разностных схем с весами. В 2000 г. в работе Н. И. Ионкина и В. А. Морозовой [33] была исследована устойчивость явной разностной схемы и схемы с весами для задачи (11), (12). Задача рассматривалась с позиций общей теории разностных схем, предложенной А. А. Самарским, что позволило исследовать вопрос о необходимых и достаточных условиях устойчивости в различных гильбертовых нормах.

Техника, развитая в указанных выше работах и основанная на явных решениях разностных задач на собственные значения, не распространяется на случай операторов с переменными (зависящими от x) коэффициентами. Более того, в работе [34] приведены численные расчеты, показывающие, что в случае переменных коэффициентов собственные значения соответствующего разностного оператора могут быть простыми. Насколько нам известно, факт простоты спектра в случае переменных коэффициентов до сих пор не доказан строго теоретически.

В работе [35] приведен пример, в определенном смысле имитирующий задачу с переменными коэффициентами, но допускающий построение точного решения в аналитическом виде. Показано, что спектр рассматриваемого разностного оператора является простым, и только в случае постоянных коэффициентов возникают кратные собственные значения. Следствием простоты спектра является базисность системы собственных векторов разностной задачи. Пример состоит в следующем. Рассмотрим то же самое уравнение теплопроводности (11), а граничные условия (12) заменим условиями

$$u(0,t)=0, \quad \gamma \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \tag{14}$$

где $\gamma \neq 0$ — числовой параметр. Условия (12) получаются из (14) при $\gamma = 1$. Оказывается, что при $0<\gamma<1$ спектр дифференциальной задачи

$$\begin{gathered} u''(x)+\lambda u(x)=0, \quad 0<x<1, \\ u(0)=0, \quad \gamma u'(0)=u'(1), \end{gathered} \tag{15}$$

является простым.

Аналогичная ситуация имеет место и в разностном случае. Для задачи (11), (14) рассмотрим явную разностную схему

$$\begin{gathered} \frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=y^n_{\bar{x}x,i}, \quad i=1,2,\ldots,N-1, \quad Nh=1, \\ y_i^0=u_0(x_i), \quad y_0^{n+1}=0, \quad \gamma y^n_{x,0}-y^n_{\bar{x},N}=\frac{h}{2}\frac{y_N^{n+1}-y_N^n}{\tau}. \end{gathered} \tag{16}$$

Необходимым условием устойчивости схемы (16) является условие

$$\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2}. \tag{17}$$

В работе [35] построено семейство пространств H_D, в которых необходимое условие устойчивости (17) является и достаточным. В работах [36, 37] полученные результаты обобщены на двумерный случай (прямоугольная область). Здесь рассматривается двумерная по пространству задача теплопроводности с краевыми условиями первого рода по одной из пространственных переменных и нелокальными условиями по другой.

В работе [38] рассмотрено уравнение Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром и нелокальными краевыми условиями, заданными в эллиптической части области. Найдены собственные значения и собственные функции нелокальных задач, исследована полнота собственных функций, получены теоремы о разрешимости и построено решение в виде биортогонального ряда.

4. Методы решения сеточных уравнений. Ведущиеся последние 5 лет в лаборатории разностных методов научные исследования были связаны с построением эффективных прямых методов решения специальных систем уравнений с разреженной матрицей, возникающих в сеточных методах решения задач математической физики, разработкой и исследованием свойств разностных и конечноэлементных методов решения сингулярно возмущенных краевых задач и задач с негладкими решениями, разработкой методов решения краевых задач для уравнений эллиптического типа на последовательности адаптирующихся к решению сеток, разработкой сеточных методов решения задач магнитной газовой динамики и плазменной аэродинамики, а также с численным исследованием математических моделей для задач физики газоплазменных сред. Были получены следующие основные результаты.

1. Построены новые быстрые прямые методы решения систем трехточечных векторных уравнений, возникающих при аппроксимации разностными схемами 2-го и 4-го порядков точности задачи Дирихле для неволнового уравнения Гельмгольца на структурированной треугольной сетке в прямоугольнике, требующие $O(MN\log_2 N)$ арифметических операций, где M и N пропорциональны числу узлов сетки по направлениям [39]. Эти методы могут быть использованы и при решении той же дифференциальной задачи в областях сложной формы методом фиктивных неизвестных [40]. Построены новые вычислительно устойчивые маршевые методы решения систем трехточечных векторных уравнений с асимптотически неулучшаемой по отношению к числу неизвестных оценкой числа требуемых арифметических операций. Для систем уравнений, возникающих при разностной аппроксимации на

сдвинутой по крайней мере по одному направлению сетке краевых задач для уравнения Пуассона, заданных в регулярной области, в [41] построен вариант метода, основанный на комбинации блочного исключения Гаусса и спектрального разложения матрицы. Для систем, возникающих при решении методами конечных разностей или конечных элементов краевых задач для эллиптических уравнений 2-го порядка, заданных в регулярной области в декартовой или криволинейных ортогональных системах координат, в [42] построен вариант маршевого метода, не использующий спектральное разложение матрицы.

2. Для нахождения классических и обобщенных решений краевых задач для линейных ОДУ 2-го и 4-го порядков, а также для систем ОДУ в [43, 44] построен вариант метода конечных элементов, использующий для получения решения с требуемой точностью последовательность адаптивно измельчаемых и укрупняемых сеток. Адаптация сетки к решению основана на оценке изменения приближенного решения в норме пространства C при последовательном добавлении на каждый интервал сетки пробного узла и пополнении иерархическим образом множества базисных функций и пробном исключении узлов текущей сетки. Для решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения 2-го порядка со смешанными производными, заданного в полигональной области, построен метод, использующий последовательность адаптивно измельчаемых сеток.

Проведено исследование равномерных по малому параметру сеточных методов решения сингулярно возмущенных краевых задач для стационарных линейных и квазилинейных уравнений конвекции-диффузии [45–49]. Для квазилинейного одномерного стационарного уравнения конвекции-диффузии построена и исследована схема с центрально-разностной аппроксимацией первой производной с равномерной по малому параметру сходимостью. Для сингулярно возмущенной квазилинейной двухточечной краевой задачи получены равномерные по малому параметру апостериорные оценки погрешности, использующие разностные производные численного решения. Исследованы численные методы решения сингулярно возмущенных уравнений при наличии разрывных коэффициентов и точек возврата. Исследована схема с направленными разностями для сингулярно возмущенного двумерного стационарного уравнения конвекции-диффузии прямоугольной области. Найдены точные представления и построены асимптотические разложения функций точечного источника для сеточных аналогов уравнений конвекции-диффузии и реакции-диффузии на прямоугольных сетках [50].

3. Построены операторно-разностные схемы для уравнений магнитной газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных на нерегулярной треугольной сетке и исследована сходимость класса итерационных методов для двухслойных операторно-разностных схем с весами типа диффузии-конвекции [51–53].

Разработаны и реализованы методы расчета задач динамики несжимаемой жидкости с учетом кавитации на адаптивной треугольной сетке переменной структуры, а также задач динамики сверхзвуковых потоков слабоионизированной плазмы. Созданы эффективные алгоритмы для численного исследования эффектов радикального снижения лобового сопротивления и устранения сильных ударных волн в задачах сверхзвуковой плазменной аэродинамики. Проведены вычислительные эксперименты по изучению сверхзвукового движения тел с профилированным энерговыделением, позволившие установить существование режимов движения без ударных волн [54, 55]. На основе модели, описываемой системой уравнений двумерной магнитной газовой динамики с учетом вращения, трехкомпонентного магнитного поля и гравитации, проведено численное моделирование магниторотационного механизма взрыва сверхновой [56].

5. Кинетические схемы и высокопроизводительные вычисления. Одним из направлений научной деятельности кафедры вычислительных методов являлись исследования в области новых алгоритмов, ориентированных на использование высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных систем и решение с их помощью различных задач механики сплошной среды. Эти работы проводились под руководством чл.-корр. РАН, проф. Б. Н. Четверушкина и сотрудников кафедры к.ф.-м.н. С. В. Богомолова, к.ф.-м.н. Л. В. Дородницына, к.ф.-м.н. А. В. Жоховой. В рамках этих исследований получили дальнейшее развитие оригинальные кинетические схемы, которые опираются на представление о сплошной среде как совокупности большого числа дискретных частиц (молекул). Главное направление связано с непосредственным использованием конечно-разностных моделей для одночастичной функции распределения. Принципиальное отличие кинетических схем от традиционных алгоритмов решения задач гидродинамики заключается в следующем. Кинетические схемы строятся на основе цепочки моделей: кинетическое уравнение Больцмана — дискретизация кинетического уравнения — осреднение дискретной модели по скоростям молекул и получение разностной схемы для газодинамических параметров. В свою очередь традиционные алгоритмы связаны с другой последовательностью действий: уравнение Больцмана — осреднение уравнения Больцмана и получение уравнений газовой динамики — дискретизация уравнений газовой динамики. Дифференциальное приближение кинетических схем — квазигазодинамическую систему — можно трактовать как физическую модель для описания течения вязкого теплопроводного газа. Эта модель отличается от традиционной системы уравнений Навье–Стокса на величину порядка малости Kn2, где Kn — число Кнудсена (с той же точностью сами уравнения Навье–Стокса отвечают уравнению Больцмана). При этом квазигазодинамическая система обладает физической корректностью, гарантируя сглаживание решения на расстоянии порядка длины свободного пробега l. Требование сглаживания решения на расстоянии порядка длины свободного пробега l является фундаментальным. Гидро- и газодинамическое приближения строятся из условия близости функции распределения к равновесному значению. При данном условии решение кинетического уравнения слабо меняется на этом расстоянии. Это же свойство переносится на решения квазигазодинамической системы, в которой явно присутствуют члены, обеспечивающие сглаживание решения. Принцип включения в математическую модель минимального масштаба описываемых объектов обобщен и на другие задачи механики сплошных сред, в частности на задачи фильтрации. Были проведены исследования диссипативных, энтропийных, акустических свойств квазигазодинамической системы, а также установлена ее приближенная инвариантность относительно галилеева преобразования координат с точностью до величин второго порядка малости. Обнаружена связь кинетических схем с другим классом алгоритмов — Lattice Boltzmann-схемами, набирающими популярность среди зарубежных ученых. Показано, что Lattice Boltzmann-схемы, появившиеся позже кинетических, фактически являются одним из вариантов последних. Простая адаптация кинетических схем к архитектуре многопроцессорных вычислительных систем с распределенной памятью привела к возможности их использования в качестве вычислительного ядра программ для параллельных компьютеров с производительностью 1 Tflops и выше. Внутренняя корректность этих алгоритмов позволила выполнить детальное моделирование сложных задач современной газовой динамики на сетках порядка 108 узлов. Среди этих задач выделим неустановившиеся и турбулентные течения вязкого сжимаемого газа, проблемы аэроупругости и аэроакустики, процессы горения природного газа. К этим исследованиям примыкают работы И. С. Калачинской по моделированию течений с небольшими числами Маха. В качестве основы математических моделей использовалась квазигидродинамическая система уравнений Ю. В. Шеретова, близкая к упоминавшейся квазигазодинамической системе. Ряд расчетов также проводился на многопроцессорных компьютерах. Из нетрадиционных исследований в рамках кинетических схем отметим их применение для моделирования течений крови в сосудах головного мозга. Эти работы послужили основой кандидатской диссертации В. А. Лукшина, успешно защищенной в 2004 г. Применимость кинетических схем к моделированию течений с малыми числами Маха послужила толчком к развитию теории неотражающих граничных условий на искусственных границах расчетной области. Существующие подходы, связанные с характеристическими граничными условиями, при решении таких задач дают неудовлетворительные результаты. Л. В. Дородницыным разработаны общие принципы к построению таких условий. Они основываются на нахождении максимально широкого класса условий, точных для одномерных линеаризованных уравнений Эйлера, и на создании иерархии граничных условий, отвечающей иерархии основных моделей газовой динамики. Выводятся новые классы граничных условий, учитывающие вязкость газа (в терминах систем Навье–Стокса и квазигазодинамики), а также конечно-разностное представление базовых систем уравнений. С. В. Богомоловым развивается метод частиц как подход к сквозному моделированию микрообъектов (молекул) и макрообъектов (частиц сплошной среды). Такой подход приводит к построению гибких, самоадаптирующихся к особенностям решения алгоритмов. Метод частиц, в отличие от разностного подхода, основанного на аппроксимации уравнений в частных производных на заданной сетке, моделирует исходные процессы переноса путем замены огромного числа молекул или сплошной среды набором конечного числа частиц. Тем самым в модель закладывается физическая корректность. Метод частиц обладает рядом достоинств.

1. Он может применяться как основной численный метод решения системы стохастических дифференциальных уравнений по пуассоновской мере и является ведущим при моделировании газа на микроскопическом уровне (в контексте уравнения Больцмана).

2. В газовой динамике важными являются процессы переноса, для которых наиболее естественным средством численного анализа выступает метод частиц.

3. В макроскопической газовой динамике главные трудности связаны с численным воспроизведением разрывных решений, а метод частиц по своей сути является способом получения обобщенного решения.

4. Он является экономичным для многомерных задач, так как число уравнений, описывающих поведение частиц, пропорционально числу измерений.

5. Метод частиц легко распараллеливается.

Метод частиц приводит к построению аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений для координат этих частиц и дискретизацией этой системы по времени с использованием явных алгоритмов. Система уравнений описывает как перенос частиц с индивидуальными скоростями, так и взаимодействие соседних частиц друг с другом. В связи с последним был предложен такой способ, который направлен на сохранение разрывных решений. Он во многом перекликается с направлением в теории обобщенных решений квазилинейных уравнений, связанных с введением "энтропийного" условия для определения самого понятия решения нелинейной задачи. Такой подход может быть назван несглаживающим энтропийно-согласованным методом частиц, который, во-первых, размазывает разрыв на одну ячейку и, во-вторых, регуляризирует исходную задачу подобно "энтропийному" условию. В контексте микро- и макромоделирования С.В. Богомоловым рассматривается проблема промежуточных математических моделей, лежащих между уравнением Больцмана и уравнениями газовой динамики. Здесь можно выделить два этапа. Первый — получение уравнения для одночастичной функции распределения, являющегося пределом уравнения Больцмана при малой длине пробега молекулы (уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка). Затем нужно осуществить переход к сплошной среде, в результате чего должна получиться система макроскопических уравнений. В явном виде получены приближенные коэффициенты в уравнении Фоккера–Планка в фазовом пространстве для моделирования газа из твердых сфер при переходных (от кинетического к макроскопическому описанию) числах Кнудсена. Эти два направления позволяют на основе сквозного алгоритма, сочетающего стохастические и детерминированные методы частиц, решать задачи, в которых необходимо — в рамках единого класса вычислительных методов — метода частиц учитывать полную иерархию описания газа — от кинетического представления до представления в виде сплошной среды. Широкие возможности кинетических подходов к моделированию сложных задач газовой динамики, вызванные легкой параллельной реализацией алгоритмов, поставили на повестку дня необходимость исследований по ряду направлений. Кинетические схемы относительно просто строятся при использовании неструктурированных пространственных сеток. В связи с этим успешно развиваются методы генерации пространственно-трехмерных сеток. Интенсивно ведется разработка параллельных алгоритмов для решения задач линейной алгебры. Активно выполняются работы, связанные с визуализацией данных высокопроизводительных вычислений на основе технологии "клиент–сервер". Решаются проблемы рационального разбиения на подобласти при проведении параллельных вычислений на неструктурированных сетках, а также динамической перезагрузки процессоров. Эти исследования являются интеллектуальной основой создаваемого пакета прикладных программ для решения пространственно-трехмерных задач механики сплошной среды на многопроцессорных системах. Перечисленные результаты научной деятельности опубликованы в двух монографиях и многочисленных печатных материалах, основная часть которых приводится в списке литературы [57–112].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. 3-е изд. М.: Наука, 1989.
2. Самарский А.А. О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора // ЖВМиМФ. 1965. **5**. № 3. С. 548–551.
3. Kellogg R.B., Tsan A. Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points // Math. of Comput. 1978. **32**. N 144. P. 1025–1039.
4. Алексеевский М.В., Алексеевский В.В. О монотонной схеме А.А. Самарского для дифференциального уравнения с малым параметром // Межвуз. сб. науч. тр. Сер. XIII. Электротехника. Вып. V. Ереван: Ереванский политех. ин-т им. К. Маркса. 1979. С. 14–19.
5. Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // ЖВМиМФ. 1969. **9**. № 4. С. 841–859.
6. Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992.

7. Андреев В.Б., Савин И.А. О равномерной по малому параметру сходимости монотонной схемы Самарского и ее модификации // ЖВМиМФ. 1995. **35**. № 5. С. 739–752.
8. Андреев В.Б. О сходимости модифицированной монотонной схемы Самарского на гладко сгущающейся сетке // ЖВМиМФ. 1998. **38**. № 8. С. 1266–1278.
9. Андреев В.Б., Коптева Н.В. Об исследовании разностных схем с аппроксимацией первой производной центральным разностным отношением // ЖВМиМФ. 1996. **36**. № 8. С. 101–117.
10. Андреев В.Б., Коптева Н.В. О равномерной по малому параметру сходимости монотонных трехточечных разностных схем // Диф. ур-ния. 1998. **34**. № 7. С. 921–928.
11. Андреев В.Б. О равномерной сходимости на неравномерной сетке классической разностной схемы для одномерного сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии // ЖВМиМФ. 2004. **44**. № 3. С. 474–489.
12. Андреев В.Б., Савин И.А. К вычислению граничного потока с равномерной по малому параметру точностью // ЖВМиМФ. 1996. **36**. № 12. С. 57–63.
13. Андреев В.Б. Априорные оценки решений сингулярно возмущенных двухточечных краевых задач // Матем. моделир. 2002. **14**. № 5. С. 5–16.
14. Андреев В.Б. Поточечные и весовые априорные оценки решения и его первой производной для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии // Диф. ур-ния. 2002. **38**. № 7. С. 918–929.
15. Андреев В.Б. Функция Грина и априорные оценки решений монотонных трехточечных сингулярно возмущенных разностных схем // Диф. ур-ния. 2001. **37**. № 7. С. 880–890.
16. Андреев В.Б. Поточечные и весовые априорные оценки решений и их разностных отношений сингулярно возмущенных монотонных трехточечных разностных схем // ЖВМиМФ. 2002. **42**. № 10. С. 1503–1519.
17. Андреев В.Б. Анизотропные оценки функции Грина сингулярно возмущенного двумерного монотонного разностного оператора конвекции-диффузии и их применение // ЖВМиМФ. 2003. **43**. № 4. С. 546–553.
18. Гулин А.В., Самарский А.А. О некоторых результатах и проблемах теории устойчивости разностных схем // Матем. сб. 1976. **99**(**141**). № 3. С. 299–330.
19. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Гулин А.В. Устойчивость операторно-разностных схем // Диф. ур-ния. 1999. **35**. № 2. С. 152–187.
20. Гулин А.В., Самарский А.А. Об устойчивости одного класса разностных схем // Диф. ур-ния. 1993. **29**. № 7. С. 1163–1174.
21. Гулин А.В. К теории устойчивости симметризуемых разностных схем // Матем. моделир. 1994. **6**. № 6. С. 9–13.
22. Гулин А.В., Дегтярев С.Л. Критерий устойчивости двумерной разностной схемы // Диф. ур-ния. 1996. **32**. № 7. С. 943–950.
23. Гулин А.В., Гулин В.А. Границы устойчивости разностных схем с переменными весовыми множителями // Изв. вузов. Математика. 1994. № 9(388). С. 28–38.
24. Гулин А.В., Юхно Л.Ф. Численное исследование устойчивости двуслойных разностных схем для двумерного уравнения теплопроводности // ЖВМиМФ. 1996. **36**. № 8. С. 118–126.
25. Гулин А.В., Юхно Л.Ф. Границы устойчивости двумерных разностных схем // Матем. моделир. 1998. **10**. № 1. С. 44–50.
26. Гулин А.В., Шередина А.В. Границы устойчивости разностных схем // Изв. вузов. Математика. 2000. № 11(462). С. 26–33.
27. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П. Разностные схемы с операторными множителями. Минск: ЦОТЖ, 1998.
28. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // ДАН СССР. 1976. **227**. № 4. С. 28–31.
29. Ильин В.А. Об абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного эллиптического оператора // ДАН СССР. 1984. **274**. № 1. С. 19–22.
30. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма–Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // ДАН СССР. 1986. **291**. № 3. С. 534–539.

31. Самарская Т.А. Абсолютная и равномерная сходимость разложения по корневым функциям нелокальной краевой задачи I рода // Диф. ур-ния. 1989. **25**. № 7. С. 1155–1160.
32. Ионкин Н.И. Разностные схемы для одной неклассической задачи // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1977. № 2. С. 20–32.
33. Ионкин Н.И., Морозова В.А. Устойчивость разностных схем с нелокальными граничными условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2000. № 3. С. 19–23.
34. Ионкин Н.И., Валикова Е.А. О собственных значениях и собственных функциях одной неклассической краевой задачи // Матем. моделир. 1996. **8**. № 1. С. 53–63.
35. Гулин А.В., Морозова В.А. Об устойчивости нелокальной разностной краевой задачи // Диф. ур-ния. 2003. **39**. № 7. С. 912–917.
36. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. Об устойчивости нелокальной двумерной разностной задачи // Диф. ур-ния. 2001. **37**. № 7. С. 926–932.
37. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. Об одной нелокальной двумерной разностной задаче // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2004. № 1. С. 5–9.
38. Моисеев Т.Е. О полноте собственных функций одной нелокальной краевой задачи Геллерстедта // Диф. ур-ния. 2003. **39**. № 11. С. 1568–1570.
39. Николаев Е.С. Прямой метод решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца на треугольной сетке в прямоугольнике // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2002. № 4. С. 5–11.
40. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных эллиптических краевых задач в нерегулярных областях // Диф. ур-ния. 1980. **16**. № 7. С. 1211–1225.
41. Николаев Е.С. Маршевый метод решения краевых задач для уравнения Пуассона на сдвинутой сетке // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1999. № 4. С. 9–14.
42. Николаев Е.С. Новый вариант маршевого метода решения краевых задач для эллиптических уравнений в регулярных областях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2003. № 4. С. 5–20.
43. Николаев Е.С. Метод решения краевых задач для систем линейных ОДУ на адаптивно измельчаемых сетках // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2000. № 3. С. 11–19.
44. Николаев Е.С. Метод решения краевой задачи для ОДУ 2-го порядка на последовательности адаптивно измельчаемых и укрупняемых сеток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2004. № 4. С. 5–14.
45. Коптева Н.В. О равномерной по малому параметру сходимости схемы с центральной разностью на сгущающихся сетках // ЖВМиМФ. 1999. **39**. № 10. С. 1669–1685.
46. Kopteva N. Uniform pointwise convergence of difference schemes for convection-diffusion problems on layer-adapted meshes // Computing. 2001. **66**. N 2. P. 179–197.
47. Kopteva N. Maximum norm a posteriori error estimates for one-dimensional convection-diffusion problem // SIAM J. Numer. Anal. 2001. **39**. N 2. P. 423–441.
48. Kopteva N., Linss T. Uniform second order poinwise convergence of a central difference approximation for quasilinear convection-diffusion problem // J. Comput. Appl. Math. 2001. **137**. N 2. P. 257–267.
49. Kopteva N., Stenes M. Approximation of derivatives in a convection-diffusion two-point boundary value problem // Appl. Numer. Math. 2001. **39**. N 1. P. 47–60.
50. Белухина И.Г. Функция точечного источника для сингулярно возмущенной разностной схемы на равномерной 2D сетке // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2002. № 1. С. 13–18.
51. Арделян Н.В. Устойчивость двухслойных операторно-разностных схем с симметричными и кососимметричными операторами // Фундам. и прикл. матем. 1999. **5**. № 4. С. 979–991.
52. Арделян Н.В., Саблин М.Н. Двумерная операторно-разностная схема газовой динамики в лагранжевых координатах на нерегулярной треугольной сетке, обладающая свойством локальной аппроксимации вблизи оси симметрии // Прикл. матем. и информ. № 10. М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002. С. 15–33.
53. Арделян Н.В., Саблин М.Н. Операторная сеточная аппроксимация задач двумерной газовой динамики в подвижных координатах на нерегулярной треугольной сетке // Прикл. матем. и информ. № 11. М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002. С. 5–37.

54. Арделян Н. В., Космачевский К. В., Чувашев С. Н. Математическое моделирование энергетически эффективных режимов сверхзвукового движения летательного аппарата с вдувом плазмы (газа) из иглы на носу // Прикл. физ. 1999. № 6. С. 86–90.
55. Aleksandrov A. F., Ardelyan N. V., Chuvashev S. N. Supersonic plasma flows and their influence on aerodynamics of flight // J. Tech. Phys. 2000. **41**. N 1. P. 533–550.
56. Ardelyan N. V., Bisnovatyi-Kogan G. S., Moisseenko S. G. Collapse of a magnetized rotating cloud. 2D numerical simulation // Astrophysics and Space Science. 2000. **274**. P. 389–397.
57. Четверушкин Б. Н. Кинетически согласованные схемы в газовой динамике: новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения. М.: Изд-во МГУ, 1999.
58. Четверушкин Б. Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
59. Абалакин И. В., Четверушкин Б. Н. О расширении возможности газодинамического описания с помощью кинетически согласованных разностных схем // Матем. моделир. 1994. **6**. № 7. С. 3–14.
60. Лукшин А. В., Четверушкин Б. Н. К теории кинетически согласованных разностных схем // Матем. моделир. 1995. **7**. № 11. С. 109–125.
61. Chetverushkin B. N. On improvement of gas flow description via kinetically-consistent difference schemes // Experimentation, Modelling and Computation in Flow Turbulence and Combustion / Eds. B. N. Chetverushkin et al. **2**. Wiley; Chichester, 1997. P. 27–37.
62. Абалакин И. В., Жохова А. В., Четверушкин Б. Н. Кинетически согласованные разностные схемы на нерегулярных сетках // Матем. моделир. 1997. **9**. № 7. С. 44–53.
63. Абалакин И. В., Жохова А. В., Четверушкин Б. Н. Кинетически согласованные схемы повышенного порядка точности // Матем. моделир. 2001. **13**. № 5. С. 53–61.
64. Жохова А. В., Четверушкин Б. Н. Моделирование нестационарных газодинамических течений // Матем. моделир. 2002. **14**. № 4. С. 35–44.
65. Абалакин И. В., Жохова А. В. Кинетически согласованные разностные схемы в обобщенной системе координат в двухмерном случае. Препринт № 3. М.: Диалог-МГУ, 1997.
66. Четверушкин Б. Н., Чурбанова Н. Г. Квазигазодинамическая система уравнений и уравнения Навье–Стокса // Докл. РАН. 2003. **392**. № 5. С. 610–613.
67. Четверушкин Б. Н., Чурбанова Н. Г. Моделирование течений газа при небольших числах Маха // Диф. ур-ния. 1998. **34**. № 7. С. 988–992.
68. Chetverushkin B. N., Shilnikov E. V. Kinetic finite-difference schemes and quasigasdynamic equation system as the physical model for gasdynamic flow description // Proc. III Asian Comput. Fluid Dynamics Conf. 1998. Bangalore, India. V. II. P. 243–248.
69. Трапезникова М. А., Белоцерковская М. С., Четверушкин Б. Н. Аналог кинетически согласованных схем для моделирования задачи фильтрации // Матем. моделир. 2002. **14**. № 10. С. 69–76.
70. Четверушкин Б. Н. Кинетические схемы и высокопроизводительные многопроцессорные вычисления в газовой динамике // Вычисл. технологии. 2002. **7**. № 16. С. 65–89.
71. Дородницын Л. В., Четверушкин Б. Н., Чурбанова Н. Г. Кинетически согласованные разностные схемы и квазигазодинамическая модель течений плотных газов и жидкостей // Матем. моделир. 2001. **13**. № 4. С. 47–57.
72. Граур И. А., Четверушкин Б. Н. К обоснованию кинетически согласованных схем с коррекцией // Матем. моделир. 1997. **9**. № 11. С. 111–118.
73. Дородницын Л. В., Четверушкин Б. Н. Кинетически согласованные схемы для моделирования течений вязкого газа // ЖВМиМФ. 2000. **40**. № 12. С. 1875–1889.
74. Козубская Т. К., Четверушкин Б. Н., Юхно Л. Ф. Гармонический анализ квазигазодинамической системы уравнений течения вязкого газа и кинетически согласованных разностных схем в их линейном приближении // ЖВМиМФ. 2000. **40**. № 2. С. 265–273.
75. Абалакин И. В., Четверушкин Б. Н. Кинетически согласованные разностные схемы как модель для описания газодинамических течений // Матем. моделир. 1996. **8**. № 11. С. 17–36.
76. Abalakin I. V., Antonov M. A., Chetverushkin B. N. et al. On the opportunity of parallel implementation of the kinetical-consistent finite difference schemes for gasdynamic flow simulation // Parallel Computational Fluid Dynamics: Algorithms and Results Using Advanced Computers. Elsevier, Amsterdam. 1997. P. 182–188.

77. Абалакин И.В., Жохова А.В., Четверушкин Б.Н. Кинетически согласованный алгоритм для расчета газодинамических течений на треугольных сетках // Матем. моделир. 1998. **10**. № 4. С. 51–60.
78. Дородницын Л.В., Четверушкин Б.Н. Об одной неявной схеме для моделирования дозвукового течения газа // Матем. моделир. 1997. **9**. № 5. С. 108–119.
79. Четверушкин Б.Н. Проблемы эффективного использования многопроцессорных вычислительных систем // Информационные технологии и вычислительные системы. 2000. № 2. С. 22–34.
80. Chetverushkin B.N., Shilnikov E.V., Shoumkov M.A. Using massively parallel computer system for numerical simulation of 3D viscous gas flows // Parallel Computational Fluid Dynamics. Trends and Applications / Eds. C.B. Jenssen et al. Elsevier, 2001. P. 509–515.
81. Chetverushkin B.N., Jakobovsky M.V., Kornilina M.A., Sukov S.A. Methane combustion simulation on multiprocessor computer systems // Mathematical Modeling: Problems, Methods, Application / Eds. L.A. Uvarova, A.V. Latyshev. Kluwer, 2001. P. 53–59.
82. Четверушкин Б.Н. Высокопроизводительные многопроцессорные вычислительные системы: проблемы использования и подготовка кадров // Вестн. РАН. 2002. **72**. № 9. С. 786–794.
83. Dorodnicyn L.W., Chetverushkin B.N. The simulation of unsteady and transitional viscous compressible gas flows on multiprocessor systems // Comput. Fluid Dynamics J. (Japan Society of CFD / CFD Journal). 2002. **11**. N 2. P. 186–194.
84. Chetverushkin B.N., Churbanova N.G., Iakobovski M.V., Romanyukha N.Yu. Simulation of combustion problems using multiprocessor computer systems // Parallel Computational Fluid Dynamics. New Frontiers and Multi-disciplinary Application / Eds. K. Matsuno et al. Elsevier, North-Holland, 2003. P. 141–148.
85. Немухина А.М., Четверушкин Б.Н. Расчет течения слабосжимаемого вязкого газа на многопроцессорной вычислительной системе // Инж.-физ. журн. 2002. **75**. № 3. С. 22–27.
86. Chetverushkin B.N., Jakobovski M.V., Kornilina M.A. Parallel simulation of oil extraction // Parallel Computational Fluid Dynamics: Algorithms and Results Using Advanced Computers. Elsevier, Amsterdam. 1997. P. 282–288.
87. Милюкова О.Ю., Четверушкин Б.Н. Параллельный вариант попеременно-треугольного метода // ЖВМиМФ. 1998. **38**. № 2. С. 228–238.
88. Антонов А.Н., Антонов М.А., Граур И.А., Косарев Л.В., Четверушкин Б.Н. Численное исследование нестационарного обтекания тел с выступающими носовыми частями // Матем. моделир. 1998. **10**. № 10. С. 37–46.
89. Антонов А.Н., Антонов М.А., Граур И.А., Шильников Е.В., Четверушкин Б.Н. Взаимодействие сверхзвукового потока с упругой поверхностью обтекаемого тела // Матем. моделир. 1998. **10**. № 2. С. 15–24.
90. Абалакин И.В., Антонов А.Н., Граур И.А., Четверушкин Б.Н. Использование алгебраической модели турбулентности для расчета нестационарных течений в окрестности выемок // Матем. моделир. 2000. **12**. № 1. С. 45–56.
91. Alexandrov A.V., Chetverushkin B.N., Kozubskaya T.K. Numerical investigation of viscous compressible gas flows by means of flow field exposure to acoustic radiation // Parallel Computational Fluid Dynamics. Trends and Applications / Eds. C.B. Jenssen et al. Elsevier, 2001. P. 267–273.
92. Alexandrov A.V., Chetverushkin B.N., Kozubskaya T.K. Noise prediction for shear layers // Parallel Computational Fluid Dynamics. Practice and Theory / Eds. P. Wilders et al. Elsevier, 2002. P. 23–29.
93. Абалакин И.В., Антонов А.Н., Антонов М.А., Козубская Т.К., Четверушкин Б.Н. Использование кинетически согласованных разностных схем для расчета характеристик шума сверхзвуковых турбулентных струй // Матем. моделир. 2001. **13**. № 10. С. 56–76.
94. Абалакин И.В., Антонов А.Н., Антонов М.А., Четверушкин Б.Н. Использование кинетически согласованных схем для описания струйных течений // Матем. моделир. 2000. **12**. № 1. С. 25–37.
95. Дородницын Л.В. Кинетически согласованные разностные схемы для моделирования реагирующих течений // ЖВМиМФ. 1993. **33**. № 12. С. 1864–1878.
96. Dorodnicyn L.W. Kinetical-consistent algorithms for simulation of reactive flows // SIAM J. Sci. Comput. 1999. **20**. N 3. P. 826–843.

97. Бочков М.В., Слинько М.Г., Четверушкин Б.Н. Ультравысокая чистота дымовых газов при сжигании метана // Докл. РАН. 1999. **365**. № 1. С. 87–89.
98. Дородницын Л.В., Корнилина М.А., Четверушкин Б.Н., Якобовский М.В. Моделирование газовых течений при наличии химически активных компонентов // Журн. физ. химии. 1997. **71**. № 12. С. 2275–2281.
99. Лукшин А.В., Ярчук Л.В. О методе декомпозиции областей для уравнения Больцмана // Диф. ур-ния. 1998. **34**. № 7. С. 958–964.
100. Дородницын Л.В. Неотражающие граничные условия для систем уравнений газовой динамики // ЖВМиМФ. 2002. **42**. № 4. С. 522–549.
101. Дородницын Л.В. Акустика в моделях вязких дозвуковых течений и неотражающие граничные условия // Прикл. матем. и информатика. № 3. М.: Диалог-МГУ, 1999. С. 43–64.
102. Дородницын Л.В. Акустические свойства непрерывных и дискретных газодинамических моделей // Прикл. матем. и информатика. № 6. М.: МАКС Пресс, 2000. С. 39–62.
103. Дородницын Л.В. Неотражающие граничные условия для газодинамических задач в нелинейной постановке // Прикл. матем. и информатика. 2002. № 11. С. 38–74.
104. Дородницын Л.В. Неотражающие граничные условия: от концепции до алгоритмов. Препринт. М.: МАКС Пресс, 2002.
105. Богомолов С.В. Метод частиц с весами для уравнения Бюргерса // Матем. моделир. 1994. **6**. № 5. С. 77.
106. Богомолов С.В., Замараева А.А., Карабелли Х., Кузнецов К.В. Консервативный метод частиц для квазилинейного уравнения переноса // ЖВМиМФ. 1998. **38**. № 9. С. 1602.
107. Богомолов С.В., Кузнецов К.В. Метод частиц для системы уравнений газовой динамики // Матем. моделир. 1998. **10**. № 7. С. 93.
108. Богомолов С.В., Михайлов Д.Н. Численные расчеты распространения сейсмических волн на основе нелинейной вязкоупругой модели // Физика Земли. 1999. № 3. С. 18.
109. Богомолов С.В., Захаров Е.В., Зеркаль С.В. Моделирование волн на мелкой воде методом частиц // Матем. моделир. 2002. **14**. № 3. С. 103.
110. Богомолов С.В. Метод частиц. Несжимаемая жидкость // Матем. моделир. 2003. **15**. № 1. С. 46.
111. Зеркаль С.В., Захаров Е.В., Богомолов С.В. Моделирование движения потоков различной природы по наклонной поверхности методом частиц // Вісник Харківського національного університету. Серія Матем. моделюв. Інформ. техн. Автомат. системи управління. 2003. № 590. С. 114.
112. Богомолов С.В. Уравнение Фоккера–Планка для газа при умеренных числах Кнудсена // Матем. моделир. 2003. **15**. № 4. С. 16.

Поступила в редакцию
20.06.04

Г. Г. Еленин, Ю. П. Попов, В. А. Трофимов, А. П. Фаворский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ[1]

(кафедра вычислительных методов, лаборатория математического моделирования факультета ВМиК)

В статье приводится обзор работ, выполненных за последние годы сотрудниками кафедры вычислительных методов (заведующий кафедрой академик А.А. Самарский) и лаборатории математического моделирования в физике (заведующий лабораторией В.А. Трофимов). Представлены работы, относящиеся к математическому моделированию прикладных задач: гемодинамика сердечно-сосудистой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02–01–01089, 02–01–00555, 01–01–00488, 99–01–01078, 01–01–00572, 04–01–00633, 01–03–00606) и программы “Университеты России”.