

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ И СДВИГИ МНОЖЕСТВ. I

Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Мотивировка рассматриваемых геометрических вопросов — исследование условий, при которых экспоненциальная система функций с показателями, являющимися нулями некоторой суммы (конечного или бесконечного) семейства целых функций экспоненциального типа, неполна в пространствах функций, голоморфных внутри компакта C и одновременно непрерывных на компакте. Когда C — выпуклый компакт, эта задача оказалась тесно связанной с Теоремой Хелли о пересечении выпуклых множеств в следующей трактовке. Пусть C и S — два множества в конечномерном евклидовом пространстве, заданные соответственно как пересечения и как объединения некоторых подмножеств. Даются критерии, при которых некоторый параллельный перенос (сдвиг) множества C полностью покрывает (соответственно содержит, соответственно пересекает) множество S . Эти критерии и подобные им формулируются в терминах геометрических, алгебраических и теоретико-множественных разностей подмножеств, порождающих C и S .

Ключевые слова: теорема Хелли, неполнота систем экспонент, выпуклость, сдвиг, геометрическая, алгебраическая и теоретико-множественная разности.

Mathematics Subject Classification: 52A35, 52A20

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Источником наших исследований послужила следующая задача, которую пока в целях простоты изложения обсуждаем в этом пункте только в одномерном комплексном упрощенном варианте. Подробное изложение, включая многомерную ситуацию, дано в заключительном разделе второй части работы.

Рассмотрим не более чем счетную последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ без точек сгущения в ней, среди которых могут быть и повторяющиеся. Последовательности Λ сопоставляется система (кратных) экспонент

$$\text{Exp}^\Lambda := \{z^p e^{\lambda_k z} : z \in \mathbb{C}, 0 \leq p \leq n_\Lambda(\lambda_k) - 1\},$$

где $n_\Lambda(\lambda)$ — число повторений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательности Λ . Ненулевой целой функции экспоненциального типа L соответствует *последовательность нулей* Zero_L , перенумерованная с учетом кратности. При этом $\Lambda \leq \text{Zero}_L$ означает $n_\Lambda(\lambda) \leq n_{\text{Zero}_L}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Индикатор роста

$$h(\theta, L) := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log |L(te^{i\theta})|}{t}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

— непрерывная 2π -периодическая тригонометрически выпуклая функция [1]–[3], которая является опорной функцией некоторого выпуклого компакта (индикаторной диаграммы), или опорной функцией $h_S(\theta) \equiv h(-\theta, L)$ сопряженной диаграммы S функции L . Пусть

В.Н. ХАБИБУЛЛИН, HELLY'S THEOREM AND SHIFTS OF SETS. I.

© ХАБИБУЛЛИН Б.Н. 2014.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00030-а).

Поступила 25 февраля 2014 г.

теперь C — компакт в $\mathbb{C}$, задана последовательность ненулевых целых функций $\{L_k\}$ экспоненциального типа соответственно с сопряженными диаграммами S_k , $k = 1, 2, \dots$, сумма которых $\sum_k L_k$ равна целой функции L экспоненциального типа. Если существует сдвиг компакта C , покрывающий все множества семейства $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$, и функция L — ненулевая функция, то для любой последовательности $\Lambda \leq \text{Zero}_L$ система Exp^Λ неполна в пространстве $\text{Hol}(\Omega)$ голоморфных в области Ω функций для любой области $\Omega \supset C$ в естественной топологии равномерной сходимости на компактах. Возникает вопрос: *при каких условиях сдвиг компакта C покрывает объединение сопряженных диаграмм $\bigcup_k S_k$?* Оказалось, что задача поддается различным вариантам решения с помощью Теоремы Хелли, если компакт C — выпуклый. С перспективой дальнейших применений мы рассматриваем случаи, и когда сам компакт C задан как пересечение выпуклых компактов. Ответы даются в терминах геометрических разностей множеств или же в терминах опорных функций. В целях предстоящих приложений, в частности, к теории целых функций вполне регулярного роста, которые мы в настоящей работе пока не затрагиваем, и для полноты изложения рассмотрены также и ситуации, когда вместо геометрических разностей используются алгебраические или теоретико-множественные разности множеств.

Работа разбита на две части, что представляется естественным, поскольку первая часть носит чисто геометрический характер, а вторая часть — более алгебраический и, прежде всего, теоретико-функциональный характер. Результаты работы были частями анонсированы на конференциях [4]–[7].

1.2. Всюду $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел и для $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^n$ — n -мерное (векторное или точечное аффинное) евклидово пространство с обычным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а его элементы — векторы или точки. Символ 0 обозначает и число нуль, и нулевой вектор, и начало отсчета.

Далее, зачастую не указывая на конкретный источник, пользуемся близкой к общепринятой терминологией, обозначениями и широко известными фактами из [8]–[13]. Так, $A \times B := \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A, \beta \in B\}$ — декартово произведение множеств A, B . Для множества S произвольной природы $\text{card } S$ — *мощность* S , т. е. для конечного множества S — *число элементов* в нем. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ через $\text{int } S$ и $\text{co } S$ обозначаем *внутренность* и *выпуклую оболочку* множества S . Для $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ — *открытый шар с центром x радиуса $r \geq 0$* .

Соглашение. Когда речь идет о выборе набора элементов из множества или наборе множеств из семейства множеств, удобно допускать, что в этом наборе могут быть повторяющиеся соответственно элементы или множества.

В первой части работы предприняты исследования, продиктованные классической Теоремой Хелли о выпуклых множествах начала XX века, которую в одной из самых простых начальных форм можно напомнить в виде [8, Введение]: *пусть некоторое семейство $\mathcal{S}$ выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ конечно или каждое множество из него замкнуто и ограничено; тогда, если пересечение любых $n + 1$ множеств из $\mathcal{S}$ непусто, то непусто и пересечение всех множеств из $\mathcal{S}$* (подробнее Теорема Хелли о выпуклых множествах сформулирована ниже в начале раздела 2). Некоторое представление (очень далекое от полного) о необъятном объеме публикаций по Теореме Хелли можно почерпнуть из ссылок и списка литературы статьи. Если обсуждение результата или чьей-либо работы имеются в каких-нибудь обзорах или монографиях, то именно на последние дается ссылка. Здесь мы развиваем в различных направлениях одно из ключевых следствий Теоремы Хелли. Сформулируем его в виде теоремы.

Результат параллельного переноса множества $S \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *сдвигом* множества S . Следующее важное следствие теоремы Хелли доказано независимо и в различной

степени общности П. Винченцини (1939 г.) и В. Кли (1953 г.), а родственные вопросы рассматривал М. Эдельштейн (1958 г.).

Теорема VKE (Винченцини–Кли–Эдельштейна [8, 2.1]). Пусть семейство $\mathcal{S}$ выпуклых множеств конечно или состоит только из компактов, а $C \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое, но, дополнительно, ограниченное и замкнутое, если $\mathcal{S}$ бесконечно. Тогда существование сдвига множества C , который «покрывает всё» (аналогично «пересекает всё», аналогично «содержится во всех») множества из $\mathcal{S}$, полностью обеспечивается существованием такого рода сдвига для каждого набора $n + 1$ множеств семейства $\mathcal{S}$.

2. ТЕОРЕМЫ ХЕЛЛИ О ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

Нам потребуется ряд модификаций классической Теоремы Хелли [8]–[13].

Определение 1. Ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называем *направлением звёздности*¹ для множества $C \subset \mathbb{R}^n$ (относительно бесконечности), или *направлением рецессии*, если для любой точки $c \in C$ луч

$$r_y(c) := \{c + ty : t \geq 0\} \quad (2)$$

содержится в C . Вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называется *направлением линейности*, если как y , так и противоположный ему вектор $-y$ — направления звёздности для множества C , т.е. для каждой точки $c \in C$ прямая

$$l_y(c) := \{c + ty : t \in \mathbb{R}\} = r_y(c) \cup (r_{-y}(c)) = l_{-y}(c)$$

содержится в C . Множество C *полиэдрально*, если C — пересечение конечного числа замкнутых полупространств, определяемых конечной системой линейных неравенств вида

$$\langle a, x \rangle - b \leq 0 \text{ при некоторых } a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Очевидно, для пустого подмножества в $\mathbb{R}^n$ и для самого $\mathbb{R}^n$ любой ненулевой вектор — направление звёздности и линейности. Кроме того, $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$ еще и полиэдральны, поскольку $\emptyset$ может рассматриваться как множество решений любой несовместной конечной системы линейных неравенств вида (3), а $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle 0, x \rangle \leq 0\}$.

Теорема Хелли (о выпуклых множествах). Пусть для семейства

$$\mathcal{C} := \{C_\alpha : \alpha \in A\}, \quad A — \text{множество индексов}, \quad (4)$$

выпуклых множеств C_α в $\mathbb{R}^n$ выполнено одно из двух условий:

- (f) множество индексов A конечно (условие конечности [8, Введение]);
- (d) все множества C_α , $\alpha \in A$, замкнуты (условие замкнутости) и для некоторого конечного подмножества $A_0 \subset A$ все множества C_α полиэдральны при $\alpha \in A_0$, а всякое направление звёздности, общее для всех множеств C_α , $\alpha \in A$, есть направление линейности для множеств C_α при всех $\alpha \in A \setminus A_0$ (условие на направления звёздности [9, Теорема 21.5], [14]).

Если пересечение любого набора $n + 1$ множеств (см. Соглашение из Введения) из этого семейства $\mathcal{C}$ непусто, то и пересечение всех множеств из него непусто.

Замечание 1. Теорема Хелли о выпуклых множествах имеет место и при следующем более простом, но при этом и более жестком по сравнению с условием (d) ограничении

- (b) все множества C_α , $\alpha \in A$, замкнуты (условие замкнутости) и для некоторого подмножества $A' \subset A$ пересечение $\bigcap_{\alpha \in A'} C_\alpha$ непусто и ограничено (условие ограниченности [15, Теорема 5], [16, 1.1]).

¹Можно еще сказать, что любая точка в C «из бесконечности видна в направлении $-y$ » (ср. с понятием множества, звёздного относительно точки из этого множества [10, Определение 7.1]). Иначе говорят, что C удаляется в ∞ по направлению y [9, гл. II, § 8].

Это условие — частный случай условия (d), поскольку при выполнении (b) можно выбрать $A_0 = \emptyset$, а общих направлений звёздности для всех множеств C_α , $\alpha \in A$, попросту не существует по условию ограниченности. По этой причине версия Теоремы Хелли о выпуклых множествах с ограничением (b) не вошла в основную формулировку Теоремы Хелли.

3. РАЗНОСТИ МНОЖЕСТВ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ

Определение 2. Пусть S, C — произвольные множества в $\mathbb{R}^n$.

Теоретико-множественную разность, или *разность*, этих множеств обозначаем в наиболее распространенной форме $C \setminus S := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in C, x \notin S\}$.

Для $\lambda \in \mathbb{R}$ полагаем $\lambda S := \{\lambda s : s \in S\}$ — *произведение S на число λ* . При этом полагаем $-S := (-1)S$.

Геометрическая сумма, или *сумма Минковского*, множеств S и C совпадает с их *алгебраической*, или *векторной*, *суммой* и задается как¹

$$S + C := \{s + c : s \in S, c \in C\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

В частности, для $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем $S + x := S + \{x\} =: x + S$ — *сдвиг*, или *параллельный перенос*, множества S на вектор x .

Геометрическая разность, или, довольно часто, *разность Минковского* [10, Определение 8.5], этих множеств определяется как

$$C \dot{-} S := \{x \in \mathbb{R}^n : S + x \subset C\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

где мы используем широко применяемое обозначение² Л.С. Понтрягина [17], [18, § 2, С. Геометрическая разность], [13], [19]. В частности, для $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем $C - x := C \dot{-} \{x\} = C + (-x)$ — *сдвиг C на $-x$* . Тогда $C \dot{-} S = \bigcap_{s \in S} (C - s)$.

Алгебраическая, или *векторная*, *разность* этих множеств, также зачастую называемая, в разногласии с (6), *разностью Минковского*³, определяется как

$$C - S := C + (-1)S = \{c - s : c \in C, s \in S\} = C + (-S). \quad (7)$$

Отметим, что при $C \neq \emptyset$ и $\text{card } S > 1$, вообще говоря, $C \dot{-} S \subset C - S \neq C \dot{-} S$ (см. [10, гл. I, § 8, Определение 8.5, Предостережение], [13, Предложение 1.1.1, Замечание 1.1.1]).

Для доказательства основной Теоремы 1 будет частично использована следующая элементарная, но представляющая самостоятельный интерес

Лемма 3.1 (о наследовании геометрической разностью свойств «уменьшаемого»). *Для пары произвольных множеств $S, C \subset \mathbb{R}^n$ если*

- [cl] *множество C замкнуто, то и геометрическая разность $C \dot{-} S$ замкнута;*
- [bd] *C ограничено и $S \neq \emptyset$, то и геометрическая разность $C \dot{-} S$ ограничена;*
- [co] *множество C выпукло, то и геометрическая разность $C \dot{-} S$ выпукла;*
- [ds] *y — направление звёздности для C , то y — направление звёздности и для $C \dot{-} S$;*
- [dl] *y — направление линейности для C , то y — направление линейности и для $C \dot{-} S$;*
- [ph] *C полидрально, то и геометрическая разность $C \dot{-} S$ полидральна.*

Часть результатов (но не все) этой Леммы при специальном ограничении выпуклости множества C могла бы быть доказана из простого равенства для геометрических разностей $C \dot{-} S = C \dot{-} \text{co } S$, но мы предпочли прямые доказательства для всех случаев.

¹У некоторых авторов для операции суммы Минковского используется символ $\oplus$.

²Распространены и другие обозначения для операции геометрической разности множеств. Так, в [10, Определение 8.5] используется обычный знак минус $-$, символы $\div$ в [20, § 1], [21], [22] или $\dot{-}$ в [23, Определение 1] и т. п.

³Иногда с использованием для обозначения операции алгебраической разности знака $\ominus$.

Доказательство. [cl] Доказано в [19, Теорема 12.3], но мы даём чуть иное доказательство подробнее. Если $C = \emptyset$, то $C \dot{*} S = \emptyset$, когда $S \neq \emptyset$, и $C \dot{*} S = \mathbb{R}^n$, когда $S = \emptyset$, т. е. $C \dot{*} S$ замкнуто в любом случае. Если же $C \neq \emptyset$, а $x_k \in C \dot{*} S$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, и существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, то для любого $s \in S$ имеем $s + x_k \in C$ и $s + x = \lim_{k \rightarrow \infty} (s + x_k) \in C$ в силу замкнутости множества C . Отсюда $S + x \subset C$, т. е. $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in C \dot{*} S$.

[bd] Если $C = \emptyset$, то для $S \neq \emptyset$ имеем $C \dot{*} S = \emptyset$ — ограниченное множество. Пусть теперь $C \neq \emptyset$. Тогда $C \subset B(0, r)$ для некоторого $r > 0$. Зафиксируем какой-либо элемент $s \in S$. Если $x \in C \dot{*} S$, то $s + x \in B(0, r)$ и $x \in B(0, r + |s|)$. Отсюда $C \dot{*} S \subset B(0, r + |s|)$ и ограничено ввиду фиксированности r и s .

[co] Доказано в [19, Теорема 12.4], но мы доказываем несколько больше (см. ниже (9)). Если $x_1, x_2 \in C \dot{*} S$, то $S + x_1 \subset C$ и $S + x_2 \subset C$, а для любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ имеем $\lambda_1 S + \lambda_1 x_1 \subset \lambda_1 C$ и $\lambda_2 S + \lambda_2 x_2 \subset \lambda_2 C$. Отсюда ввиду включения $(\lambda_1 + \lambda_2)S \subset \lambda_1 S + \lambda_2 S$ и равенства $\lambda_1 C + \lambda_2 C = (\lambda_1 + \lambda_2)C$ при $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0$ для выпуклого C [10, Теорема 8.2] получаем

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2)S + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &\subset \lambda_1 S + \lambda_2 S + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (\lambda_1 S + \lambda_1 x_1) + (\lambda_2 S + \lambda_2 x_2) \\ &\subset \lambda_1 C + \lambda_2 C = (\lambda_1 + \lambda_2)C, \quad \text{при условии } \lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, доказано утверждение: для $S \subset \mathbb{R}^n$ и выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^n$ для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ при $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0$ справедливы соотношения

$$\lambda_1(C \dot{*} S) + \lambda_2(C \dot{*} S) \subset (\lambda_1 + \lambda_2)C \dot{*} (\lambda_1 + \lambda_2)S = (\lambda_1 + \lambda_2)(C \dot{*} S), \quad (9)$$

где последнее равенство приведено в [13, Предложение 1.1.1, второе равенство после (1.1.3)]. При этом [co] — частный случай этого утверждения при значениях $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Возможно и иное доказательство [co]. Если $S + x \subset C$, то $\text{co}(S + x) \subset \text{co} C$, откуда $\text{co} S + x \subset \text{co} C$ и $x \in \text{co} C \dot{*} \text{co} S$. Отсюда $C \dot{*} S \subset \text{co} C \dot{*} \text{co} S$. Очевидно, $C \dot{*} S \supset C \dot{*} \text{co} S$, поскольку $S \subset \text{co} S$. Таким образом,

$$C \dot{*} \text{co} S \subset C \dot{*} S \subset \text{co} C \dot{*} \text{co} S \text{ для любых } C, S \subset \mathbb{R}^n$$

и

$$C \dot{*} S = C \dot{*} \text{co} S, \text{ если } C \text{ — выпуклое множество.} \quad (10)$$

Но геометрическая разность двух выпуклых множеств — выпуклое множество [10, Теорема 8.8], откуда ввиду (10) вновь следует [co].

[ds]. Из комментариев после Определений 1 и 2 утверждение верно для $C = \emptyset$ или $S = \emptyset$. Пусть теперь y — направление звёздности для C . По Определениям 1 и 2 это означает, что $C + ty \subset C$ для любого числа $t \geq 0$. Тогда для $x \in C \dot{*} S$, т. е. $S + x \subset C$, получаем $S + (x + ty) \subset C + ty \subset C$ при всех $t \geq 0$. Следовательно, $x + ty \in C \dot{*} S$ при каждом $t \geq 0$. По Определению 1 вектор y — направление звёздности для $C \dot{*} S$.

[dl]. По Определению 1 это утверждение — очевидное следствие предыдущего.

[ph]. Из комментариев после Определения 2 если $C = \emptyset$, то $C \dot{*} S = \emptyset$, когда $S \neq \emptyset$, и $C \dot{*} S = \mathbb{R}^n$, когда $S = \emptyset$. Таким образом, из комментариев после Определения 1 при $C = \emptyset$ разность $\emptyset \dot{*} S$ полиэдральна. Аналогично при $S = \emptyset$ разность $C \dot{*} S = C \dot{*} \emptyset = \mathbb{R}^n$ — полиэдральное множество.

Пусть теперь $C \neq \emptyset$ и $S \neq \emptyset$. По Определению 1 полиэдральное множество C задается конечной системой линейных неравенств вида (3), т. е. для некоторого конечного набора векторов $a_k \in \mathbb{R}^n$ и чисел $b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m \in \mathbb{N}$,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_k, x \rangle - b_k \leq 0, k = 1, \dots, m\}. \quad (11)$$

Точка x принадлежит $C \overset{*}{\ast} S$, т. е. $S + x \subset C$, если и только если $x + s \in C$ для любого $s \in S$. Отсюда по описанию (11) $x \in C \overset{*}{\ast} S$, если и только если

$$\langle a_k, x \rangle + \langle a_k, s \rangle - b_k \leq 0 \text{ для всех } s \in S, k = 1, \dots, m. \quad (12)$$

Если хотя бы для одного номера k здесь $\sup_{s \in S} \langle a_k, s \rangle = +\infty$, то $C \overset{*}{\ast} S = \emptyset$ полиэдрально. В противном случае (12) эквивалентно конечной системе линейных неравенств

$$\langle a_k, x \rangle - b'_k \leq 0, k = 1, \dots, m, \text{ где } b'_k := b_k - \sup_{s \in S} \langle a_k, s \rangle \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

поскольку $S \neq \emptyset$. Последняя система полностью определяет $C \overset{*}{\ast} S$. $\square$

Далее также потребуется обратная к пп. [ds] и [dl] Леммы 3.1

Лемма 3.2. Пусть C — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$, и $y \in \mathbb{R}^n$ — направление звёздности (соответственно направление линейности) для $C \overset{*}{\ast} S \neq \emptyset$. Тогда y — направление звёздности (соответственно направление линейности) для C .

Доказательство. По Определению 1 достаточно доказать Лемму 3.2 для направлений звёздности y . Условия Леммы 3.2 означают, что для любой точки $x \in C \overset{*}{\ast} S \neq \emptyset$ луч $r_y(x)$ из (2) содержится в $C \overset{*}{\ast} S$. Другими словами, $S + x \subset C$ влечет за собой $S + r_y(x) \subset C$. Рассмотрим произвольный элемент $s \in S \neq \emptyset$. Тогда $s + x \in C$ и $s + x + ty \in C$ для любого $t \geq 0$. Таким образом, для некоторой точки $s + x \in$ луч $l_y(s + x)$ содержится в C .

Предложение 1 ([9, Теорема 8.3]). Если $C \subset \mathbb{R}^n$ — замкнуто и выпукло и для некоторой точки $c \in C$ луч $r_y(c)$ (соответственно прямая $l_y(c)$) содержится в C , то C звёздно (соответственно линейно) в направлении y .

По этому Предложению y — направление звёздности для C . $\square$

4. ПОКРЫТИЕ СДВИГАМИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ

Как будет пояснено в конце этого раздела, развитием существенной части Теоремы VKE [8, 1, 2.1] и одним из обобщений Теоремы Хелли может считаться

Теорема 1 (о покрытиях сдвигами). Пусть $\mathcal{C}$ — семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ из (4), а также задано семейство произвольных множеств

$$\mathcal{S} := \{S_\beta \subset \mathbb{R}^n : \beta \in B\}, \quad B — \text{множество индексов}. \quad (14)$$

Допустим, что выполнено условие конечности

$$(F) \text{ card } A < \infty \text{ и } \text{card}\{\beta \in B : S_\beta \neq \emptyset\} < \infty$$

или для $\mathcal{C}$ выполнено условие (d) из Теоремы Хелли, но с дополнительными ограничениями $A_0 = \emptyset$ или $\text{card } B < \infty$. Положим

$$C := \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha, \quad S := \bigcup_{\beta \in B} S_\beta. \quad (15)$$

Следующие четыре утверждения попарно эквивалентны (с учётом Соглашения из Введения):

- (T) некоторый сдвиг множества S содержится в множестве C ;
- (C) для любого набора $n+1$ множеств из $\mathcal{C}$ некоторый сдвиг множества S содержится в пересечении этого набора $n+1$ множеств;
- (S) для любого набора $n+1$ множеств из $\mathcal{S}$ некоторый сдвиг множества C покрывает (включает в себя) все $n+1$ множеств из этого набора;

(CS) для любых наборов $n + 1$ индексов

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in A \text{ и } \beta_1, \dots, \beta_{n+1} \in B \quad (16)$$

пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} (C_{\alpha_k} \ast S_{\beta_k}) \quad (17)$$

геометрических разностей $C_{\alpha_k} \ast S_{\beta_k}$ непусто.

Условие (17) в (CS) по Определению 2 геометрической разности можно заменить на любое из следующих двух эквивалентных ему условий:

- (CSC) для любых наборов индексов (16) существует вектор $x \in \mathbb{R}^n$, для которого сдвиги $S_{\beta_k} + x$ содержатся в C_{α_k} при всех $k = 1, \dots, n + 1$;
 (CSS) для любых наборов индексов (16) существует вектор $x \in \mathbb{R}^n$, для которого сдвиг $C_{\alpha_k} - x$ покрывает S_{β_k} при всех $k = 1, \dots, n + 1$.

Теперь мы можем дать

Доказательство Теоремы 1. Если $S = \emptyset$, то из (15) все $S_\beta = \emptyset$ и каждое из четырех утверждений-высказываний Теоремы 1 о сдвигах истинно. Если хотя бы одно из множеств C_α пусто, то $C = \emptyset$ и каждое из четырех утверждений Теоремы о сдвигах с учетом Соглашения из Введения влечет за собой пустоту всех S_β и S . Значит и в этом случае все эти четыре утверждения истинны. Поэтому далее в доказательстве можно считать, что $S \neq \emptyset$ и все $C_\alpha \neq \emptyset$. Истинность пар двойных «вертикальных и горизонтальных» импликаций сторон «прямоугольника»

$$\begin{array}{ccc} (T) & \Rightarrow & (C) \\ \Downarrow & \nwarrow & \Downarrow \\ (S) & \Rightarrow & (CS) \end{array}$$

даже без каких бы то ни было условий на семейства $\mathcal{C}$ и $\mathcal{S}$ здесь достаточно очевидна. Отметим лишь, что импликации $(C) \Rightarrow (CS)$ и $(S) \Rightarrow (CS)$ еще более прозрачны, если рассматривать (CS) соответственно в форме (CSC) и (CSS). Таким образом, в доказательстве нуждается только справедливость «диагональной» импликации $(CS) \rightarrow (T)$. При этом пустые множества S_β из семейства $\mathcal{S}$ не влияют на пересечение (17), поскольку $C_\alpha \ast \emptyset = \mathbb{R}^n$ для любого $C_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому, переходя от множества индексов B к подмножеству индексов $\{\beta \in B: S_\beta \neq \emptyset\}$ и сохраняя для него прежнее обозначение B , можем считать далее, что все множества S_β непусты.

Рассмотрим теперь семейство множеств

$$\mathcal{C} \ast \mathcal{S} := \{C_{\alpha, \beta} := C_\alpha \ast S_\beta: (\alpha, \beta) \in A \times B\}. \quad (18)$$

Лемма 4.1. Если в обозначениях (18) и (15) пересечение

$$\bigcap_{(\alpha, \beta) \in A \times B} C_{\alpha, \beta} \quad (19)$$

непусто, то некоторый сдвиг множества S содержится в C , т. е. выполнено высказывание (T).

Действительно, пусть $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит пересечению (19). Это означает, что

$$S_\beta + x \subset C_\alpha \text{ для всех } \alpha \in A \text{ и } \beta \in B.$$

Отсюда

$$S_\beta + x \subset \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \text{ для любого } \beta \in B.$$

Следовательно,

$$\bigcap_{\beta \in B} S_\beta + x = \bigcap_{\beta \in B} (S_\beta + x) \subset \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha,$$

т.е. $S + x \subset C$, что и требовалось. В свете Леммы 4.1 для доказательства импликации (CS) $\Rightarrow$ (T) достаточно обосновать применимость Теоремы Хелли о выпуклых множествах к семейству (18).

При выполнении (CS) и по предшествующим соглашениям в семействе $\mathcal{C} \stackrel{*}{\mathcal{S}}$

- (!) все множества $C_{\alpha,\beta}$ непусты, и, более того, непусто любое пересечение $\bigcap_{k=1}^{n+1} C_{\alpha_k, \beta_k}$ из (17) для произвольных наборов индексов (16);
- (!) все множества $C_{\alpha,\beta}$ выпуклы — п. [co] Леммы 3.1;
- (!) все множества $C_{\alpha,\beta}$ замкнуты, если все C_α замкнуты, — п. [cl] Леммы 3.1;
- (!) имеется лишь конечное число множеств $C_{\alpha,\beta}$ при условии конечности (F), т.е. $\text{card}(\mathcal{C} \stackrel{*}{\mathcal{S}}) < \infty$.

Условие (F). В силу последнего если выполнено условие конечности (F), то при условии (CS) при наших соглашениях условие конечности (f) выполнено для семейства $\mathcal{C} \stackrel{*}{\mathcal{S}}$. Значит, Теорема Хелли о выпуклых множествах применима к семейству $\mathcal{C} \stackrel{*}{\mathcal{S}}$, и справедливость импликации (CS) $\Rightarrow$ (T) в этом случае доказана.

Условие (d). При условии $A_0 = \emptyset$ пусть y — общее направление звёздности для $C_{\alpha,\beta} = C_\alpha \stackrel{*}{S}_\beta$ при всех $(\alpha, \beta) \in A \times B$. Тогда по Лемме 3.2 вектор y — общее направление звёздности для всех C_α , $\alpha \in A$. Отсюда по условию (d) вектор y — направление линейности для C_α при всех $\alpha \in A$, а из п. [dl] Леммы 3.1 вектор y — направление линейности для всех $C_{\alpha,\beta}$ при $(\alpha, \beta) \in A \times B$. Таким образом, для семейства $\mathcal{C} \stackrel{*}{\mathcal{S}}$ выпуклых замкнутых множеств из (18) выполнено условие вида (d) (без конечного подмножества индексов A_0). Следовательно, к семейству $\mathcal{C} \stackrel{*}{\mathcal{S}}$ применима Теорема Хелли, и по Лемме 4.1 получаем требуемое утверждение (T).

Пусть теперь при условии (d) множество индексов B конечно. Рассмотрим разбиение множества индексов $A \times B$ на два непересекающихся подмножества индексов

$$A \times B = (A_0 \times B) \cup ((A \setminus A_0) \times B).$$

Тогда *конечное* подсемейство

$$\{C_{\alpha,\beta} : (\alpha, \beta) \in A_0 \times B\}$$

семейства $\mathcal{C} \stackrel{*}{\mathcal{S}}$ состоит по п. [ph] Леммы 3.1 из *полиэдральных множеств*. Пусть теперь y — направление звёздности для всех множеств семейства $\mathcal{C} \stackrel{*}{\mathcal{S}}$. Вновь по Лемме 3.2 вектор y — общее направление звёздности для всех C_α , $\alpha \in A$. Отсюда по условию (d) вектор y — направление линейности для C_α при всех $\alpha \in A \setminus A_0$, а из п. [dl] Леммы 3.1 вектор y — направление линейности для всех $C_{\alpha,\beta}$ при $(\alpha, \beta) \in (A \setminus A_0) \times B$. Таким образом, для семейства $\mathcal{C} \stackrel{*}{\mathcal{S}}$ выпуклых замкнутых множеств из (18) выполнено условие вида (d) (в роли A_0 выступает $A_0 \times B$). Следовательно, к семейству $\mathcal{C} \stackrel{*}{\mathcal{S}}$ применима Теорема Хелли, и по Лемме 4.1 получаем требуемое утверждение (T). $\square$

Замечание 2. Теорема 1 о сдвигах имеет место и при условии (b) из Замечания 1, поскольку оно — частный случая условия (d) при $A_0 = \emptyset$.

Комментарий 1 (*к Теореме 1*). Убедимся, что теорема Хелли и большая часть Теоремы VKE (в части, касающейся терминов «*покрывает всё*», «*содержится во всех*») — это частные проявления Теоремы 1.

1. Для произвольного одноточечного непустого множества S , например $S = \{0\}$, и одноэлементного семейства $\mathcal{S} = \{S\}$ импликация (C) $\Rightarrow$ (T) Теоремы 1 о покрытиях сдвигами дает в точности приведенную выше в начале раздела 2 общую Теорему Хелли о выпуклых множествах.

2. Если семейство $\mathcal{C}$ одноэлементное, т. е. состоит из одного выпуклого множества C , то импликация $(S) \Rightarrow (T)$ Теоремы 1 о покрытиях сдвигами дает как частный случай Теорему VKE из Введения в части «сдвиг множества C «покрывает всё».
3. Если семейство $\mathcal{S}$ одноэлементное и состоит из одного выпуклого множества S , то импликация $(C) \Rightarrow (T)$ Теоремы 1 о покрытиях сдвигами переходит в частный случай Теоремы VKE из Введения в части «содержит в себе», но только необходимо взаимно поменять местами обозначения-символы: S вместо C , $\mathcal{C}$ вместо $\mathcal{S}$ и наложить требования либо конечности $\mathcal{C}$, либо компактности S .
4. Вывод части «пересекает всё» Теоремы VKE и ее обобщения перенесен в раздел 4 после Теоремы 2 о пересечениях сдвигов, поскольку несколько неожиданно (во всяком случае, для нас) он оказался связан не с геометрической разностью, а с алгебраической разностью множеств.

Комментарий 2 (*предшествующие специальные версии Теоремы 1*). Справедливость импликации $(C) \Rightarrow (T)$ Теоремы 1 была установлена или отмечена ранее в [8] в следующих трех весьма частных случаях:

- % семейство $\mathcal{C}$ выпуклых множеств *конечно*, а S — *выпуклое* множество [8, 2.1] (Теорема VKE);
- % семейство $\mathcal{C}$ состоит из *выпуклых компактов*, и S также *выпуклый компакт* [8, 2.1] (Теорема VKE);
- % семейство $\mathcal{C}$ состоит из *замкнутых полупространств*, имеющих *ограниченное* пересечение, а S — *выпуклое тело*, т. е. выпуклый компакт с непустой внутренностью $\text{int } S \neq \emptyset$ [8, 6.18].

В специальном случае, когда $\mathcal{S}$ из (14) — это семейство всех однотоочечных множеств $\{s\}$, $s \in S$, т. е. $B := S$ — еще и множество индексов и $S_s := \{s\}$, $s \in S$, справедливость импликации $(S) \Rightarrow (T)$ легко выводится из [8, 2.1] (необходимо рассматривать $\mathcal{K} = \mathcal{S}$) в следующих двух также очень особых ситуациях:

- % S *конечно*, а семейство $\mathcal{C}$ состоит из *одного* выпуклого множества C [8, 2.1] (Теорема VKE);
- % семейство $\mathcal{C}$ состоит из *одного выпуклого компакта* C (для выпуклого тела C см. [8, 6.2], а при $\text{int } C = \emptyset$ доказательство легко следует из [8, 2.1] (Теорема VKE)).

5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ СДВИГОВ И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ

Дадим «алгебраическое» развитие той же Теоремы VKE из Введения.

Теорема 2 (о пересечении сдвигов). Пусть теперь семейство

$$\mathcal{C} := \{C_\alpha \subset \mathbb{R}^n : \alpha \in A\}, \quad A — \text{множество индексов}, \quad (20)$$

состоит из произвольных (ср. с (4)) непустых множеств C_α , и семейство множеств (ср. с (14))

$$\mathcal{S} := \{S_\beta \subset \mathbb{R}^n : \beta \in B\}, \quad B — \text{множество индексов}, \quad (21)$$

также состоит из произвольных непустых множеств S_β . Предполагаем, что каждая алгебраическая, т. е. векторная, разность (Определение 2, (7))

$$C_\alpha - S_\beta := C_\alpha + (-S_\beta) \quad \text{выпукла при всех } \alpha \in A, \beta \in B. \quad (22)$$

Допустим, что выполнено одно из двух условий:

- (F) условие конечности из Теоремы 1, т. е. $\text{card } A + \text{card } B < \infty$;
- (id) каждая алгебраическая разность в (22) замкнута, для некоторых конечных подмножеств $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ алгебраические разности в (22) полиэдральны при всех

$(\alpha, \beta) \in A_0 \times B_0$, а также всякое направление звёздности, общее для всех алгебраических разностей (22) при всех $(\alpha, \beta) \in A \times B$, оказывается направлением линейности для алгебраических разностей (22) при всех $(\alpha, \beta) \in (A \times B) \setminus (A_0 \times B_0)$.

Следующие утверждения эквивалентны (см. Соглашение из Введения):

- (I) существует единый вектор $x \in \mathbb{R}^n$, для которого при любом индексе $\beta \in B$ каждый сдвиг $S_\beta + x$ пересекается со всеми C_α из $\mathcal{C}$;
 (CSI) для любых наборов $n + 1$ индексов

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in A \text{ и } \beta_1, \dots, \beta_{n+1} \in B$$

пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} (C_{\alpha_k} - S_{\beta_k}) \quad (23)$$

алгебраических разностей из (22) непусто.

Доказательство. Импликация (I) $\Rightarrow$ (CSI) очевидна по определениям и справедлива для любых систем непустых множеств. Обратную же импликацию (CSI) $\Rightarrow$ (I) доказываем одновременно при условиях и (F), и (id). Поскольку множества (22) выпуклы, к ним применима Теорема Хелли о выпуклых множествах. Здесь условию (F) соответствует условие конечности (f), а условию (id) — условие (d). Если в Теореме Хелли вместо наборов индексов A, A_0 рассматривать соответственно наборы индексов $A \times B, A_0 \times B_0$, а вместо системы множеств C_α — систему множеств из всевозможных алгебраических разностей (22), то по Теореме Хелли пересечение

$$\bigcap_{(\alpha, \beta) \in A \times B} (C_\alpha - S_\beta) \neq \emptyset.$$

Пусть x — некоторая точка из последнего пересечения. Т.е. всегда найдутся $c_\alpha \in C_\alpha$ и $s_\beta \in S_\beta$, для которых $x = c_\alpha - s_\beta$, или

$$S_\beta + x \ni s_\beta + x = c_\alpha \in C_\alpha \text{ для любых пар } (\alpha, \beta) \in A \times B.$$

А это и есть искомый единый вектор сдвига x из (I). $\square$

Напомним, что в начале раздела 4 после формулировки Теоремы 1 и условий (CSC)–(CSS) последний из 4-х пунктов (1)–(4) остался нераскрытым (вывод части «пересекает всё»). Теперь мы сможем вернуться к последнему пункту из пп. (1)–(4), для того чтобы восполнить наш пробел о выводе части «пересекает всё» Теоремы VKE из Введения и обобщить её.

Следствие 1. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ непусто и задано семейство множеств (21), алгебраические разности $C - S_\beta$ выпуклы при всех $\beta \in B$, где B конечно или, в противном случае, все эти алгебраические разности замкнуты и хотя бы одна из них ограничена. Если для каждого набора $n + 1$ множеств

$$\{S_{\beta_1}, \dots, S_{\beta_{n+1}}\} \quad (24)$$

из семейства (21) некоторый сдвиг множества C пересекает одновременно все $n + 1$ множеств из (24), то найдется сдвиг множества C , пересекающий все множества семейства $\mathcal{S}$.

Доказательство. Ввиду единственности семейства $\mathcal{C} = \{C\}$ пересечение принимает достаточно простой вид, а условие непустоты пересечения (23) и означает последнюю фразу в формулировке доказываемого Следствия. При бесконечности множества B замкнутость алгебраических разностей и, прежде всего, ограниченность хотя бы одной из этих алгебраических разностей (см. и ср. раздел 2, Замечание 1, п. (b), сразу после формулировки

Теоремы Хелли) поставляет нам условие (id). Таким образом, выполнены все условия Теоремы 2 о пересечении сдвигов, и Следствие 1 доказано. $\square$

Комментарий 3. Следующие комментарии и замечания дополняют Теорему 2 о пересечении сдвигов:

- * если $\text{card } B = 1$ и $S_\beta = \{0\}$, то Теорема 2 — в точности Теорема Хелли о выпуклых множествах, сформулированная выше;
- * при условиях $\text{card } A = 1$, т.е. $\mathcal{C}$ состоит из *одного выпуклого* множества C , все S_β , $\beta \in B$, выпуклы и множество индексов B конечно или же C и все множества $S_\beta \in \mathcal{S}$ компактны, Теорема 2 доказана в [8, 2.1];
- * выпуклость всех алгебраических разностей в (22) можно заменить на более жесткое условие выпуклости всех $C_\alpha \in \mathcal{C}$ и всех $S_\beta \in \mathcal{S}$, поскольку алгебраическая разность двух выпуклых множеств выпукла;
- * часть условия (id) «каждая алгебраическая разность в (22) замкнута, ...» можно заменить на более жесткое условие «для каждой пары C_α, S_β одно из множеств замкнуто, а другое компактно, ...», так как алгебраическая разность замкнутого множества и компакта — замкнутое множество;
- * часть условия (id) «для некоторых конечных подмножеств $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ алгебраические разности в (22) полиэдральны для всех пар $(\alpha, \beta) \in A_0 \times B_0$, ...» можно заменить на более жесткое условие «для некоторых конечных подмножеств индексов $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ каждое из множеств C_α при $\alpha \in A_0$ и S_β при $\beta \in B_0$ выпукло и полиэдрально, ...», так как алгебраическая сумма полиэдральных выпуклых множеств полиэдральна [9, Следствие 19.3.2];
- * если для некоторых подмножеств $A' \subset A$ и $B' \subset B$ пересечение

$$\bigcap_{(\alpha, \beta) \in A' \times B'} (C_\alpha - S_\beta)$$

ограничено, то направлений звёздности, общих для всех алгебраических разностей, (22) не существует, и заключительная часть условия (id) об общих направлениях звёздности выполнена автоматически;

- * если в паре C_α, S_β одно из множеств, C_α или S_β замкнуто, выпукло и неограничено, а другое ограничено, то направление звёздности для алгебраической разности из (22) будет и направлением звёздности (соответственно линейности) для неограниченного множества соответственно C_α или S_β (см. Предложения 1). Это может облегчить поиск общих направлений звёздности при проверке условия (id) Теоремы 2.

6. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ РАЗНОСТИ

Для полноты изложения приведем в определенном смысле аналог Теорем 1 и 2 для теоретико-множественной разности множеств, которую в этом разделе называем для краткости просто разностью.

Теорема 3 (о разностях множеств). Пусть, по-прежнему, семейства множеств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{S}$ определены соответственно как в (4) и (14) и как в (15)

$$C = \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha, \quad S = \bigcup_{\beta \in B} S_\beta. \quad (25)$$

Предполагаем, что все разности¹

$$C_\alpha \setminus S_\beta \text{ выпуклы при всех } \alpha \in A \text{ и } \beta \in B. \quad (26)$$

Допустим, что выполнено одно из двух условий

¹Такое часто возможно, даже если сами множества и невыпуклы.

- (F) условие конечности из Теорем 1 и 2, т. е. $\text{card } A + \text{card } B < \infty$;
 (dd) каждая разность в (26) замкнута, для некоторых конечных подмножеств $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ разности в (26) полиэдральны для всех пар $(\alpha, \beta) \in A_0 \times B_0$, а также всякое направление звёздности, общее для всех разностей (26) при всех $(\alpha, \beta) \in A \times B$, оказывается направлением линейности для разностей (26) при всех $(\alpha, \beta) \in (A \times B) \setminus (A_0 \times B_0)$.

Следующие утверждения эквивалентны (с учётом Соглашения из Введения):

- (D) разность $C \setminus S$ — непустое множество;
 (CSD) для любых наборов $n + 1$ индексов

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in A \text{ и } \beta_1, \dots, \beta_{n+1} \in B \quad (27)$$

пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} (C_{\alpha_k} \setminus S_{\beta_k}) \quad (28)$$

разностей из (26) непусто.

Доказательство. Для любых наборов индексов A' , B' и множеств произвольной природы C_α , $\alpha \in A'$ и S_β , $\beta \in B'$ справедливо элементарное общее теоретико-множественное равенство для разностей

$$\bigcap_{(\alpha, \beta) \in A' \times B'} (C_\alpha \setminus S_\beta) = \left(\bigcap_{\alpha \in A'} C_\alpha \right) \setminus \left(\bigcup_{\beta \in B'} S_\beta \right).$$

К примеру, при $A = A'$ и $B = B'$ в обозначениях (25) имеем

$$C \setminus S = \left(\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \right) \setminus \left(\bigcup_{\beta \in B} S_\beta \right). \quad (29)$$

Следовательно, если множество $C \setminus S$ не пусто, то такова же и правая часть в (29). Таким образом, утверждение (D) Теоремы влечет за собой непустоту множеств вида (28) при любом наборе индексов (27), т. е. доказано (CSD).

Импликацию (CSD) $\Rightarrow$ (D) доказываем одновременно при условиях и (F), и (dd). Так как множества (26) выпуклы, к ним применима Теорема Хелли о выпуклых множествах. Здесь условию (F) соответствует условие (f), а условию (CSD) — условие (d), если в Теореме Хелли вместо наборов индексов A, A_0 рассматривать соответственно наборы индексов $A \times B, A_0 \times B_0$, а вместо системы множеств C_α — систему множеств из всевозможных разностей (26). $\square$

Комментарий 4 (к Теореме 3).

- # Если $\text{card } B = 1$ и $S_\beta = \emptyset$ — пустое множество, то Теорема 3 — в точности Теорема Хелли о выпуклых множествах из раздела 2.
 # Часть условия (dd) «каждая разность в (26) замкнута, ...» можно заменить на более жесткое «все $C_\alpha \in \mathcal{C}$ замкнуты, а все $S_\beta \in \mathcal{S}$ открыты, ...», поскольку в этом случае каждая разность (26) замкнута.
 # Если для некоторых подмножеств $A' \subset A$ и $B' \subset B$ пересечение

$$\bigcap_{(\alpha, \beta) \in A' \times B'} (C_\alpha \setminus S_\beta)$$

ограничено, то направлений звёздности, общих для всех разностей (26), не существует, и заключительная часть условия (dd) об общих направлениях звёздности выполнена автоматически, так как их просто нет.

Если все множества $C_\alpha \in \mathcal{C}$ замкнуты, выпуклы и неограничены, а все множества $S_\beta \in \mathcal{S}$ ограничены, то направление звёздности (линейности) для разности из (26) будет и направлением звёздности (соответственно линейности) для неограниченного множества C_α , что легко следует из Предложения 1. Это может облегчить поиск общих направлений звёздности при проверке условия (dd) Теоремы 2.

Замечание 3. Дальнейшие богатые результатами вариации на тему Теоремы Хелли о выпуклых множествах, в некоторой мере пересекающихся с нашими результатами (особенно из раздела 5 в части аналогов или обобщений трансверселей для семейств множеств) наряду с уже приведенными выше источниками можно найти у Дольникова В. Л., Богатого С. А., Бобылева Н. А., Карасева Р. Н. [24]–[27] и многих других.

Автор глубоко признателен рецензенту за крайне полезные замечания и важную дополнительную информацию по тематике статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций*. М.: Физматгиз. 1956.
2. B. Ya. Levin *Lectures on entire functions*. Transl. Math. Monographs. Providence RI. Amer. Math. Soc. V. 150. 1996.
3. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности (издание четвертое, дополненное)*. Уфа: РИЦ БашГУ. 2012.
4. Хабибуллин Б. Н. *Трансляты выпуклых множеств* // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XXIV». Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ. 2013. С. 207–208.
5. Хабибуллин Б. Н. *Теорема Хелли, трансляты множеств и опорная функция* // Нелинейные уравнения и комплексный анализ. Сборник тезисов. Уфа. Институт математики УНЦ РАН. 2013. С. 51–53.
6. Хабибуллин Б. Н. *Теорема Хелли и покрытие транслятами* // Материалы XI Казанская летняя школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань. Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского. 2013. С. 196–199.
7. B. N. Khabibullin *Helly's Theorem and translation of convex sets* // Asymptotic geometric analysis. Saint-Petersburg. EIMI. 2013. P. 9–10.
8. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. *Теорема Хелли*. М.: Мир. 1968.
9. Рокафеллар Р. Т. *Выпуклый анализ*. М.: Мир. 1973.
10. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества*. М.: Наука. 1985.
11. Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН. Москва. 1987. Т. 14. С. 5–101.
12. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ и его приложения*. М.: Эдиториал УРСС. 2000.
13. Половинкин Е. С., Балашов М. В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*. М.: Физматлит. 2004.
14. R. T. Rockafellar *Helly's theorem and minima of convex functions* // Duke Math. J. 1965. V. 32. P. 381–398.
15. L. Sandgren *On convex cones* // Math. Scand. 1954. V. 2. P. 19–28.
16. V. Klee *Infinite-dimensional intersection theorems* // Convexity: Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society Eds. V. Klee. 1963. P. 349–360.
17. Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования* // ДАН СССР. 1967. № 175. С. 764–766.
18. Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования* // Матем. сборник. 1980. Т. 112(154), № 3(7). С. 307–330.
19. Петров Н. Н. *Введение в выпуклый анализ*. Ижевск. Удмуртский государственный университет. 2009.

20. Толстоногов А. А. *Дифференциальные включения в банаховом пространстве*. М.: Наука. 1986.
21. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*. М.: Наука, 1995.
22. Печерский С. Л. *Значение Шепли ТП игр, разности s -ядер выпуклых игр и точка Штейнера выпуклых компактов* // Математическая теория игр и её приложения. 2012. Т. 4, вып. 3. С. 58–85.
23. Аввакумов С. Н., Киселев Ю. Н. *Опорные функции некоторых специальных множеств, конструктивные процедуры сглаживания, геометрическая разность* // В сб. «Проблемы динамического управления». М.: МАКС Пресс, 2005. Вып. 1. С. 24–110 (электронная версия <http://oc.cs.msu.su/download/76/kiselev05.pdf>).
24. Дольников В. Л. *Теоремы типа Хелли для трансверсалей семейств множеств и их приложения*. Диссертация и автореферат на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Ярославль. 2000.
25. Богатый С. А. *Топологическая теорема Хелли* // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. № 2. С. 365–405.
26. Бобылев Н. А. *Теорема Хелли для звёздных множеств* // Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г.). Том 7. Геометрия и топология. Итоги науки и техн. Сер. «Соврем. мат. и ее прил.» Темат. обзоры, 68. М.: ВИНТИ, 1999. С. 16–26.
27. Карасев Р. Н. *Топологические методы в комбинаторной геометрии* // УМН. 2008. Т. 63, 6(384). С. 39–90.

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru