

УДК 517.5

К.Ш.Тухлиев

ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p[0,1]$, $(0 < p < 1)$ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА ХААРА

*Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова**(Представлено академиком АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозовым 16.04.2012 г.)*

В данной работе доказывается теорема Джексона в пространстве $L_p[0,1]$, $(0 < p < 1)$ для систем типа Хаара.

Ключевые слова: система типа Хаара – модуль непрерывности – теорема Джексона – наилучшие приближения – неравенство Харди-Литтлвуда.

Пусть функция $f(x) \in L_p[0,1]$ ($0 < p < \infty$), то есть

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty.$$

Если $1 \leq p < \infty$, то $L_p[0,1]$ – банахово пространство относительно этой нормы; если же $0 < p < 1$, то величина $\|f\|_p$ не является нормой, но $L_p[0,1]$ является метрическим пространством.

Пусть $E_n^{(p)}(f; x)$ обозначает наилучшее приближение функции $f(x) \in L_p[0,1]$ полиномами по системе типа Хаара (определение см. напр. [1]) порядка не выше n . Существование такого полинома при $0 < p < 1$ доказано в [2], при $p \geq 1$ он хорошо известен (см. [4]).

Модуль непрерывности функций из пространства $L_p[0,1]$ определим равенством

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (0 \leq \delta \leq 1).$$

Впервые Джексоном [3] было установлено, что для тригонометрической системы функций имеет место неравенство

$$E_n(f; T) \leq C \omega\left(f; \frac{1}{n}\right) \quad (n \geq 1, n \in N),$$

Адрес для корреспонденции: Тухлиев Камаридин Шерматович. 735700, Республика Таджикистан, г.Худжанд, мкр. 20, Худжандский государственный университет. E-mail: kataridin.t54@mail.ru

где C – абсолютная константа, $f(x)$ – произвольная непрерывная на отрезке $[0, 2\pi]$ функция. Такие же результаты получены в пространствах $L_p[0, 2\pi]$ ($1 \leq p < \infty$). Обратная теорема для пространств $L_p[0, 2\pi]$ ($1 \leq p < \infty$) установлена в [4], где доказано неравенство

$$\omega_p\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right) \leq \frac{C}{n+1} \sum_{k=0}^n E_k^{(p)}(f; T) \quad (n \geq 1, n \in \mathbb{N}).$$

Для систем Хаара обратная теорема в $L_1[0, 1]$ установлена в [5]; прямые и обратные теоремы для $L_p[0, 1]$ ($1 \leq p < \infty$) доказаны в [6]. Аналогичные утверждения по системам Хаара для $L_p[0, 1]$, когда $0 < p < 1$, установлены в [7].

Мы докажем прямую и обратную теорему Джексона для систем типа Хаара, когда $0 < p < 1$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L_p[0, 1]$ ($0 < p < 1$) и $\chi\{P_n\}$ ($2 \leq P_n \leq C$, $n = 1, 2, \dots$) – система типа Хаара. Тогда

$$E_n^{(p)}(f; x) \leq C^{1/p} \omega_p\left(f, \frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть

$$H_{m_n}(x) = \sum_{\nu=1}^{m_n} c_\nu \chi_\nu(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

– полином по системе типа Хаара. Тогда

$$\left[E_{m_k}^{(p)}(H_{m_n}(x)) \right]^p \leq c \cdot m_k \int_0^{\frac{1}{m_k}} \omega_p^p(H_{m_n}, h) dh \quad (1)$$

$$(0 < p < \infty, k = 0, 1, \dots; |h| \leq \delta, 0 \leq \delta \leq 1).$$

Доказательство леммы 1. При $k \geq n$ доказательство леммы очевидно, так как $E_{m_k}^{(p)}(H_{m_n}) = 0$ и поэтому считаем $k < n$. Пусть $H_{m_n}(x) = \alpha_s$ при $x \in \delta_n^{(s)} = \left(\frac{s-1}{m_n}, \frac{s}{m_n} \right)$, $s = 1, 2, \dots, m_n$, ($m_n = p_1 p_2 \dots p_n$). Пусть также $\theta_{m_k}(x)$ – произвольный полином Виленкина, причём $\theta_{m_k}(x) = \beta_\nu$ при $x \in \delta_k^{(\nu)} = \left(\frac{\nu-1}{m_k}, \frac{\nu}{m_k} \right)$, $\nu = 1, 2, \dots, m_k$, ($m_k = p_1 p_2 \dots p_k$). Так как $k < n$, в каждом

интервале $\left(\frac{\nu-1}{m_k}, \frac{\nu}{m_k}\right)$ содержатся интервалы $\left(\frac{s-1}{m_k}, \frac{s}{m_k}\right)$ и количество их равно

$$\frac{m_n}{m_k} = p_{k+1} \cdot p_{k+2} \cdot \dots \cdot p_n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|H_{m_n}(x) - \theta_{m_k}(x)\|_{L_p}^p &= \sum_{\nu=1}^{m_k} \sum_{S=(\nu-1)\frac{m_n}{m_k}+1}^{\nu\frac{m_n}{m_k}} \int_{\frac{s-1}{m_n}}^{\frac{s}{m_n}} |H_{m_n}(x) - \\ &- \theta_{m_k}(x)|^p dx = \frac{1}{m_n} \sum_{\nu=1}^{m_k} \sum_{S=(\nu-1)\frac{m_n}{m_k}+1}^{\nu\frac{m_n}{m_k}} |\alpha_s - \beta_\nu|^p. \end{aligned}$$

Так как при любых $\nu = 1, 2, \dots, m_k$ и $r = (\nu-1)\frac{m_n}{m_k}+1, \dots, \nu\frac{m_n}{m_k}$ имеем

$$\inf_{\beta} \sum_{S=(\nu-1)\frac{m_n}{m_k}+1}^{\nu\frac{m_n}{m_k}} |\alpha_s - \beta_s|^p \leq \sum_{S=(\nu-1)\frac{m_n}{m_k}+1}^{\nu\frac{m_n}{m_k}} (\alpha_s - \alpha_r)^p,$$

то числа β_ν можно выбрать так, что

$$\begin{aligned} \|H_{m_n}(x) - \theta_{m_n}(x)\|_p^p &\leq \\ &\leq m_k \frac{1}{m_n^2} \sum_{\nu=1}^{m_k} \sum_{S=(\nu-1)\frac{m_n}{m_k}+1}^{\nu\frac{m_n}{m_k}} \sum_{r=(\nu-1)\frac{m_n}{m_k}+1}^{\nu\frac{m_n}{m_k}} |\alpha_s - \alpha_r|^p. \end{aligned} \quad (2)$$

Отметим теперь, что

$$\begin{aligned} \int_{\delta_k(\nu)} \int_{\delta_k(\nu)} |H_{m_n}(x) - H_{m_n}(y)|^p dx dy &= \\ &= \frac{1}{m_n^2} \sum_{S=(\nu-1)\frac{m_n}{m_k}+1}^{\nu\frac{m_n}{m_k}} \sum_{r=(\nu-1)\frac{m_n}{m_k}+1}^{\nu\frac{m_n}{m_k}} |\alpha_s - \alpha_r|^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая (2), (3) и используя утверждение леммы 1 из работы [8], получим

$$\begin{aligned} \|H_{m_n}(x) - \theta_{m_n}(x)\|_p^p &\leq \\ &\leq C m_k \int_0^{1/m_k} \left\{ \int_0^{1-h} |H_{m_n}(x+h) - f(x)|^p dx \right\} dh, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы 1.

Для доказательства теоремы 1 используем утверждения лемм 1.2, 1.3, 1.4 из [7] и теорему 4.1 из [9]. Используя неравенство (2) при $m_k \leq n < m_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), получим

$$\begin{aligned} [E_n^{(p)}(f; x)]^p &\leq [E_{m_k}^{(p)}(f; x)]^p \leq \\ &\leq C m_k \int_0^{1/m_k} \omega_p^p(f, h) dh \leq C \omega_p^p\left(f; \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

и теорема 1 доказана.

Для установления обратных теорем, модуль непрерывности введём по другому, то есть

$$\omega_p^*(f, \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_p \quad (0 \leq \delta \leq 1).$$

Это так называемый периодический модуль непрерывности.

Известно, что (см.[6]) $\omega_p(f; \delta) \leq \omega_p^*(f; \delta)$, поэтому в обратных теоремах оценки будут лучше, если в них использован модуль непрерывности $\omega_p^*(f; \delta)$.

Теорема 2. Пусть функция $f \in L_p[0, 1]$, $0 < p < 1$ и $\chi\{P_n\}$ ($2 \leq P_n \leq C$, $n = 1, 2, \dots$) – система типа Хаара. Тогда имеет место неравенство

$$\omega_p^*\left(f; \frac{1}{n}\right) \leq C^{1/p} \cdot n^{-1/p} \left\{ \sum_{k=1}^n [E_k^{(p)}(f; x)]^p \right\}^{1/p}, \quad n \in N. \quad (4)$$

Для доказательства этой теоремы докажем лемму, аналогичную лемме 2.2 из [7].

Лемма 2. Если $H_{m_n}(x)$ – полином по системе типа Хаара порядка m_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), то при $0 < h < \frac{1}{m_n}$ справедливо равенство

$$\omega_p^*(H_{m_n}; h) = (h \cdot m_n)^{1/p} \omega_p^*\left(H_{m_n}; \frac{1}{m_n}\right).$$

Доказательство леммы 2. Пусть $H_{m_n}(x) = \alpha_s$, если $x \in \left(\frac{s-1}{m_n}; \frac{s}{m_n}\right) = \delta_n^{(s)}$, ($s = 1, 2, \dots, m_n$),

если $0 < h < \frac{1}{m_n}$, то

$$H_{m_n}(x+h) = \begin{cases} \alpha_s, & x \in \left(\frac{s-1}{m_n}, \frac{s}{m_n} - h\right), \\ \alpha_{s+1}, & x \in \left(\frac{s}{m_n} - h, \frac{s}{m_n}\right). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |H_{m_n}(x+h) - H_{m_n}(x)|^p dx = \\
& = \sum_{s=1}^{m_n} \int_{\delta_n(s)} |H_{m_n}(x+h) - H_{m_n}(x)|^p dx = \\
& = \sum_{s=1}^{m_n} \int_{\frac{s}{m_n}-h}^{\frac{s}{m_n}} |\alpha_{s+1} - \alpha_s|^p dx = h \sum_{s=1}^{m_n} |\alpha_{s+1} - \alpha_s|^p = \\
& = h \cdot m_n \int_0^1 |H_{m_n}\left(x + \frac{1}{m_n}\right) - H_{m_n}(x)|^p dx,
\end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство леммы 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть $m_k \leq n < m_{k+1}$ ($n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, \dots$) и H_{m_n} – полином наилучшего приближения функции f порядка m_i ($i = 0, 1, \dots$). Учитывая, что при $f \in L_p[0, 1]$ ($0 < p < 1$) верно (см. [7])

$$\omega_p^{*p}(f; \delta) \leq 2 \|f\|_p^p,$$

то в силу леммы 2 и с использованием лемм 1.2, 1.3 и 1.4 из [7] получим:

$$\begin{aligned}
\left[\omega_p^*\left(f; \frac{1}{n}\right) \right]^p & \leq \left[\omega_p^*\left(f - H_{m_k}; \frac{1}{n}\right) \right]^p + \left[\omega_p^*\left(H_{m_k}; \frac{1}{n}\right) \right]^p \leq \\
& \leq 2 \|f - H_{m_k}\|_p^p + \left[\omega_p^*\left(H_1 + \sum_{i=0}^{k-1} (H_{m_{i+1}} - H_{m_i}); \frac{1}{n}\right) \right]^p \leq \\
& \leq 2 \left[E_{m_k}^{(p)}(f) \right]^p + \frac{2N_1^2}{n} \sum_{i=0}^{k-1} m_i [E_{m_i}(f)]^p \leq \\
& \leq \frac{C}{k} \left[E_1^{(p)}(f) \right]^p + \frac{C}{n} \sum_{i=0}^k \sum_{m=m_{i-1}}^{m_i} [E_m^{(p)}(f)]^p.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega_p^*\left(H_{m_n}; \frac{1}{n}\right) \leq \left(\frac{C}{n}\right)^{1/p} \left\{ \sum_{k=1}^n [E_k^{(p)}(f; x)]^p \right\}^{1/p},$$

и теорема доказана.

Применив теоремы 1 и 2, можем получить следующие утверждения, которые доказываются точно так же, как в работе [7].

Теорема 3. Если функция $f \in L^p, 0 < p < 1$, то:

а) при $0 < \alpha < 1/p$ условия $f \in Lip^*(\alpha, p) (f \in Lip(\alpha, p))$ и $E_n^{(p)}(f; \chi) = O(n^{-\alpha})$ эквивалентны;

б) при $\alpha = 1/p$ из условия $E_n^{(p)}(f; \chi) = O(n^{-1/p})$ следует, что $\omega_p^*(f; \delta) = O(\delta^{1/p} |\ln \delta|^{1/p})$, но не обязательно $\omega_p(f; \delta) = O(\delta^{1/p} |\ln \delta|^{1/p})$;

в) при $\alpha > 1/p$ из условия $E_n^{(p)}(f; \chi) = O(n^{-\alpha})$ следует, что $f \in Lip^*(1/p; p)$, но не обязательно $f \in Lip(1/p; p)$.

В этой теореме функция $f \in L^p$ принадлежит классу $Lip^*(\alpha, p)$, если $\omega_p^* = O(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$.

В [7] доказано, что если $0 < p < q < \infty$ и функция $f \in L_p$, то

$$\|f\|_q \leq C_{p,q} \left\{ \|f\|_p + \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \left(w_p^* \left(\frac{1}{n}, f \right)^q \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}. \quad (5)$$

Используя неравенства Харди-Литтлвуда [10]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leq C_{\alpha,p} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} (na_n)^p, \quad a_n \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad p > 1 \quad (6)$$

и применяя теорему 2, докажем следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $0 < p < q < \infty$ и $f \in L^p$. Тогда

$$\|f\|_q \leq C_{p,q} \left\{ \|f\|_p + \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} (E_n^{(p)}(f; \chi))^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}, \quad (7)$$

$$E_n^{(q)}(f; \chi) \leq C_{p,q} \left\{ E_n^{(p)}(f; \chi) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} + \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2} (E_k^{(p)}(f; \chi))^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (n \geq 1). \quad (8)$$

Доказательство теоремы 4. В силу неравенств (4) и (5) имеем:

$$\|f\|_q \leq C_{p,q} \left\{ \|f\|_p + \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \left[\frac{C}{n} \sum_{k=1}^n (E_k^{(p)}(f))^q \right]^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} \right\},$$

а так как $q/p > 1$, то можно применить неравенство Харди-Литтлвуда (6), которое приведёт к неравенству (7). Соотношение (8) получается из (7) аналогично тому, как это сделано в работе [7]. Отметим, что аналог теоремы Джексона и обратных теорем типа С.Н. Бернштейна в самом общем случае

при приближении многочленами по периодическим мультипликативным системам в метрике $L_p(G)$ получил А.В.Ефимов [11]:

$$E_{m_n}^{(p)}(f) \leq \omega_n^{(p)}(f) \leq 2E_{m_n}^{(p)}(f), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad n = 0, 1, \dots$$

Поступило 16.04.2012 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. – М.: ГИФМЛ, 1958.
2. Гаркави А.Л. – Матем. заметки, 1970, т.8, вып.5, 583-584 с.
3. Jackson D. Über Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen, Diss., Göttingen, 1991.
4. Тиман А.Ф., Тиман М.Ф. – ДАН СССР, 1950, т.71, №1, 17-20с.
5. Тиман М.Ф., Гаймназаров Г. – ДАН СССР, 1971, т.198, №6, с. 1280-1282.
6. Голубов Б.И. – Матем. сб., 1972, т.87, №2, с.254-274.
7. Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. – Матем. сб. 1975, т.98 (140), №3 (11), 395-415 с.
8. Ульянов П.Л. – Успехи математических наук., 1972, т. XXVII, №2 (164), с. 3-52.
9. Ульянов П.Л. – Матем. сб., 1970, т.81 (123), №1, с.104-131.
10. Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. Неравенства. – М.: ИЛ, 1948 г.
11. Ефимов А.В. – Матем. сб., 1966, т.69, №3, с. 354-370.

К.Ш.Тухлиев

ТЕОРЕМАҲОИ ЧЕКСОН ДАР ФАЗОИ $L_p[0,1]$, ($0 < p < 1$) БАРОИ СИСТЕМАИ НАМУДИ ХААРА

Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи Б.Ғафуров

Дар мақолаи додашуда, теоремаҳои Чексон дар фазои $L_p[0,1]$, ($0 < p < 1$) барои системаи намуди Хаара исбот карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: системаи намуди Хаара – модули функцияи бефосила – теоремаи Чексон – беҳтарин наздиқшаванда – нобаробариҳои Харди-Литтлвуд.

K.Sh.Tukhliev

JACKSON THEOREMS IN $L_p[0,1]$, ($0 < p < 1$) FOR SYSTEMS OF HAAR

B.Gafurov State University of Khujand

In this paper we prove theorems of Jackson in the space $L_p[0,1]$, ($0 < p < 1$) for Haar type systems.

Key words: Haar-type system – modules of continuity – Jackson's theorem – the best approximation – inequalities Hardy-Littlewood.