

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 15 Выпуск 2 (2014)

УДК 511.524

СУММЫ ХАРАКТЕРОВ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

З. Х. Рахмонов (г. Душанбе)

Аннотация

Получена новая оценка суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю q на последовательности сдвинутых простых чисел $p-l$, $(l, q) = 1$, $p \leq x$, нетривиальная при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$. Это уточняет оценку Дж. Б. Фридландера, К. Гонга, И. Е. Шпарлинского, нетривиальную лишь при $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$.

Ключевые слова: характер Дирихле, сдвинутые простые числа, короткая сумма характеров, тригонометрические суммы с простыми числами.

Библиография: 20 названий.

SUMS OF CHARACTERS OVER PRIME NUMBERS

Z. Kh. Rakhmonov (c. Dushanbe)

Abstract

The new estimate for the sum of the values of a primitive Dirichlet character modulo an integer q has been obtained over the sequence of shifted primes $p-l$, $(l, q) = 1$, $p \leq x$. This estimate is nontrivial for $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ and refines the estimate obtained by J. B. Friedlander, K. Gong, I. E. Shparlinskii. Their estimate holds provided that $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$.

Keywords: Dirichlet character, shifted primes, short sums of characters, exponential sums over primes.

Bibliography: 20 titles.

1. Введение

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1938 г. он [1, 2] доказал: если q — простое нечётное, $(l, q) = 1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q , тогда

$$T(\chi) = \sum_{p \leq x} \chi(p-l) \ll x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-\frac{1}{6}} \right). \quad (1)$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна и из нее следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов) mod q вида $p-l$, $p \leq x$.*

Затем И. М. Виноградов [3, 4, 5] получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x \geq q^{0,75+\varepsilon}$, q — простое. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы, по нулям соответствующей L — функции Дирихле; тогда в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$ получится нетривиальная оценка, но только при $x \geq q^{1+\varepsilon}$.

В 1968 г. А. А. Карацуба [6, 7] нашел метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. В работе [8] он с помощью развития этого метода в соединении с методом И. М. Виноградова доказал: *если q — простое, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q , $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

Автор ранее [9, 10, 11] обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал: *пусть D — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D , χ_q — примитивный характер, порожденный характером χ , тогда*

$$T(\chi) \leq x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x} \tau^2(q_1)} + x^{-\frac{1}{6}} \tau(q_1) \right), \quad q_1 = \prod_{\substack{p \mid D \\ p \nmid q}} p. \quad (2)$$

Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q , то оценка (2) принимает вид

$$T(\chi_q) \leq x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-\frac{1}{6}} \right)$$

и она нетривиальна при $x > q(\ln q)^{13}$.

В 2010 г. Дж. Б. Фридландер, К. Гонг, И. Е. Шпарлинский [14] для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q)$ существует, когда x — длина суммы — по порядку меньше q . Они доказали: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T(\chi_q) \ll xq^{-\delta}.$$

Основным результатом этой работы является следующая теорема о нетривиальной оценке для более коротких сумм $T(\chi_q)$ при составном q , которая ранее была анонсирована в [12] и [13].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть q — достаточно большое натуральное число, χ_q — примитивный характер по модулю q , $(l, q) = 1$, ε — положительное сколь угодно малое постоянное число, $\mathcal{L} = \ln q$, $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$. Тогда имеем*

$$T(\chi_q) = \sum_{p \leq x} \chi_q(p-l) \ll x \exp\left(-\sqrt{\mathcal{L}}\right).$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом оценок суммы с простыми числами И. М. Виноградова в сочетании с методами работы А. А. Карацубы [8] об оценке “короткой” суммы $T(\chi_q)$ для простого q , работами автора [10, 11, 15], в которых изучаются “длинные” суммы $T(\chi)$ (χ — неглавный характер по модулю D , D — составное) и средние значения функций Чебышёва $\psi(x, \chi)$ по всем характерам Дирихле. В доказательстве мы также используем основные результаты работ А. И. Виноградова [17] и Д. А. Берджесса [18]. Основные утверждения, позволившие получить новую оценку $T(\chi_q)$, содержатся в леммах 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

ОБОЗНАЧЕНИЯ: d, l — натуральные числа, $\tau_k(n)$ — число решений уравнения $x_1 x_2 \dots x_k = n$ в натуральных числах, $\varphi(q)$ — функция Эйлера, $\mu(d)$ — функция Мебиуса, $\omega(q)$ — число различных простых делителей числа q , δ — положительное сколь угодно малое постоянное число.

2. Известные леммы

ЛЕММА 1. Пусть $r \geq 1$, $M \geq 1$ — целые числа, $a_\nu, b_\nu \geq 0$ при $\nu = 1, 2, \dots, M$. Тогда имеют место следующие соотношения:

а) (неравенство Гельдёра)

$$\left(\sum_{\nu=1}^M a_\nu b_\nu \right)^r \leq \left(\sum_{\nu=1}^M a_\nu \right)^{r-1} \sum_{\nu=1}^M a_\nu b_\nu^r;$$

б) (неравенство Коши)

$$\left(\sum_{\nu=1}^M a_\nu b_\nu \right)^2 \leq \sum_{\nu=1}^M a_\nu^2 \sum_{\nu=1}^M a_\nu b_\nu^2.$$

ЛЕММА 2. [15]. Пусть $f(n)$ — произвольная комплекснозначная функция, $u_1 \leq x$, $r \geq 1$,

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \quad \lambda(n) = \sum_{d|n, d \leq u_1} \mu(n).$$

Тогда имеет место тождество:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) f(n) &= \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} C_r^k \times \\ &\times \sum_{m_1 \leq u_1} \mu(m_1) \cdots \sum_{\substack{m_k \leq u_1 \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leq x}} \mu(m_k) \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_k} \ln n_1 f(m_1 n_1 \cdots m_k n_k) + \\ &+ (-1)^r \sum_{n_1 \geq u_1} \lambda(n_1) \cdots \sum_{\substack{n_r \geq u_1 \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leq x}} \lambda(n_r) \sum_m \Lambda(m) f(n_1 \cdots n_r m). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. [17]. Пусть $F(x, z, q)$ — количество чисел $\leq x$, взаимно простых с q , $q \leq x$ и имеющих только простые делители меньше z , $\ln x \leq z \leq x^{\frac{1}{e}}$, $\alpha = \ln z / \ln x$; тогда

$$F(x, z, q) \ll x \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \exp \left(-\frac{1}{\alpha} \left(\ln \frac{1}{\alpha} + \ln \ln \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} + \frac{2\theta}{\alpha \ln \frac{1}{\alpha}} \right); \quad |\theta| \leq 1.$$

ЛЕММА 4. [19]. Пусть χ_q — примитивный характер по модулю q . Тогда

$$\tau(\bar{\chi}_q) \chi_q(n) = \sum_{m=1}^q \bar{\chi}_q(m) e \left(\frac{mn}{q} \right),$$

где

$$\tau(\chi_q) = \sum_{m=1}^q \chi_q(m) e \left(\frac{m}{q} \right), \quad |\tau(\chi_q)| = \sqrt{q}.$$

ЛЕММА 5. [18]. Пусть r — произвольное фиксированное натуральное число, Z — натуральное число, q — число, свободное от квадратов или $r = 2$. Тогда справедливо соотношение

$$\sum_{\lambda=0}^{q-1} \left| \sum_{z=1}^Z \chi_q(\lambda + z) \right|^{2r} \ll Z^r q + Z^{2r} q^{\frac{1}{2} + \delta},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от r и δ .

ЛЕММА 6. [18]. Для произвольного натурального $Z \leq q^{\frac{1}{6}}$ справедливо соотношение

$$\sum_{z_1, \dots, z_6=1}^Z \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi_q \left(\frac{(\lambda + z_1)(\lambda + z_2)(\lambda + z_3)}{(\lambda + z_4)(\lambda + z_5)(\lambda + z_6)} \right) \right| \ll Z^3 q^{1+\delta}.$$

ЛЕММА 7. [14]. Для любых натуральных q и U имеет место асимптотическая формула

$$\left| \sum_{\substack{u=1 \\ (u,q)=1}}^U 1 - \frac{\varphi(q)}{q} U \right| \leq 2^{\omega(n)}.$$

ЛЕММА 8. [20]. При $x \geq 2$ имеем

$$\sum_{n \leq x} \tau_r^k(n) \ll x (\ln x)^{r^k - 1}, \quad k = 1, 2.$$

3. Оценка коротких сумм значений характеров

ЛЕММА 9. Пусть σ — фиксированное число, $0,1 \leq \sigma < 0,9$, тогда

$$\sum_{\substack{d \setminus D \\ d > \exp(\ln D^2)^\sigma}} \frac{\mu^2(d)}{d} \ll \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma D).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем интервал суммирования на интервалы вида $M < d \leq 2M$. Получим не более $\ln D$ сумм $S(M)$ вида

$$S(M) = \sum_{\substack{d \setminus D \\ M < d \leq 2M}} \frac{\mu^2(d)}{d} \ll M^{-1} \sum_{\substack{d \setminus D \\ d \leq 2M}} 1.$$

Пусть $D = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ — каноническое разложение числа D на простые сомножители и q_i — i -е простое число. Очевидно, существует k такое, что

$$D_1 = q_1 q_2 \dots q_k \leq D < q_1 q_2 \dots q_k q_{k+1}, \quad k \geq t.$$

Согласно закону распределения простых чисел

$$\ln D_1 = \sum_{i \leq k} \ln q_i = \sum_{p \leq q_k} \ln p > \frac{q_k}{2},$$

так что

$$q_k < 2 \ln D_1 \leq 2 \ln D.$$

Пусть $D_2 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_t^{\alpha_t}$, очевидно $D_2 \leq D$ и $q_t \leq q_k$, тогда

$$S(M) \ll M^{-1} \sum_{\substack{d \setminus D \\ d \leq 2M}} 1 \leq M^{-1} \sum_{\substack{d \setminus D_2 \\ d \leq 2M}} 1.$$

Числа d , $d \setminus D_2$ состоят из простых делителей $q_j \leq q_t$. Так как $q_t < 2 \ln D$, то последняя сумма не превосходит количества чисел $\leq 2M$ и имеющих только простые делители меньше $2 \ln D$, то есть

$$S(M) \ll M^{-1} \sum_{\substack{d \setminus D_2 \\ d \leq 2M}} 1 \leq M^{-1} F(2M, 2 \ln D, 1).$$

Воспользовавшись леммой 3 при

$$x = 2M, \quad q = 1, \quad z = 2 \ln D, \quad \alpha = \frac{\ln z}{\ln x} = \frac{\ln \ln D^2}{\ln 2M},$$

имеем

$$S(M) \ll \exp \left(-\frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} \left(\ln \ln 2M - \ln \ln \ln D^2 + \ln \ln \frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} \right) + \frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} + \frac{2\theta \ln 2M}{\ln \ln D^2 \ln \frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2}} \right) = \exp \left(-\frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} (\ln \ln 2M - \mathcal{B}) \right),$$

$$\mathcal{B} = \ln \ln \ln D^2 - \ln \ln \frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} + 1 + 2\theta \left(\ln \frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} \right)^{-1}.$$

Из условия $2M > \exp(\ln D^2)^\sigma$ следует, что $\ln D^2 < (\ln 2M)^{\frac{1}{\sigma}}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\leq \ln \ln (\ln 2M)^{\frac{1}{\sigma}} - \ln \ln \frac{\ln 2M}{\ln (\ln 2M)^{\frac{1}{\sigma}}} + 1 + 2 \left(\ln \frac{\ln 2M}{\ln (\ln 2M)^{\frac{1}{\sigma}}} \right)^{-1} = \\ &= \ln \ln \ln 2M - \ln \sigma - \ln (\ln \ln 2M + \ln \sigma - \ln \ln \ln 2M) + 1 + \\ &+ 2 (\ln \ln 2M + \ln \sigma - \ln \ln \ln 2M)^{-1} = -\ln \left(1 - \frac{\ln \sigma^{-1} + \ln \ln \ln 2M}{\ln \ln 2M} \right) + \\ &+ \ln \sigma^{-1} + 1 + \frac{2}{\ln \ln 2M} \left(1 - \frac{\ln \sigma^{-1} + \ln \ln \ln 2M}{\ln \ln 2M} \right)^{-1} = \\ &= 1 + \ln \sigma^{-1} + O \left(\frac{\ln \sigma^{-1} + \ln \ln \ln 2M}{\ln \ln 2M} \right) < 2 + \ln 10 \leq 5 < \frac{1}{3} \ln \ln 2M. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S(M) \ll \exp \left(-\frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} (\ln \ln 2M - \mathcal{B}) \right) \ll \exp \left(-\frac{2 \ln 2M \ln \ln 2M}{3 \ln \ln D^2} \right)$$

. Из условия $2M > \exp(\ln D^2)^\sigma$ следует, что

$$\ln 2M > \ln^\sigma D^2, \quad \ln \ln 2M > \sigma \ln \ln D^2.$$

Поэтому

$$S(M) \ll \exp \left(-\frac{2\sigma}{3} \ln^\sigma D^2 \right) \ll \ln^{-1} D \cdot \exp \left(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma D \right).$$

ЛЕММА 10. Пусть K — число решений сравнения:

$$(nd - \eta)y \equiv (n_1d - \eta)y_1 \pmod{q},$$

$$M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y, y_1 \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y_1, q) = 1,$$

где $(\eta, q) = 1$, d — делитель числа q , $2NY < q$, $d < Y$, $\rho(qd^{-1}, Y)$ — число делителей β числа qd^{-1} , удовлетворяющего условиям $qY^{-1} \leq \beta < qd^{-1}$ и $(\beta, d) = 1$. Тогда справедливо соотношение:

$$K \leq NY_q + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d} \rho(qd^{-1}, Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d},$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $y = y_1$, разделив обе части сравнения на y , $(y, q) = 1$, находим

$$nd - \eta \equiv n_1d - \eta \pmod{q}, \quad M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y \leq Y, \quad (y, q) = 1,$$

или

$$nd \equiv n_1d \pmod{q}, \quad M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y \leq Y, \quad (y, q) = 1.$$

Разделив обе части сравнения и модуль на число d , найдем

$$n - n_1 \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y \leq Y, \quad (y, q) = 1.$$

Из условий $|n - n_1| < N$ и $2N \leq qY^{-1} < qd^{-1}$ следует, что последнее сравнение превращается в уравнение

$$n - n_1 = 0, \quad M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y \leq Y, \quad (y, q) = 1,$$

то есть если $y = y_1$, то $n = n_1$. Отсюда получаем

$$K = NY_q + 2\kappa, \tag{3}$$

где κ — число решений сравнения

$$\begin{aligned} (nd - \eta)y &\equiv (n_1d - \eta)y_1 \pmod{q}, \\ M < n, n_1 &\leq M + N, \quad 1 \leq y < y_1 \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y_1, q) = 1 \end{aligned}$$

или сравнения

$$\begin{aligned} (ny - n_1y_1)d &\equiv \eta(y - y_1) \pmod{q}, \\ M < n, n_1 &\leq M + N, \quad 1 \leq y < y_1 \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y_1, q) = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Левая часть и модуль сравнения (4) делятся на число d . Следовательно, делится на число d и его правая часть, то есть число $\eta(y - y_1)$. Число η является взаимно простым с числом d , поэтому на d делится число $y - y_1$, то есть $y - y_1 \equiv 0 \pmod{d}$ или $y_1 = y + td$. Таким образом, сравнение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} (n_1(y + td) - ny)d &\equiv \eta td \pmod{q}, \\ M < n, n_1 &\leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1. \end{aligned}$$

Разделяя обе части этого сравнения и его модуль на число d , получим

$$\begin{aligned} (n - n_1)y &\equiv (n_1d - \eta)t \pmod{qd^{-1}}, \\ M < n, n_1 &\leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Разбивая множество решений сравнения (5), имеем

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3, \tag{6}$$

где κ_1 , κ_2 и κ_3 — число решений сравнения (5), обладающих соответственно свойствами:

1. $n_1d - \eta \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$;
2. $(n_1d - \eta)t \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$ и $n_1d - \eta \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$;
3. $(n_1d - \eta)t \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$.

Оценка κ_1 . Сравнение $n_1d - \eta \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$ не имеет решения при $(d, qd^{-1}) > 1$, а при $(d, qd^{-1}) = 1$ имеет не более одного решения $n_1 = n_1^*$, $(n_1^*, qd^{-1}) = 1$, так как $2N < qd^{-1}$, то есть N — длина интервала изменения n_1 меньше модуля сравнения. Сравнение (5) при $n_1 = n_1^*$ принимает вид

$$(n - n_1^*)y \equiv 0 \pmod{qd^{-1}},$$

$$M < n \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1$$

и при фиксированных y и t имеет одно решение $n = n_1^*$. Следовательно

$$\kappa_1 \leq Y_q \left(\frac{Y}{d} + 1 \right) \leq \frac{2Y^2}{d}.$$

Оценка κ_2 . Воспользовавшись условиями случая, сравнение (5) представим в виде системы сравнений

$$\begin{aligned} (n_1 - n)y &\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \\ (n_1d - \eta)t &\equiv 0 \pmod{qd^{-1}} \end{aligned} \tag{7}$$

с условиями

$$\begin{aligned} n_1d - \eta &\not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \\ M < n, n_1 &\leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = (y + td, q) = 1. \end{aligned}$$

Из условий $(y, q) = 1$, $|n - n_1| < N$ и $2N \leq qd^{-1}$ следует, что первое сравнение системы (7) равносильно уравнению $n_1 = n$, поэтому количество решений системы (7) равно количеству решений сравнения

$$\begin{aligned} (nd - \eta)t &\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad nd - \eta \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \\ M < n &\leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Произведение чисел $nd - \eta$ и t делится на qd^{-1} , но само число $nd - \eta$ не делится на qd^{-1} , поэтому для каждого решения сравнения (8) существует делитель β числа qd^{-1} , что $\beta < qd^{-1}$ и

$$nd - \eta \equiv 0 \pmod{\beta}, \quad t \equiv 0 \pmod{q(d\beta)^{-1}}.$$

Из условия $(d, \eta) = 1$ вытекает, что сравнение $nd - \eta \equiv 0 \pmod{\beta}$ имеет решение только при $(\beta, d) = 1$. При $(\beta, d) = 1$ символом $\kappa_2(\beta)$ обозначим число решений системы сравнений

$$\begin{aligned} n &\equiv \eta d_\beta^{-1} \pmod{\beta}, \quad M < n \leq M + N, \quad dd_\beta^{-1} \equiv 1 \pmod{\beta} \\ t &\equiv 0 \pmod{q(d\beta)^{-1}}, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1, \end{aligned}$$

или число решений сравнения

$$n \equiv \eta d_\beta^{-1} \pmod{\beta}, \quad M < n \leq M + N, \quad dd_\beta^{-1} \equiv 1 \pmod{\beta} \\ 1 \leq y < y + tq\beta^{-1} \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + tq\beta^{-1}, q) = 1.$$

Границы изменения переменных y и t в этом сравнении представим в виде

$$1 \leq y < Y, \quad 1 \leq t \leq \frac{Y - y}{q\beta^{-1}}, \quad (y, q) = 1, \quad (y + tq\beta^{-1}, q) = 1. \quad (9)$$

При $y > Y - q\beta^{-1}$ верхняя граница изменения t меньше нижней, поэтому область (9) можно представить в виде

$$1 \leq y \leq Y - q\beta^{-1}, \quad 1 \leq t \leq \frac{Y - y}{q\beta^{-1}}, \quad (y, q) = 1, \quad (y + tq\beta^{-1}, q) = 1.$$

В свою очередь, если $\beta \leq qY^{-1}$, то $Y - q\beta^{-1}$ — верхняя граница изменения y меньше нижней границы. Следовательно $\kappa_2(\beta) = 0$ при $\beta \leq qY^{-1}$, а при $qY^{-1} < \beta < qd^{-1}$ для $\kappa_2(\beta)$ получим оценку

$$\kappa_2(\beta) \leq \left(\frac{N}{\beta} + 1 \right) \sum_{\substack{1 \leq y < Y - q\beta^{-1} \\ (y, q) = 1}} \left[\frac{Y - y}{q\beta^{-1}} \right] \leq \left(\frac{NY}{q} + \frac{Y\beta}{q} \right) \sum_{\substack{1 \leq y < Y - q\beta^{-1} \\ (y, q) = 1}} 1.$$

Далее, воспользовавшись соотношениями $2NY < q$, $\beta < qd^{-1}$ и $d < Y$, найдем

$$\kappa_2(\beta) \leq \left(1 + \frac{Y}{d} \right) \sum_{\substack{1 \leq y < Y - q\beta^{-1} \\ (y, q) = 1}} 1 \leq \frac{2Y}{d} \sum_{\substack{1 \leq y < Y - q\beta^{-1} \\ (y, q) = 1}} 1 < \frac{2Y^2}{d}.$$

Суммируя это неравенство по всем делителям β числа qd^{-1} , удовлетворяющим условиям $qY^{-1} \leq \beta < qd^{-1}$ и $(\beta, d) = 1$ и обозначая количество таких делителей символом $\rho(qd^{-1}, Y)$, получим

$$\kappa_2 \leq \sum_{\substack{(\beta, d) = 1, \quad \beta \mid qd^{-1} \\ qY^{-1} \leq \beta < qd^{-1}}} \kappa_2(\beta) \leq \frac{2Y^2}{d} \rho(qd^{-1}, Y).$$

Оценка κ_3 . Напомним, что κ_3 — число решений сравнения

$$(n_1 - n)y \equiv (n_1d - \eta)t \pmod{qd^{-1}}$$

с условиями

$$(n_1d - \eta)t \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad M < n, n_1 \leq M + N, \\ 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1.$$

Для фиксированной пары (n_1^*, t^*) символом $\kappa_3(\lambda)$ обозначим число решений сравнения

$$(n - n_1^*)y \equiv \lambda \pmod{qd^{-1}}, \quad M < n \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + t^*d \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (10)$$

где $\lambda \neq 0$ — абсолютно наименьший вычет числа $(n_1^*d - \eta)t^*$ по модулю qd^{-1} . Воспользовавшись границами изменения переменных n , n_1 и y , и условием $2NY < q$, найдем

$$0 < |(n - n_1^*)y| < NY < \frac{q}{2}.$$

Из этого неравенства следует, что сравнение (10) превращается в уравнение

$$(n - n_1^*)y = \lambda, \quad M < n \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + t^*d \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (11)$$

где для параметра λ выполняется соотношение

$$1 \leq |\lambda| < NY.$$

Таким образом, для фиксированной пары (n_1^*, t^*) , $\kappa_3(\lambda)$ — количество решений сравнения (10) равно числу решений уравнения (11), для которого справедливо неравенство

$$\kappa_3(\lambda) \leq \tau(|\lambda|) \leq 0,5(NY)^\delta.$$

Количество всех возможных пар (n_1^*, t^*) не превосходит $N(Yd^{-1} + 1)$. Следовательно,

$$\kappa_3 \leq N \left(\frac{Y}{d} + 1 \right) \cdot 0,5(NY)^\delta \leq \frac{(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Подставляя найденные оценки для κ_1 , κ_2 и κ_3 в (6), а затем в (3), найдем

$$K = NY_q + 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) \leq NY_q + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d} \rho(qd^{-1}, Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $(\eta, q) = 1$, $y < x$, тогда

$$S = \sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ (n, q) = 1}} \chi_q(n - \eta) \ll 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $y > 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q$. Имеем равенство:

$$S = \frac{1}{q} \sum_{t=1}^q e\left(\frac{\eta t}{q}\right) \sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ (n, q) = 1}} e\left(-\frac{tn}{q}\right) \sum_{a=1}^q \chi_q(a) e\left(\frac{at}{q}\right).$$

Пользуясь формулой, которая устанавливает связь между значениями примитивных характеров и значениями сумм Гаусса (лемма 4), имеем

$$\begin{aligned} S &= \frac{\tau(\chi_q)}{q} \sum_{t=1}^q \bar{\chi}_q(t) e\left(\frac{\eta t}{q}\right) \sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ (n,q)=1}} e\left(-\frac{tn}{q}\right) = \\ &= \frac{\tau(\chi_q)}{q} \sum_{t=1}^q \bar{\chi}_q(t) e\left(\frac{\eta t}{q}\right) \sum_{d \setminus q} \mu(d) \sum_{x-y < nd \leq x} e\left(-\frac{tnd}{q}\right). \end{aligned}$$

Последняя сумма по n при $d > y$ и $[x/d] = [(x-y)/d]$ пустая, а при $d > y$ и $[x/d] = [(x-y)/d] + 1$ состоит из одного слагаемого. Поэтому при $d \leq y$, воспользовавшись для целых n_1 и n_2 равенством

$$\sum_{n_1 \leq n \leq n_2} e\left(-\frac{tdn}{q}\right) = \frac{\sin \frac{\pi td(n_2 - n_1 + 1)}{q}}{\sin \frac{\pi td}{q}} e\left(-\frac{td(n_1 + n_2)}{2q}\right)$$

и переходя к оценкам и имея виду, что $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$, найдем

$$\begin{aligned} |S| &\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{t=1 \\ (t,q)=1}}^q \left(\sum_{\substack{d \setminus q \\ d \leq y}} \mu^2(d) \left| \sin \frac{\pi t}{q/d} \right|^{-1} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{d \setminus q \\ d \leq y}} \mu^2(d) \sum_{t_1=0}^{d-1} \sum_{\substack{t_2=1 \\ (t_1 q/d + t_2, q)=1}}^{q/d} \left| \sin \frac{\pi t_2}{q/d} \right|^{-1} \\ &+ \frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}} \leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{d \setminus q \\ d \leq y}} d \mu^2(d) S(d) + \frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}}, \quad S(d) = \sum_{t=1}^{q/d-1} \left| \sin \frac{\pi t}{q/d} \right|^{-1}. \end{aligned}$$

Если qd^{-1} — нечетное число, то воспользовавшись последовательно неравенствами $\sin \pi \alpha \geq 2\alpha$ при $0 \leq \alpha \leq 1/2$ и $\frac{1}{t} \leq \ln \frac{2t+1}{2t-1}$, найдем

$$\begin{aligned} S(d) &= 2 \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \left| \sin \frac{\pi t}{qd^{-1}} \right|^{-1} \leq 2 \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \left(\frac{2t}{qd^{-1}} \right)^{-1} = \frac{q}{d} \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \frac{1}{t} \leq \\ &\leq \frac{q}{d} \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} (\ln(2t+1) - \ln(2t-1)) = \frac{q}{d} \ln qd^{-1} \leq \frac{q}{d} \ln q. \end{aligned}$$

Если qd^{-1} — четное число, то

$$\begin{aligned} S(d) &= 2 \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \left| \sin \frac{\pi t}{qd^{-1}} \right|^{-1} + 1 \leq 2 \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \left(\frac{2t}{qd^{-1}} \right)^{-1} + 1 = \frac{q}{d} \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \frac{1}{t} + 1 \leq \\ &\leq \frac{q}{d} \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} (\ln(2t+1) - \ln(2t-1)) + 1 = \frac{q}{d} \ln(qd^{-1} - 1) + 1 \leq \frac{q}{d} \ln q. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|S| \leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{d \setminus q \\ d \leq y}} d \mu^2(d) \cdot \frac{q}{d} \ln q + \frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}} \ll \sqrt{q} \ln q \sum_{d \setminus q} \mu^2(d) = 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Пусть σ — вещественное число, M, N, d и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta, q) = 1$, $N < q^{\frac{7}{12}} d^{-\frac{1}{2}}$, $0,1 \leq \sigma < 0,9$, $d \leq \exp(\ln q^2)^\sigma$, тогда

$$S = \sum_{M < n \leq M+N} \chi_q(nd - \eta) \leq N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценку (12) для суммы S докажем методом математической индукции по N . При $N \leq q^{\frac{1}{3}}$ для правой части оценки (12) справедливо неравенство

$$N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} \geq N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} > N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}} \geq N^{\frac{2}{3}} (N^3)^{\frac{1}{9}} = N$$

то есть в этом случае оценка (12) является тривиальной и её возьмем в качестве базы индукции.

Далее будем считать, что $N > q^{\frac{1}{3}}$. Производя в сумме S сдвиг интервала суммирования на h , $1 \leq h \leq H < N$, получим

$$S = \sum_{M < n \leq M+N} \chi_q((n+h)d - \eta) + \sum_{M < n \leq M+h} \chi_q(nd - \eta) - \sum_{M+N < n \leq M+N+h} \chi_q(nd - \eta).$$

Оценивая две последние суммы, воспользовавшись предположением индукции, имеем

$$S \leq \left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi_q((n+h)d - \eta) \right| + 2H^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}.$$

Полагая в этом неравенстве $h = yz$ и суммируя его по y и z в пределах

$$1 \leq y \leq Y, (y, q) = 1, 1 \leq z \leq Z, (z, q) = 1, Y = \left[0, 5Nq^{-\frac{1}{6}}d\right], Z = \left[0, 5q^{\frac{1}{6}}d^{-1}\right],$$

приходим к неравенству:

$$|S| \leq (Y_q Z_q)^{-1} \left| \sum_{\substack{1 \leq y \leq Y \\ (y, q) = 1}} \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \sum_{M < n \leq M+N} \chi_q((n+yz)d - \eta) \right| + 2(YZ)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}},$$

где Y_q и Z_q — соответственно количества чисел $y \in [1, Y]$ и $z \in [1, Z]$, взаимно простых с числом q . Определяя число y^{-1} из сравнения $yy^{-1} \equiv 1 \pmod{q}$, имеем

$$|S| \leq (Y_q Z_q)^{-1} \left| \sum_{M < n \leq M+N} \sum_{1 \leq y \leq Y} \chi_q(y) \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \chi_q((nd - \eta)y^{-1} + zd) \right| + 2(YZ)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} \\ \leq (Y_q Z_q)^{-1} \sum_{M < n \leq M+N} \sum_{\substack{1 \leq y \leq Y \\ (y, q) = 1}} \left| \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \chi_q((nd - \eta)y^{-1} + zd) \right| + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}.$$

Обозначая в этом неравенстве символом $I(\lambda)$ — число решений сравнения

$$(nd - \eta)y^{-1} \equiv \lambda \pmod{q}, \quad M < n \leq M + N, \quad 1 \leq y \leq Y, \quad (y, q) = 1,$$

получим

$$|S| \leq (Y_q Z_q)^{-1} W(d) + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}, \quad W(d) = \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) \left| \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \chi_q(\lambda + zd) \right|. \quad (13)$$

Возведём обе части этого равенства в куб и воспользуемся неравенством Гёльдера (лемма 1) полагая в нём

$$\nu = \lambda, \quad a_\nu = I(\lambda), \quad b_\nu = \left| \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \chi_q(\lambda + zd) \right|,$$

и тем, что

$$\sum_{\lambda=1}^q I(\lambda) \leq NY_q,$$

будем иметь:

$$W^3(d) \leq (NY_q)^2 \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) \left| \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \chi_q(\lambda + zd) \right|^3.$$

Возведём обе части последнего неравенства в квадрат и воспользуемся неравенством Коши (лемма 1). Будем иметь

$$W^6(d) \leq (NY_q)^4 KV, \quad K = \sum_{\lambda=0}^{q-1} I^2(\lambda), \quad V = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \left| \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \chi_q(\lambda + zd) \right|^6.$$

Пользуясь леммой 6, получим

$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{\substack{z_1, \dots, z_6=1 \\ p(z_1, q)=\dots=(z_6, q)=1}}^Z \chi \left(\frac{(\lambda + z_1 d)(\lambda + z_2 d)(\lambda + z_3 d)}{(\lambda + z_4 d)(\lambda + z_5 d)(\lambda + z_6 d)} \right) \leq \\
 &\leq \sum_{z_1, \dots, z_6=1}^Z \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi \left(\frac{(\lambda + z_1 d)(\lambda + z_2 d)(\lambda + z_3 d)}{(\lambda + z_4 d)(\lambda + z_5 d)(\lambda + z_6 d)} \right) \right| \leq \\
 &\leq \sum_{z_1, \dots, z_6=1}^{Zd} \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi \left(\frac{(\lambda + z_1)(\lambda + z_2)(\lambda + z_3)}{(\lambda + z_4)(\lambda + z_5)(\lambda + z_6)} \right) \right| \leq Z^3 d^3 q^{1+\delta}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$W^6(d) \leq (NY_q)^4 Z^3 d^3 q^{1+\delta} \cdot K. \quad (14)$$

Сумма K равна числу решений сравнения

$$\begin{aligned}
 (nd - \eta)y^{-1} &\equiv (n_1 d - \eta)y_1^{-1} \pmod{q}, \\
 M < n, n_1 &\leq M + N, \quad 1 \leq y, y_1 \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y_1, q) = 1,
 \end{aligned}$$

или сравнения

$$\begin{aligned}
 (nd - \eta)y &\equiv (n_1 d - \eta)y_1 \pmod{q}, \\
 M < n, n_1 &\leq M + N, \quad 1 \leq y, y_1 \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y_1, q) = 1.
 \end{aligned}$$

Для этого сравнения все условия леммы 10 выполняются:

$$\begin{aligned}
 2NY &= 2N \left[0, 5Nq^{-\frac{1}{6}}d \right] \leq N^2 q^{-\frac{1}{6}}d < \left(q^{\frac{7}{12}} d^{-\frac{1}{2}} \right)^2 q^{-\frac{1}{6}}d = q, \\
 \frac{Y}{d} &= \frac{\left[0, 5Nq^{-\frac{1}{6}}d \right]}{d} > \frac{\left[0, 5q^{\frac{1}{6}}d \right]}{d} > 0, 3q^{\frac{1}{6}} > 1.
 \end{aligned}$$

Согласно этой лемме имеем

$$\begin{aligned}
 K &\leq NY + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d} \rho(qd^{-1}, Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d} = \\
 &= \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d} \left(1 + \frac{d}{2(NY)^\delta} + \frac{Y}{N(NY)^\delta} (\rho(qd^{-1}, Y) + 1) \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда с учётом соотношений $d \leq \exp(\ln q^2)^\sigma \leq q^{\frac{\delta}{4}}$, $\rho(qd^{-1}, Y) + 1 \leq \tau(q) \leq q^\delta$, $(NY)^\delta \geq (0, 1 N^2 q^{-\frac{1}{6}}d)^\delta > 0, 1 q^{\frac{\delta}{2}}$, находим

$$K \leq \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d} \left(1 + \frac{5q^{\frac{\delta}{4}}}{q^{\frac{\delta}{2}}} + \frac{10q^\delta}{q^{\frac{1}{6} + \frac{\delta}{2}}} \right) \leq \frac{3(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Подставляя эту оценку в (14), а затем правую часть полученной формулы в (13), последовательно получим

$$\begin{aligned} W^6(d) &\leq (NY_q)^4 Z^3 d^3 q^{1+\delta} \cdot K \leq 3qN^5 Y Y_q^4 Z^3 d^2 (qNY)^\delta, \\ |S| &\leq (Y_q Z_q)^{-1} W(d) + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{-\frac{1}{6}} \leq \\ &\leq \frac{3^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{6}} N^{\frac{5}{6}} Y^{\frac{1}{6}} Z^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{3}} (qNY)^{\frac{\delta}{6}}}{Y_q^{\frac{1}{3}} Z_q} + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее воспользовавшись леммой 7 и известными неравенствами

$$\omega(q) \leq \frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}, \quad \frac{\varphi(q)}{2q} \leq \frac{c_\varphi}{\ln \ln q},$$

где c_ω и c_φ — абсолютные постоянные, найдем

$$\begin{aligned} \left| Y_q - \frac{\varphi(q)}{q} Y \right| &\leq 2^{\omega(q)} \leq 2^{\frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}} = q^{\frac{c_\omega \ln 2}{\ln \ln q}} < \frac{\varphi(q)}{2q} q^{\frac{1}{7}} < \frac{\varphi(q)}{2q} [0, 5Nq^{-\frac{1}{6}}] = \frac{\varphi(q)}{2q} Y, \\ \left| Z_q - \frac{\varphi(q)}{q} Z \right| &\leq 2^{\omega(q)} \leq 2^{\frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}} = q^{\frac{c_\omega \ln 2}{\ln \ln q}} < \frac{\varphi(q)}{2q} q^{\frac{1}{7}} < \frac{\varphi(q)}{2q} [0, 5q^{\frac{1}{6}}] = \frac{\varphi(q)}{2q} Z, \end{aligned}$$

то есть

$$Y_q > \frac{\varphi(q)}{2q} Y \geq \frac{c_\varphi Y}{\ln \ln q}, \quad Z_q > \frac{\varphi(q)}{2q} Z \geq \frac{c_\varphi Z}{\ln \ln q}.$$

Пользуясь этими неравенствами в (15), параметры Y_q и Z_q выразим соответственно через Y и Z . Имеем

$$|S| \leq \frac{3^{\frac{1}{6}}}{c_\varphi^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{q^{\frac{1}{6}} N^{\frac{5}{6}} d^{\frac{1}{3}} (qNY)^{\frac{\delta}{6}} \ln^{\frac{4}{3}} \ln q}{Y^{\frac{1}{6}} Z^{\frac{1}{2}}} + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}.$$

Далее имея ввиду, что $Y = [0, 5Nq^{-\frac{1}{6}}d]$, $Z = [0, 5q^{\frac{1}{6}}d^{-1}]$ и $N < q^{\frac{7}{12}}$, найдем $(0, 5^{-2/3+\delta/6} = 2^{2/3-\delta/6} < 2)$

$$\begin{aligned} |S| &\leq \frac{2 \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{c_\varphi^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{q^{\frac{1}{6}} N^{\frac{5}{6}} d^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} \left(q^{1-\frac{1}{6}} N^2 d \right)^{\frac{\delta}{6}} \ln^{\frac{4}{3}} \ln q}{N^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{12}-\frac{1}{36}}} + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} = \\ &= \frac{2 \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{c_\varphi^{\frac{4}{3}}} \cdot q^{\frac{1}{9}} N^{\frac{2}{3}} d^{\frac{2}{3}} \left(q^{\frac{5}{6}} N^2 d \right)^{\frac{\delta}{6}} \ln^{\frac{4}{3}} \ln q + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} \leq \\ &\leq \frac{2 \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{c_\varphi^{\frac{4}{3}}} \cdot N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}} d^{\frac{2}{3}} q^{\frac{\delta}{3}} \ln^{\frac{4}{3}} \ln q + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} = \\ &= \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{6}} c_\varphi^{-\frac{4}{3}} q^{-\frac{\delta}{6}} \ln^{\frac{4}{3}} \ln q + 2^{-\frac{1}{3}} \right) N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} \leq N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Пусть $(\eta, q) = 1$, $y \geq q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$, $0, 1 \leq \sigma < 0, 9$, тогда

$$S = \sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ (n, q)=1}} \chi_q(n - \eta) \ll y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $q^{\frac{7}{12}} < y \leq 0, 5q$. Воспользовавшись леммой 11 и известным неравенством

$$\omega(q) \leq \frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q},$$

где c_ω — абсолютная постоянная, имеем равенство:

$$\begin{aligned} S &\leq 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{q} \cdot \exp\left(\frac{c_\omega \ln 2 \cdot \ln q}{\ln \ln q} + 2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q + \ln \ln q\right)}{y} \cdot y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{q} \cdot \exp\left(\frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}\right)}{y} \cdot y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q). \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что $y > q^{\frac{7}{12}} > \sqrt{q} \cdot \exp\left(\frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}\right)$, находим

$$S \ll y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q)$$

Пусть теперь $q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta} \leq y \leq q^{\frac{7}{12}}$. Имеем равенство:

$$S = \sum_{x-y < n \leq x} \chi_q(n - \eta) \sum_{d \mid (n, q)} \mu(d) = \sum_{d \mid q} \mu(d) S(d), \quad S(d) = \sum_{x-y < nd \leq x} \chi_q(nd - \eta).$$

Разбивая сумму S на две части, имеем

$$S = S_1 + S_2, \quad S_1 = \sum_{\substack{d \mid q \\ d \leq \exp(\ln q^2)^\sigma}} \mu(d) S(d), \quad S_2 = \sum_{\substack{d \mid q \\ \exp(\ln q^2)^\sigma < d \leq x}} \mu(d) S(d).$$

Для оценки суммы S_2 воспользуемся тривиальной оценкой суммы $S(d)$ и леммой 9. Имеем

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \sum_{\substack{d \mid q \\ \exp(\ln q^2)^\sigma < d \leq x}} \mu^2(d) \left(\frac{y}{d} + 1\right) \ll y \sum_{\substack{d \mid q \\ \exp(\ln q^2)^\sigma < d \leq x}} \frac{\mu^2(d)}{d} + \tau(q) \ll \\ &\ll y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q) + q^\delta \ll y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q). \end{aligned}$$

Оценим теперь S_1 . Для этого оценим $S(d)$, воспользовавшись леммой 12 при

$$M = \left\lfloor \frac{x-y}{d} \right\rfloor, \quad N = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x-y}{d} \right\rfloor \ll \frac{y}{d},$$

имеем

$$S(d) \ll \left(\frac{y}{d}\right)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_1 &\ll \sum_{\substack{d \setminus q \\ d \leq \exp(\ln q^2)^\sigma}} \mu^2(d) |S(d)| \ll y^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} \sum_{\substack{d \setminus q \\ d \leq \exp(\ln q^2)^\sigma}} \mu^2(d) \ll y^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} 2^{\omega(q)} \leq \\ &\leq y^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} \exp\left(\frac{c_\omega \ln 2 \ln q}{\ln \ln q}\right) \leq \\ &\leq y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q) \cdot \left(\frac{q^{\frac{1}{3} + \frac{3\delta}{2}} \cdot \exp\left(\frac{c_\omega \ln 2 \ln q}{\ln \ln q} + 3\sigma 2^{\sigma-1} \ln^\sigma q\right)}{y}\right)^{\frac{1}{3}} < \\ &< y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q) \cdot \left(\frac{q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \leq y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q). \end{aligned}$$

Лемма доказана и из этой леммы при $\sigma = 0, 6$ следует:

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $(\eta, q) = 1$, $y < x$ и $y \geq q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$, тогда

$$\sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ (n, q)=1}} \chi_q(n - \eta) \ll y \exp(-1, 5\sqrt{\ln q}).$$

4. Оценка двойных сумм значений характеров

ЛЕММА 14. Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta, q) = 1$, $M' \leq 2M$, $N' \leq 2N \leq q^{\frac{1}{6}}$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M < m \leq M'} |a_m|^\alpha \ll M \mathcal{L}^{c_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \quad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$W = \sum_{M < m \leq M'} a_m \sum_{\substack{N' < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q)=1}} b_n \chi(mn - l) \ll BM^{\frac{5}{6}} N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\delta} \mathcal{L}^{\frac{4c_1 + c_2 + 1}{6}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что выполняется условие $MN < x$. Определяя m_q^{-1} из сравнения $mm_q^{-1} \equiv 1 \pmod{q}$ и затем переходя к оценкам, находим

$$|W| \leq \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m, q)=1}} |a_m| |S(m)|, \quad S(m) = \sum_{\substack{N' < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (n, q)=1}} b_n \chi(n - lm_q^{-1}).$$

Сумму $S(m)$ преобразуем в другую так, чтобы интервал суммирования внутренней суммы не зависел от m . Имеем равенство

$$S(m) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - l m_q^{-1}) \sum_{N' < r \leq \min(xm^{-1}, 2N)} e\left(\frac{k(n-r)}{q}\right).$$

Далее обозначая $N'' = \min([xm^{-1}], 2N)$, выделяя слагаемое с $k = 0$ и суммируя затем по r , получаем:

$$\begin{aligned} S(m) &= \frac{N'' - N}{q} \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - l m_q^{-1}) + \\ &+ \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\sin \frac{\pi k(N'' - N)}{q}}{\sin \frac{\pi k}{q}} e\left(-\frac{k(N'' + 1 + N)}{2q}\right) \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - l m_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right). \end{aligned}$$

Переходя к неравенствам, имеем:

$$\begin{aligned} S(m) &\ll \frac{N}{q} \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - l m_q^{-1}) \right| + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k} \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - l m_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right| \ll \\ &\ll \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k+1} \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - l m_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|W| \leq \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k+1} W(k), \quad W(k) = \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m,q)=1}} |a_m| \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - l m_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|.$$

Оценим $W(k)$. Возводя обе части этого равенства в куб, воспользовавшись неравенством Гёльдера (лемма 1) и определением числа c_1 , получим

$$\begin{aligned} W^3(k) &\leq \left(\sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m,q)=1}} |a_m| \right)^2 \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m,q)=1}} |a_m| \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - l m_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|^3 \leq \\ &\leq (M \mathcal{L}^{c_1})^2 \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m,q)=1}} |a_m| \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - l m_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|^3. \end{aligned}$$

Возводя обе части последнего неравенства в квадрат и воспользовавшись неравенством Коши (лемма 1) и определением числа c_2 , имеем

$$\begin{aligned}
W^6(k) &\leq (M\mathcal{L}^{c_1})^4 \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m,q)=1}} |a_m|^2 \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m,q)=1}} \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - lm_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|^6 \ll \\
&\ll M^5 \mathcal{L}^{4c_1+c_2} \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m,q)=1}} \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n - lm_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|^6 \leq \\
&\leq M^5 \mathcal{L}^{4c_1+c_2} \sum_{\lambda=0}^{q-1} \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(n + \lambda) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|^6 = M^5 \mathcal{L}^{4c_1+c_2} \times \\
&\times \sum_{\substack{N' < n_1, \dots, n_6 \leq 2N \\ (n_1 \dots n_6, q)=1}} b_{n_1} \dots b_{n_6} e\left(\frac{a(n_1 + \dots + n_6)}{q}\right) \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda + n_1)(\lambda + n_2)(\lambda + n_3)}{(\lambda + n_4)(\lambda + n_5)(\lambda + n_6)}\right).
\end{aligned}$$

Далее воспользовавшись неравенством $|b_n| \ll B$, затем леммой 6, найдем

$$\begin{aligned}
W^6(k) &\leq M^5 \mathcal{L}^{4c_1+c_2} B^6 \sum_{1 \leq n_1, \dots, n_6 \leq 2N} \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda + n_1)(\lambda + n_2)(\lambda + n_3)}{(\lambda + n_4)(\lambda + n_5)(\lambda + n_6)}\right) \right| \ll \\
&\ll M^5 \mathcal{L}^{4c_1+c_2} B^6 \cdot N^3 q^{1+\delta} = B^6 M^5 N^3 q^{1+\delta} \mathcal{L}^{4c_1+c_2}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta, q) = 1$, $M' \leq 2M$, $N' \leq 2N$, $q^\theta < N \leq q^{\frac{1}{6}}$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau_5(m)$, $|b_n| \leq 1$. Тогда при $x \geq q^{1-2\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка

$$W = \sum_{M < m \leq M'} a_m \sum_{\substack{N' < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q)=1}} b_n \chi(mn - l) \ll x \exp(-1, 5\sqrt{\ln q}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно леммы 8, имея в виду, что $\ln M \ll \mathcal{L}$, найдём

$$\sum_{M < m \leq M'} \tau_5(m) \ll M \mathcal{L}^4, \quad \sum_{M < m \leq M'} \tau_5^2(m) \ll M \mathcal{L}^{24}.$$

Из леммы 14 при $c_1 = 4$, $c_2 = 24$, воспользовавшись условием $MN \leq x$, $N \geq q^\theta$

и $x \geq q^{1-2\theta+1,1\delta}$, найдем

$$\begin{aligned} W &\ll (MN)^{\frac{5}{6}} N^{-\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta} \mathcal{L}^{\frac{41}{6}} \leq x^{\frac{5}{6}} N^{-\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta} \mathcal{L}^{\frac{41}{6}} = x \left(\frac{N^{-2} q^{1+\delta} \mathcal{L}^{41}}{x} \right)^{\frac{1}{6}} \leq \\ &\leq x \left(\frac{q^{1-2\theta+\delta} \mathcal{L}^{41}}{x} \right)^{\frac{1}{6}} < x \left(\frac{q^{1-2\theta+1,1\delta} \exp(-9\sqrt{\ln q})}{x} \right)^{\frac{1}{6}} \leq x \exp(-1,5\sqrt{\ln q}). \end{aligned}$$

ЛЕММА 15. Пусть M, M', N, N' и η — целые числа удовлетворяющим условиям $(\eta, q) = 1$, $M' \leq 2M$, $N' \leq 2N$, a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M < m \leq M'} |a_m|^\alpha \ll M \mathcal{L}^{c_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \quad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$W = \sum_{M < m \leq M'} a_m \sum_{\substack{N' < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q) = 1}} b_n \chi(mn - l) \ll B \left(M^{\frac{3}{4}} N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{4}} + M^{\frac{3}{4}} N q^{\frac{1}{8}} \right) \mathcal{L}^{\frac{2c_1+c_2+1}{4}} q^{\frac{1}{4}\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что выполняется условие $MN < x$. Поступая аналогично предыдущей лемме, находим

$$|W| \ll \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k+1} W(k), \quad W(k) = \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m, q) = 1}} |a_m| \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n, q) = 1}} b_n \chi_q(n - lm_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|.$$

Оценим $W(k)$. Возведём обе части этого равенства в квадрат и воспользуемся неравенством Гёльдера (лемма 1):

$$\begin{aligned} W^2(k) &\leq \left(\sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m, q) = 1}} |a_m| \right) \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m, q) = 1}} |a_m| \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n, q) = 1}} b_n \chi_q(n - lm_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|^2 \leq \\ &\leq M \mathcal{L}^{c_1} \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m, q) = 1}} |a_m| \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n, q) = 1}} b_n \chi_q(n - lm_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|^2. \end{aligned}$$

Возведём обе части последнего неравенства в квадрат и воспользуемся нера-

венством Коши (лемма 1):

$$\begin{aligned}
W^4(k) &\leq M^2 \mathcal{L}^{2c_1} \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m, q) = 1}} |a_m|^2 \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m, q) = 1}} \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n, q) = 1}} b_n \chi_q(n - lm_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|^4 \ll \\
&\ll M^3 \mathcal{L}^{2c_1+c_2} \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ (m, q) = 1}} \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n, q) = 1}} b_n \chi_q(n - lm_q^{-1}) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|^4 \leq \\
&\leq M^3 \mathcal{L}^{2c_1+c_2} \sum_{\lambda=0}^{q-1} \left| \sum_{\substack{N' < n \leq 2N \\ (n, q) = 1}} b_n \chi_q(n + \lambda) e\left(\frac{kn}{q}\right) \right|^4 = \\
&= M^3 \mathcal{L}^{2c_1+c_2} \sum_{\substack{N' < n_1, \dots, n_4 \leq 2N \\ (n_1 \dots n_4, q) = 1}} b_{n_1} \dots b_{n_4} e\left(\frac{k(n_1 + \dots + n_4)}{q}\right) \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda + n_1)(\lambda + n_2)}{(\lambda + n_3)(\lambda + n_4)}\right).
\end{aligned}$$

Далее воспользовавшись неравенством $|b_n| \ll B$, затем леммой 5, найдем

$$\begin{aligned}
W^4(k) &\ll M^3 \mathcal{L}^{2c_1+c_2} B^4 \sum_{1 \leq n_1, \dots, n_4 \leq 2N} \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda + n_1)(\lambda + n_2)}{(\lambda + n_3)(\lambda + n_4)}\right) \right| \ll \\
&\ll M^3 \mathcal{L}^{2c_1+c_2} B^4 \left(N^2 q + N^4 q^{\frac{1}{2}+\delta}\right) \ll B^4 \left(M^3 N^2 q + M^3 N^4 q^{\frac{1}{2}}\right) q^\delta \mathcal{L}^{2c_1+c_2}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta, q) = 1$, $M' \leq 2M$, $N' \leq 2N$, $q^{\frac{1}{4}-\theta} \leq N \leq q^{\frac{1}{4}+\theta}$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau_5(m)$, $|b_n| \leq 1$. Тогда при $x \geq q^{\frac{3}{4}+\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка

$$W = \sum_{M < m \leq M'} a_m \sum_{\substack{N' < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q) = 1}} b_n \chi(mn - l) \ll x \exp\left(-1, 5\sqrt{\ln q}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно леммы 8, имея в виду, что $\ln M \ll \mathcal{L}$, найдем

$$\sum_{M < m \leq M'} \tau_5(m) \ll M \mathcal{L}^4, \quad \sum_{M < m \leq M'} \tau_5^2(m) \ll M \mathcal{L}^{24}.$$

Из леммы 15 при $c_1 = 4$, $c_2 = 24$, воспользовавшись условиями $M \leq xN^{-1}$, $q^{\frac{1}{4}-\theta} \leq N \leq q^{\frac{1}{4}+\theta}$ и $x \geq q^{\frac{3}{4}+\theta+1,1\delta}$, найдем

$$\begin{aligned}
W &\ll \left(M^{\frac{3}{4}} N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{4}} + M^{\frac{3}{4}} N q^{\frac{1}{8}}\right) \mathcal{L}^{\frac{33}{4}} q^{\frac{1}{4}\delta} \leq x^{\frac{3}{4}} \left(N^{-\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}} + N^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{8}}\right) \mathcal{L}^{\frac{33}{4}} q^{\frac{1}{4}\delta} \ll \\
&\ll x \left(\frac{qN^{-1}}{x} + \frac{Nq^{\frac{1}{2}}}{x}\right)^{\frac{1}{4}} \mathcal{L}^{\frac{33}{4}} q^{\frac{1}{4}\delta} \leq x \left(\frac{2q^{\frac{3}{4}+\theta}}{x}\right)^{\frac{1}{4}} \mathcal{L}^{\frac{33}{4}} q^{\frac{1}{4}\delta} \ll x \exp\left(-1, 5\sqrt{\ln q}\right).
\end{aligned}$$

5. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим сумму

$$T(\chi_q) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi_q(n-l).$$

В сумме $T(\chi_q)$ вклад слагаемых с условием $(n, q) > 1$ является величиной, модуль которой не превосходит $\ll \mathcal{L}^2$. Поэтому

$$T(\chi_q) = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q)=1}} \Lambda(n) \chi_q(n-l) + O(\mathcal{L}^2).$$

В лемме 2 возьмём $r = 3$, $u_1 = x^{\frac{1}{3}}$ и

$$f(n) = \begin{cases} \chi_q(n-l), & \text{при } (n, q) = 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем

$$T(\chi_q) = \sum_{k=1}^3 (-1)^k C_3^k T_k(\chi_q), \quad (16)$$

$$T_k(\chi_q) = \sum_{\substack{m_1 \leq u_1 \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leq x, \\ (m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k, q)=1}} \mu(m_1) \cdots \sum_{m_k \leq u_1} \mu(m_k) \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_k} \ln n_1 \chi_q(m_1 n_1 \cdots m_k n_k - l),$$

Разобьём в $T_k(\chi_q)$ области изменения каждого $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k$ на не более $\mathcal{L}$ интервалов вида $M_j < m_j \leq 2M_j$, $N_j < n_j \leq 2N_j$, $j = 1, 2, \dots, k$. Получим

$$T_k(\chi_q) = \sum_{\mathcal{L}^{2k}} \hat{T}_k(\chi_q, M, N), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_k(\chi_q, M, N) &= \\ &= \sum_{\substack{M_1 < m_1 \leq 2M_1 \\ M_k < m_k \leq 2M_k \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leq x, \\ (m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k, q)=1}} \mu(m_1) \cdots \sum_{\substack{M_k < m_k \leq 2M_k \\ N_1 < n_1 \leq 2N_1 \\ N_k < n_k \leq 2N_k}} \mu(m_k) \sum_{N_1 < n_1 \leq 2N_1} \cdots \sum_{N_k < n_k \leq 2N_k} \chi_q(m_1 n_1 \cdots m_k n_k - l) \ln n_1 = \\ &= \sum_{\substack{M_1 < m_1 \leq 2M_1 \\ M_k < m_k \leq 2M_k \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leq x, \\ (m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k, q)=1}} \mu(m_1) \cdots \sum_{\substack{M_k < m_k \leq 2M_k \\ N_1 < n_1 \leq 2N_1 \\ N_k < n_k \leq 2N_k}} \mu(m_k) \sum_{N_1 < n_1 \leq 2N_1} \cdots \sum_{N_k < n_k \leq 2N_k} \chi_q(m_1 n_1 \cdots m_k n_k - l) \int_1^{n_1} \frac{dv}{v} = \\ &= \int_1^{2N_1} \sum_{\substack{M_1 < m_1 \leq 2M_1 \\ M_k < m_k \leq 2M_k \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leq x, \\ (m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k, q)=1}} \mu(m_1) \cdots \sum_{\substack{M_k < m_k \leq 2M_k \\ \max(u, N_1) < n_1 \leq 2N_1 \\ N_k < n_k \leq 2N_k}} \mu(m_k) \sum_{\substack{N_1 < n_1 \leq 2N_1 \\ N_k < n_k \leq 2N_k}} \chi_q(m_1 n_1 \cdots m_k n_k - l) d \ln u. \end{aligned}$$

Через $U_1 = \max(u, N_1)$ обозначим такое число u , при котором модуль подынтегральной функции принимает максимальное значение, тогда

$$|\hat{T}_k(\chi_q, M, N)| \ll \mathcal{L} |T_k(\chi_q, M, N)|, \quad (18)$$

где

$$T_k(\chi_q, M, N) = \sum_{\substack{M_1 < m_1 \leq 2M_1 \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leq x, \\ (m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k, q) = 1}} \mu(m_1) \cdots \sum_{\substack{M_k < m_k \leq 2M_k \\ (m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k, q) = 1}} \mu(m_k) \sum_{\substack{U_1 < n_1 \leq 2N_1 \\ U_k < n_k \leq 2N_k}} \cdots \sum \chi_q(m_1 n_1 \cdots m_k n_k - l),$$

$$N_j \leq U_j < 2N_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Подставляя (18) в (17), а затем и (16), получим

$$T(\chi_q) \ll \mathcal{L}^6 \sum_{k=1}^3 \max |T_k(\chi_q, M, N)|, \quad (19)$$

Вводим следующие обозначения:

$$\prod_{j=1}^k M_j N_j = Y, \quad \prod_{j=1}^k M_j U_j = X, \quad Y < X \leq x, \quad M_j \leq x^{\frac{1}{3}}$$

и будем предполагать далее, что

$$Y \geq x \exp\left(-0, 7\sqrt{\ln q}\right), \quad (20)$$

так как в противном случае, оценивая $T_k(\chi_q, M, N)$ тривиально, будем иметь

$$\begin{aligned} T_k(\chi_q, M, N) &\ll \sum_{X < n \leq 2^k Y} \tau_{2k}(n) \ll 2^k Y \mathcal{L}^{2k-1} \ll \\ &\ll x 2^k \mathcal{L}^{2k-1} \exp\left(-0, 7\sqrt{\ln q}\right) \ll x \exp\left(-0, 6\sqrt{\ln q}\right). \end{aligned}$$

Оценим $T_k(\chi_q, M, N)$ отдельно для каждого $k = 1, 2, 3$ и не ограничивая общности, будем считать, что выполняются условия:

$$M_1 \geq M_2 \geq \cdots \geq M_k, \quad N_1 \geq N_2 \geq \cdots \geq N_k. \quad (21)$$

Оценка $T_3(\chi_q, M, N)$. Рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра N_1 :

1. $N_1 \geq q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$; 2. $q^{\frac{1}{6}} \leq N_1 < q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$; 3. $q^{\frac{1}{12}} \leq N_1 < q^{\frac{1}{6}}$; 4. $N_1 < q^{\frac{1}{12}}$;

Для рассмотрений случаев 1, 2 и 3 сумму $T_3(\chi_q, M, N)$ несколько преобразуем. Для этого введём обозначения:

$$\tau'_5(h) = \sum_{M_1 < m_1 \leq 2M_1} \mu(m_1) \sum_{M_2 < m_2 \leq 2M_2} \mu(m_2) \sum_{\substack{M_3 < m_3 \leq 2M_3 \\ m_1 m_2 m_3 n_2 n_3 = h}} \mu(m_3) \sum_{U_2 < n_2 \leq 2N_2} \sum_{U_3 < n_3 \leq 2N_3} 1, \quad |\tau'_5(h)| \leq \tau_5(h).$$

Тогда сумма $T_3(\chi_q, M, N)$ запишется так:

$$T_3(\chi_q, M, N) = \sum_{XU_1^{-1} < h \leq 2^5 Y N_1^{-1}} \tau'_5(h) \sum_{\substack{U_1 < n \leq 2N_1 \\ hn \leq x, (hn, q) = 1}} \chi_q(hn - l), \quad XU_1^{-1} \geq Y N_1^{-1}.$$

В сумме $T_3(\chi_q, M, N)$ интервал суммирования $XU_1^{-1} < h \leq 2^5 Y N_1^{-1}$ разобьём на интервалы вида $H < h \leq H_1$, где $H_1 \leq 2H$. Получим на не более пяти сумм вида

$$T_3(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H < h \leq H_1} \tau'_5(h) \sum_{\substack{U_1 < n \leq \min(xh^{-1}, 2N_1) \\ (hn, q)=1}} \chi_q(hn - l). \quad (22)$$

Случай 1. $N_1 \geq q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$. Определяя h_q^{-1} из сравнения $hh_q^{-1} \equiv 1 \pmod{q}$, найдём

$$T_3(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H < h \leq H_1} \tau'_5(h) \chi_q(h) \sum_{\substack{U_1 < n \leq \min(xh^{-1}, 2N_1) \\ (n, q)=1}} \chi_q(n - lh_q^{-1}).$$

Переходя к оценке, находим

$$|T_3(\chi_q, M, N, H)| \leq \sum_{\substack{H < h \leq H_1 \\ (h, q)=1}} \tau_5(h) \left| \sum_{\substack{U_1 < n \leq \min(xh^{-1}, 2N_1) \\ (n, q)=1}} \chi_q(n - lh_q^{-1}) \right|.$$

Применяя к сумме по n следствие 1 при $\eta = lh_q^{-1}$, $x = \min(xh^{-1}, 2N_1)$, $y = \min(xh^{-1}, 2N_1) - U_1 \leq 2N_1$, имеем

$$\begin{aligned} T_3(\chi_q, M, N) &\ll \sum_{\substack{H < h \leq H_1 \\ (h, q)=1}} \tau_5(h) N_1 \exp\left(-2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln q}\right) \ll \\ &\ll H_1 \mathcal{L}^4 N_1 \exp\left(-2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln q}\right) \ll \\ &\ll N_1 \exp\left(-2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln q}\right) Y N_1^{-1} \mathcal{L}^4 \ll x \exp\left(-0,7 \sqrt{\ln q}\right). \end{aligned}$$

Случай 2. $q^{\frac{1}{6}} \leq N_1 < q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$. Воспользуемся следствием 3 леммы 15 при

$$M = H, \quad M' = H_1, \quad N' = U_1, \quad N = N_1, \quad \theta = \frac{1}{12} + \frac{8}{5}\delta.$$

Тогда при $x \geq q^{\frac{3}{4} + \theta + 1,1\delta} = q^{\frac{5}{6} + \frac{27}{10}\delta}$ имеем

$$T_3(\chi_q, M, N, H) \ll x \exp\left(-0,7 \sqrt{\ln q}\right).$$

Случай 3. $q^{\frac{1}{12}} \leq N_1 < q^{\frac{1}{6}}$. Для суммы $T_3(\chi_q, M, N, H)$ вида (22), при

$$M = H, \quad M' = H_1, \quad N' = U_1, \quad N = N_1, \quad \theta = \frac{1}{12}$$

выполняются условия следствия 2.

Согласно этому следствию, при $x \geq q^{1-2\theta+1,1\delta} = q^{\frac{5}{6}+1,1\delta}$, получим

$$T_3(\chi_q, M, N, H) \ll x \exp\left(-0, 7\sqrt{\ln q}\right).$$

Случай 4. $N_1 < q^{\frac{1}{12}}$. Сумму $T_3(\chi_q, M, N)$ преобразуем, для этого вводя обозначения:

$$\tau_5''(h) = \sum_{M_2 < m_2 \leq 2M_2} \mu(m_2) \sum_{M_3 < m_3 \leq 2M_3} \mu(m_3) \sum_{\substack{U_1 < n_1 \leq 2N_1 \\ m_2 m_3 n_1 n_2 n_3 = h}} \sum_{U_2 < n_2 \leq 2N_2} \sum_{U_3 < n_3 \leq 2N_3} 1, \quad |\tau_5''(h)| \leq \tau_5(h),$$

запишем её в виде:

$$T_3(\chi_q, M, N) = \sum_{XM_1^{-1} < h \leq 2^5 Y M_1^{-1}} \tau_5''(h) \sum_{\substack{M_1 < m \leq 2M_1 \\ hm \leq x, (hm, q) = 1}} \mu(m) \chi_q(hm - l).$$

Разобьём интервал суммирования $XM_1^{-1} < h \leq 2^5 Y M_1^{-1}$ на интервалы вида $H < h \leq H_1$, где $H_1 \leq 2H$. Получим не более пяти сумм вида

$$T_3(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H < h \leq H_1} \tau_5''(h) \sum_{\substack{M_1 < n \leq \min(xh^{-1}, 2M_1) \\ (hm, q) = 1}} \mu(m) \chi_q(hm - l).$$

Воспользовавшись соотношениями (21), (20) и условиями рассматриваемого случая, имеем

$$\begin{aligned} M_1 &\geq (M_1 M_2 M_3)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{Y}{N_1 N_2 N_3} \right)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{Y^{\frac{1}{3}}}{N_1} \geq \frac{(x \exp(-0, 6\sqrt{\ln q}))^{\frac{1}{3}}}{N_1} \geq \\ &\geq \frac{q^{\frac{5}{18} + \frac{9}{10}\delta} \exp(-0, 2\sqrt{\ln q})}{q^{\frac{1}{12}}} > q^{\frac{7}{36}}, \quad M_1 \leq x^{\frac{1}{3}} < q^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $M = H$, $M' = H_1$, $N' = M_1$, $N = M_1$, $\theta = \frac{1}{12}$ для суммы $T_3(\chi_q, M, N, H)$ выполняются условия следствия 3. Согласно этому следствию, при $x \geq q^{\frac{3}{4} + \theta + 1,1\delta} = q^{\frac{5}{6} + 1,1\delta}$ получим

$$T_3(\chi_q, M, N, H) \ll x \exp\left(-0, 7\sqrt{\ln q}\right).$$

Оценка $T_2(\chi_q, M, N)$. Вводя обозначение:

$$\tau_3'(h) = \sum_{M_1 < m_1 \leq 2M_1} \mu(m_1) \sum_{\substack{M_2 < m_2 \leq 2M_2 \\ m_1 m_2 n_2 = h}} \mu(m_2) \sum_{U_2 < n_2 \leq 2N_2} 1, \quad |\tau_3'(h)| \leq \tau_3(h),$$

сумму $T_2(\chi_q, M, N)$ запишем в виде

$$T_2(\chi_q, M, N) = \sum_{XU_1^{-1} < h \leq 2^5 Y N_1^{-1}} \tau_3'(h) \sum_{\substack{U_1 < n \leq 2N_1 \\ hn \leq x, (hn, q) = 1}} \chi_q(hn - l), \quad XU_1^{-1} \geq YN_1^{-1}.$$

Разобьём в сумме $T_2(\chi_q, M, N)$ интервал суммирования $XU_1^{-1} < h \leq 2^5 Y N_1^{-1}$ на интервалы вида $H < h \leq H_1$, где $H_1 \leq 2H$. Получим на не более пяти сумм вида

$$T_2(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H < h \leq H_1} \tau'_3(h) \sum_{\substack{U_1 < n \leq \min(xh^{-1}, 2N_1) \\ (hn, q)=1}} \chi_q(hn - l).$$

Случай 1. $N_1 \geq q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$. Определяя h_q^{-1} из сравнения $hh_q^{-1} \equiv 1 \pmod{q}$, найдем

$$T_2(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H < h \leq H_1} \tau'_3(h) \chi_q(h) \sum_{\substack{U_1 < n \leq \min(xh^{-1}, 2N_1) \\ (n, q)=1}} \chi_q(n - lh_q^{-1}).$$

Переходя к оценке и применяя к сумме по n следствие 1 при $x = \min(xh^{-1}, 2N_1)$, $y = \min(xh^{-1}, 2N_1) - U_1 \leq 2N_1$, $\eta = lh_q^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned} T_2(\chi_q, M, N, H) &\ll \sum_{\substack{H < h \leq H_1 \\ (h, q)=1}} \tau_3(h) N_1 \exp\left(-2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln q}\right) \ll \\ &\ll H_1 \mathcal{L}^3 N_1 \exp\left(-2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln q}\right) \ll \\ &\ll Y N_1^{-1} \mathcal{L}^3 N_1 \exp\left(-2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln q}\right) \ll x \exp\left(-0,7 \sqrt{\ln q}\right). \end{aligned}$$

Случай 2. $q^{\frac{1}{6}} \leq N_1 < q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$. Воспользуемся следствием 3 при $M = H$, $M' = H_1$, $N' = U_1$, $N = N_1$, $\theta = \frac{1}{12} + \frac{8}{5}\delta$, тогда при $x \geq q^{\frac{3}{4} + \frac{1}{12} + \frac{8}{5}\delta + 1,1\delta} = q^{\frac{5}{6} + \frac{27}{10}\delta}$ имеем

$$T_2(\chi_q, M, N, H) \ll x \exp\left(-0,7 \sqrt{\ln q}\right).$$

Случай 3. $N_1 < q^{\frac{1}{6}}$. Воспользовавшись соотношениями (21), (20) и условиями рассматриваемого случая, имеем

$$\begin{aligned} N_1 &\geq (N_1 N_2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{Y}{M_1 M_2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{Y^{\frac{1}{2}}}{M_1} \geq \frac{(x \exp(-0,6 \sqrt{\ln q}))^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \\ &= x^{\frac{1}{6}} \exp\left(-0,3 \sqrt{\ln q}\right) \geq q^{\frac{5}{36} + \frac{9}{20}\delta} \exp\left(-0,3 \sqrt{\ln q}\right) > q^{\frac{5}{36}} > q^{\frac{1}{12}}. \end{aligned}$$

Для суммы $T_2(\chi_q, M, N, H)$ при $M = H$, $M' = H_1$, $N' = U_1$, $N = N_1$, $\theta = \frac{1}{12}$, выполняются условия следствия 2. Согласно этому следствию при $x \geq q^{\frac{3}{4} + \frac{1}{12} + 1,1\delta} = q^{\frac{5}{6} + 1,1\delta}$, получим

$$T_2(\chi_q, M, N, H) \ll x \exp\left(-0,7 \sqrt{\ln q}\right).$$

Оценка $T_1(\chi_q, M, N)$. Определяя m_q^{-1} из сравнения $mm_q^{-1} \equiv 1 \pmod{q}$, найдем

$$T_1(\chi_q, M, N) = \sum_{M < m_1 \leq 2M_1} \mu(m_1) \chi_q(m_1) \sum_{\substack{U_1 < n \leq \min(xm^{-1}, 2N_1) \\ (n, q)=1}} \chi_q(n - lm_q^{-1}).$$

Из соотношений (21), (20) и условий рассматриваемого случая имеем

$$N_1 \geq \frac{Y}{M_1} \geq \frac{x \exp(-0,6\sqrt{\ln q})}{x^{\frac{1}{3}}} \geq q^{\frac{5}{9}+\frac{9}{5}\delta} \exp(-0,6\sqrt{\ln q}) > q^{\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\delta}.$$

Воспользовавшись этим неравенством, применим к внутренней сумме по n следствие 1 при $x = \min(xm^{-1}, 2N_1)$, $y = \min(xm_q^{-1}, 2N_1) - U_1 \leq 2N_1$, $\eta = lm_q^{-1}$. Имеем

$$T_1(\chi_q, M, N) \ll M_1 N_1 \exp\left(-2^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\ln q}\right) \ll x \exp\left(-0,7\sqrt{\ln q}\right).$$

Из полученных оценок $T_k(\chi_q, M, N)$, $k = 1, 2, 3$, ввиду (19), получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p + k$ по простому модулю // Математический сборник. 1938. Т. 3, №45. С. 311 – 320.
2. Виноградов И. М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Сер. Мат. 1943. Т. 7. С. 17 – 34.
3. Виноградов И. М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p + k)$ // Известия АН СССР. Сер. Мат. 1952. Т. 16. С. 197 – 210.
4. Виноградов И. М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p + k)$ // Известия АН СССР. Сер. Мат. 1953. Т. 17. С. 285 – 290.
5. Виноградов И. М. Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии // Известия АН СССР. Сер. Мат. 1966. Т. 30. С. 481 – 496.
6. Карацуба А. А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // Доклады АН СССР. 1968. Т. 180. №6. С. 1287 – 1289.
7. Карацуба А. А. Об оценках сумм характеров // Известия АН СССР. Сер. Мат. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.
8. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР. Сер. Мат. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.
9. Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Т. 41, №1. С. 201 – 202.
10. Рахмонов З. Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами // ДАН Таджикский ССР. 1986. Т. 29, №1. С. 16 – 20.

11. Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды Математического института РАН. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.
12. Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56, №1. С. 5 – 9.
13. Рахмонов З. Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика 2013. Т. 13, вып. 4(2). С. 113 – 117.
14. Дж. Б. Фридландер, К. Гонг, И. Е. Шпарлинский Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 4. С. 605 – 619.
15. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x, \chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Сер. Мат. 1993. Т. 57, №4. С. 55 – 71.
16. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении функций Чебышева // Известия РАН. Сер. Мат. 1994. Т. 58, №3. С. 127 – 139.
17. Виноградов А. И. О числах с малыми простыми делителями // ДАН СССР. 1956. Т. 109, №4. С. 683 – 686.
18. Burgess D. A., The character sum estimate with $r = 3$ // J. London Math. Soc. 33 (1986). 219 – 226.
19. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
20. Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22, №7. 391 – 393.

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан.

Получено 24.04.2014