Структурное распознавание необратимо развивающихся сетевых систем

Л.И. Сенникова, Л.Х. Хапаева, А.А. Кочкаров
Ставропольский институт управления,
Северо-Кавказская Государственная гуманитарно-технологическая академия,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
Концерн «Радиотехнические и информационные системы»
akochkar@gmail.com

Введение

За последние несколько лет с момента начала периода современной мировой экономической нестабильности, написано множество работ дающих анализ, оценку и прогнозы в отношении сложившейся ситуации. Особенно интересны работы оценивающие сложившуюся ситуацию в мировой экономике и политике в исторической ретроспективе. Авторы книги [1] дают комплексную оценку мирового системного кризиса по средствам адекватных моделей и апробированных методик. Исследователи склонны делить экономическую историю человечества на так называемые «технологические уклады». Каждый технологий уклад основан на локомотивных отраслях мировой экономики. Кризисы не редко происходят при переходе от одного технологического уклада к другому, при сопровождении смены локомотивных отраслей. По мнению автором работы [2] мировая экономика находится в стадии перехода к VI технологическому укладу. Информационные технологии, интернет-технологии, телекоммуникации считаются локомотивными отраслями уже уходящего V технологического уклада. Они не сохранят в полной мере свои приоритетные позиции в новом технологическом укладе, но останутся ключевыми составляющими инфраструктурной отрасли. Современные исследователи описывают различные сценарии развития интернет-технологий [3]. Но никто не отрицает неизбежности преобразований в организации и структуре WEB, где интернет-маркетинг [4] и виртуальные (онлайновые) социальные сети [5] будут играть важную экономическую и социальную роль.

Социальные сети в широком смысле и их виртуальные аналоги – сложно-структурированные система с определенными правилами взаимодействий между их участниками (агентами, субъектами, индивидами) [5].

Социальные сети с большим числом участников имеют сложную многоэлементную структуру с нетривиальным набором связей, что существенно усложняет их исследование. В современной науке успешно развивается направление, посвященное анализу социальных сетей (*Social Network Analysis*) [6,7].

Проследить за сохранением (или, наоборот, утратой) определенных структурных характеристик – сложная и важная задача для исследований социальных сетей. Процессы роста и разрушения в социальных сетях на сегодняшний день практически не изучены, поэтому проблема математического моделирования социальных сетей с помощью всего инструментария дискретной математики и теории графов является актуальной [8], а положительный опыт применения теоретико-графового подхода к моделированию технических сетевых систем со сложной структурой дает основания предполагать его эффективность и для социальных сетей. Формализовав структуру социальной сети в виде графа с особой видом иерархии, можно ставить задачу распознавания нерегулярных иерархических графов. Необходимо также решать не только задачу распознавания структуры уже существующей сети, но и задачу распознавания самого процесса развития-изменения структуры социальной сети – *задачу структурного распознавания*.

В проектировании сложных систем и синтезе структур теория графов незаменимый инструмент. Применение методов и подходов теории графов показали свою результативность в различных областях от медицины и биологии до экономики и менеджмента [9].

Особое внимание стоит обратить на использование методов и подходов теории графов и дискретной математики в моделировании сложных многоэлементных систем. Задачи, которые возникли при исследовании таких многоэлементных систем, как электроэнергетические, социальные и информационные сети, дали существенный толчок для нового этапа развития и применения идей теории графов [10–14].

Интересные и оригинальные результаты были получены при моделировании сложных иерархических систем самоподобными или фрактальными графами [15].

Своим рождением фрактальные (предфрактальные) графы обязаны синтезу идей синергетики [16] и нелинейной динамики [17], фракталов [18], и теории графов [9].

Термин “сеть” широко распространен в современной научной и бизнес-литературе. На слуху такие выражения, как “розничная или торговая сеть (сеть магазинов)”, “сетевой маркетинг”, “филиальная сеть”, “сеть трубопроводов”, “железнодорожная сеть”, “социальная сеть”, “компьютерная сеть”, “информационная сеть”, “телефонная сеть” и т.д. Не редко этот термин используется для обозначения совершенно различных понятий. В настоящем диссертационном исследование термин “сеть” понимается во-первых как совокупность путей доставки товаров или услуг до конечного получателя, а во вторых как совокупность связей между элементами многоэлементной системы. Системы, в основе функционирования которых лежит сеть, принято называть *сетевыми системами* [19].

На протяжении довольно длительного времени техническая и экономическая науки считали аксиомой стационарность структуры всякой сетевой системы. Под структурой системы понимали совокупность исключительно устойчивых связей между элементами системы. На этом понимании выросли научные школы в области теории графов, дискретной математики, комбинаторной оптимизации и теории систем. Не без основания все результаты деятельности научных школ имеют совершенно четко очерченные области применения в практической деятельности. Но глобализационные процессы в мировой экономики и жизнеустройстве ставят новые задачи.

Развивающаяся экономика и глобализационные процессы вынуждают сетевые системы развивать, адаптировать, оптимизировать свою сетевую структуру под сильно изменчивую конкурентную среду, и под новую геополитическую конъюнктуру. В такой ситуации в регулярных изменениях сетевых структур прослеживаются закономерности. Сетевые структуры не только теряют свою стационарность (фиксированность), но и приобретают признаки динамических систем. Сетевые структуры приобретают признаки и свойства иерархических и масштабно-инвариантных структур. Процессы изменения, развития, поведения сетевых структур можно объединить общим понятием “*структурная динамика*”.

Исследования в области структурной динамики ведутся в научных школах профессора Кульбы В.В. [20], член-корреспондента РАН Новикова Д.А. [21], профессора Кочкарова А.М. [15] в таких научно-исследовательских институтах и ведущих ВУЗах России, как Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Северо-Кавказская Государственная гуманитарнотехнологическая академия. Работы членов школ профессора Кульбы В.В. и член-корреспондента Новикова Д.А. посвящены в большей степени вопросам взаимодействия между элементами сложных иерархических систем, чем вопросам изменчивости и динамики самих сетевых структур. В работах же школы профессора Кочкарова А.М., наоборот, первичное внимание уделено именно вопросам поведения-развития сетевых структур. В качестве моделей структурной динамики сетевых систем в работах профессора Кочкарова А.М. предлагаются различные классы масштабно-инвариантных графов, называемых предфрактальными.

Очевидно, что при исследовании сетевых систем, необходимо решать не только задачу распознавания структуры уже существующей сетевой системы, но и задачу распознавания самого процесса развития-изменения структуры сетевой системы. Задачу, объединяющую две указанные, назовем задачей *структурного распознавания*. Алгоритмы распознавания, строящие решение задачи структурного распознавания, во-первых, устанавливают, что процесс развития сетевых структур соответствует тем или иным правилам порождения предфрактальных графов, а во-вторых, определяют какие типы затравок при порождении были использованы. В настоящей работе описан и обоснован алгоритм предфрактального графа, порожденного парой регулярных затравок с чередованием.

Фрактальные и предфрактальные графы: основные понятия

В настоящей работе определен особый класс предфрактальных графов - предфрактальный граф, порождаемый множеством затравок с чередованием. Именно этот класс предфрактальных графов может наиболее адекватно описывать структуры сложных многоэлементных сетевых систем при построении моделей. Поэтому в настоящей работе решается задача распознавания предфрактальных графов, порожденных множеством затравок с чередованием. Предложен и обоснован алгоритм распознавания предфрактального графа, порожденного двумя полными затравками с чередованием.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L – множество вершин графа, а E_L – множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = \{1,2,...L-1\}$ графе G_l каждую его вершину связной затравкой $H = (W, Q)$. На первом этапе предфрактальному графу соответствует затравка. При этом об описанном процессе говорят, что предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожден затравкой $H = (W, Q)$. Ребра, появившиеся на этапе l, $l = \overline{1, L}$, порождения предфрактального графа, будем называть *ребрами ранга* l. *Новыми* ребрами предфрактального графа G_L назовем – ребра ранга L, а все остальные ребра назовем *старыми*. Процесс построения предфрактального графа, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов, которую и назовем *траекторией*. *Фрактальный граф* определяется бесконечной траекторией. Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа G_L является такой случай, когда вместо единственной затравки H используется множество затравок $\mathrm{H} = \{H_t\} = \{H_1, H_2, ..., H_t, ..., H_T\}$, $T \geq 2$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина замещается некоторой затравкой $H_t \in \mathrm{H}$, которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры. Если при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина графа G_{l-1} замещается одной конкретной случайно выбранной затравкой $H_{t*} \in \mathrm{H}$, то будем говорить, что *предфрактальный граф* G_L *порожден множеством затравок* $\mathrm{H} = \{H_t\}$, $t = 1,2,...,T$, $T \geq 2$, *с чередованием*. Если же при порождении предфрактального графа G_L множеством затравок $\mathrm{H} = \{H_t\}$, $T \geq 2$, с чередованием задано некоторое правило выбора затравок из H, например, неубывание числа вершин или ребер выбираемых затравок, то будем говорить, что *предфрактальный граф* G_L *порожден множеством затравок* $\mathrm{H} = \{H_t\}$, $t = 1,2,...,T$, $T \geq 2$, *с упорядоченным чередованием*.

Очевидно, что порождение фрактального графа $G=(V,E)$ (т.е. когда траектория является бесконечным множеством $G_1, G_2, ..., G_l, ..., G_L, G_{L+1}, ...$) с чередованием затравок, возможно только при бесконечном числе замещений затравок $\mathrm{H}=\{H_t\}$, $t=1,2,...,T$, $T \geq 2$.

Если при порождении предфрактального графа с чередованием, для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с возрастанием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным возрастанием затравок*. Если же для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с убыванием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным убыванием затравок*. Использованием для порождения предфрактального графа чередованием затравок одной и то же затравки на различных этапах порождения исключается.

В случае порождения предфрактального графа G_L с упорядоченным возрастанием (с упорядоченным убываем) затравок $\mathrm{H}=\{H_t\}$, $t=1,2,...,T$, $T \geq 2$, если $L > T$, то переход на $l = T+1$ шаге порождения от предфрактального графа G_T к G_{T+1}, осуществляется заменой всех вершин графа G_T затравкой с наименьшим (наибольшим) числом вершин из $\mathrm{H}=\{H_t\}$, $t=1,2,...,T$, $T \geq 2$. На последующих шагах $l = T+2, T+3, ..., L$ порождения предфрактального графа G_L затравки из $\mathrm{H}=\{H_t\}$, $t=1,2,...,T$, $T \geq 2$, используются последовательно по очередности возрастания (убывания) числа вершин. В случае порождения предфрактального графа G_L число этапов порождения больше числа затравок, $L > T$, целесообразно говорить о периоде замещения вершин затравками. Период замещения вершин затравкам в процессе порождения предфрактального графа G_L с возрастанием или убыванием вершин затравок $\mathrm{H}=\{H_t\}$, $t=1,2,...,T$, $T \geq 2$, обозначим через P.

Алгоритм распознавания

Рассмотрим задачу, когда требуется распознать предфрактальный граф, порожденный парой полных затравок с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер.

Переход в траектории $G_1, G_2, ..., G_r, ..., G_L$ графа с чередованием затравок от текущего графа $G_r = (V_r, E_r)$ к следующему графу G_{r+1} всякий раз подчиняется основным правилам порождения предфрактального графа с чередованием затравок при сохранении смежности старых ребер.

Распознавание предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер можно осуществить алгоритмом β. Суть алгоритма β заключается в идентификации графов $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ как затравок предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, а также идентификации траектории самого предфрактального графа.

На рис. 1 изображена траектория предфрактального графа $G_3 = (V_3, E_3)$, порожденного парой полных затравок – 3-вершинным графом $F_1 = (V_1, E_1)$ и 4-вершинным $F_2 = (V_2, E_2)$, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер.

Алгоритм β

состоит из $k = 1,2,...,l,...,L$ этапов. На каждом из этапов алгоритма β выполняются три ключевые операции: окрашивание (выделение) вершины, окрашивание (выделение) ребра, стягивание ребра, стягивание цепи. На вход первого $k = 1$ этапа алгоритма предъявляется предназначенный для распознавание граф $G = (V, E)$. На вход каждого из этапов $k = 1,2,...,l,...,L-1$ алгоритма β предъявляется граф $G^k = (V^k, E^k)$, как результат работы предыдущего этапа.

Определим число вершин графа $G = (V, E)$ и обозначим их через N. Разделим число вершин графа $G = (V, E)$ на произведение $m_1 m_2$ последовательно необходимое количество раз, чтобы получить представление $N = (m_1 m_2)^K r$. Возможны два случая: $r = 1$, $r = m_1$. Рассмотрим каждый из них подробно. Если остаток r не удовлетворяет ни одному из указанных вариантов, то алгоритм β_3 завершает свою работу с отрицательным результатом.

Пусть $r = 1$. Тогда $G = G^L$, а число этапов алгоритма β равно $L = 2K$. Затем у графа G^L производим поиск всех вершины степени $m_2 - 1$ и объединяем их в множество $V^L_{m_2}$. Затем полученное множество $V^L_{m_2}$ разбивается на подмножества с учетом взаимной смежности составляющих его вершин следующим образом. Выделяем вершину $v \in V_{m_2}^L$ и смежные ей ($m_2 - 2$) вершины из множества $V_{m_2}^L$. Если вершина $v \in V_{m_2}^L$ не имеет в множестве $V_{m_2}^L$ смежных с ней ($m_2 - 2$) вершин, то алгоритм β заканчивает свою работу с отрицательным результатом. В процессе разбиения множества $V_{m_2}^L$ на подмножества, вершины не выделяются более одного раза. После разбиения множества $V_{m_2}^L$ на подмножества, в каждом подмножестве проводиться проверка на взаимную смежность всех ее ($m_2 - 1$) вершин. Далее выделяются ребра обеспечивающие смежность вершин в каждом из подмножестве. Их число в каждом из подмножестве равно $\frac{(m_2-1)(m_2-2)}{2}$, в противном случае алгоритм заканчивает свою работу с отрицательным результатом.

Далее проверяем смежность всех ($m_2 - 1$) вершин каждого выделенного подмножества с одной вершиной, степень которой больше чем $m_2 - 1$. Если таковая имеется, выделяя ее и все ребра соединяющие эту вершину с уже выделенными, получим выделенный полный подграф с m_2 вершинами. Такие полные подграфы должны быть выделены на графе G^L в соответствии с числом подмножеств множества $V_{m_2}^L$, в противном случае алгоритм заканчивает свою работу с отрицательным результатом.

Далее стягиваем все выделенные ребра. И на вход следующего этапа алгоритма β передается граф G^{L-1}. На графе G^{L-1}, как и предыдущем шаге, выделяем все вершины степени $m_1 - 1$ и объединяются в множество $V_{m_1}^{L-1}$. С множеством $V_{m_1}^{L-1}$ проделываются те же операции относительно вершин со степенью $m_1 - 1$, что и с вершинами множества Далее стягиваем все выделенные ребра. На вход следующего этапа алгоритма β передается граф G^{L-2}. На всех последующих этапах проведем операции по стягиванию выделяемых полных подграфов, чередую число их вершин m_1 и m_2 в продолжении уже начатой последовательности на первых двух шагах. На выходе последнем шага получим полный граф G^1 с число вершин m_1, в противном случае алгоритм β завершает свою работу с отрицательным результатом.

Пусть $r = m_1$. Тогда $G = G^L$, а число этапов алгоритма β равно $L = 2K + 1$. Затем на графе G^L выделяем все вершины степени $m_1 - 1$. Далее процесс распознавания графа $G = G^L$ при $r = m_1$ идентичен предыдущему случаю, когда $r = 1$.

Результатом работы алгоритма β в случаях когда $r = 1$, $r = m_1$ является траектория $G^k = (V^k, E^k) = G_k = (V_k, E_k)$, $k = 1,2,...,l,...,L$, предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер. ◄

Не налагая дополнительных ограничений на водные данные с алгоритм β, кроме изменения условия $m_1 < m_2$ на $m_1 > m_2$ можно переориентировать алгоритм β на распознавание предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) соответственно, с убывание и при сохранении смежности старых ребер.

Теорема 1. *Всякий предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$, $|V_1| = m_1$ и $|V_2| = m_2$ ($m_1 > m_2$), с упорядоченным возрастанием и сохранением смежности старых ребер распознается алгоритмом β с полиномиальной трудоемкостью $O(|E_L| + L|V_L|)$.*

Доказательство разделим на две части. В первой будет доказано соответствия выполняемой алгоритмом β работы заявленным целям, т.е. распознаванию предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер. Во второй будет подсчитана трудоемкость самого алгоритма β.

I) При порождении предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно число вершин самого графа будет равно произведению с чередующимися множителями $N = m_1 m_2 m_1 m_2 * ... * r$, где каждый множитель соответствует этапу порождения предфрактального графа. Формула

$N = m_1 m_2 m_1 m_2 * ... * r$ позволяет вычислять число вершин предфрактального графа, порождаемого парой полных с упорядоченным возрастанием. А множитель r, если число этапов порождения нечетно, равен m_1. Если же число этапов порождения четно, то множитель r равен 1. Рассмотрим оба случая в отдельности.

Пусть число этапов порождения предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ нечетно, т.е. $r = m_1$. Это значит, что при порождении предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ число его вершин будет равно $N(G_L) = (m_1 m_2)^M m_1$, а $L = 2M + 1$. Кроме того это значит, что последней затравкой использованной для замещения вершин предфрактального графа $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$ является полный m_1-вершинный граф $F_1 = (V_1, E_1)$.

Всякий предфрактальный граф, порождаемый полными затравками с сохранением смежности старых ребер, можно получить склеиванием новых затравок с вершинами предфрактального графа предыдущего этапа. Это следует из общего описания процесса порождения предфрактального графа с сохранением смежности старых ребер. Поэтому только лишь одна вершина каждой новой подграф-затравки предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ будет инцидентна старым ребрам, а значит только степень этой вершины подграф-затравки будет отличаться от $m_1 - 1$.

Выделив на предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$ все вершины степени $m_1 - 1$ и объединив их в множество $V_{m_1}^L$, можно сгруппировать их в подмножества исходя из взаимной смежности выделенных вершин. Эти подмножества представляют собой ($m_1 - 1$) смежные вершины каждой новой подграф-затравки предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$. В кАждом из сгруппированных подмножеств множества $V_{m_1}^L$ не достает по одной вершине, чтобы каждое подмножеств соответствовало множеству вершин отдельно взятой подграф-затравке. Для добавления этих подмножеств последними вершинами достаточно выделить все инцидентные вершинам подмножеств ребра, часть из которых ($m_1 - 1$ ребро) окажется инцидентными недостающей вершине.

После выделения все новые ребра стягиваются. На вход следующему этапу порождения подается предфрактальный граф $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$.

Далее на каждом этапе распознавания чередуя проводиться выделение и стягивание новых подграф-затравок, соответствующих затравкам $F_2 = (V_2, E_2)$ и

$F_1 = (V_1, E_1)$, по аналогии с описанным и обоснованным первым этапом распознавания алгоритма β.

Пусть число этапов порождения предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ четно, т.е. $r = 1$. Это значит, что число замещений, учитывая чередующийся характер процесса порождения, вершин затравкой $F_1 = (V_1, E_1)$ и затравкой $F_2 = (V_2, E_2)$ будет равным. Поэтому число вершин предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ вычисляется в соответствии с произведением $N(G_L) = (m_1 m_2)^K$, а $L = 2K$. Кроме того, это значит, что последней затравкой использованной для замещения вершин предфрактального графа $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$ является полный m_2-вершинный граф $F_2 = (V_2, E_2)$. Тогда с выделения, именно, подграф-затравок соответствующих затравке $F_2 = (V_2, E_2)$ и целесообразно начинать распознавание предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$. Последующие шаги в алгоритме β при $r = 1$ аналогичны шагам при $r = m_1$. Поэтому и обоснование этой части алгоритма аналогично предъявленному выше.

II) На каждый из $k = 1,2,...,l,...,L$ этапов алгоритм β просматривает все вершины графа $G = (V, E)$ и выделяет соответствующие требованиям текущего этапа. Т.е. на каждом этапе алгоритма β объединяются в множества $V_{m_2}^l$ и $V_{m_1}^l$ поочередно вершины степени $m_2 - 1$ и $m_1 - 1$, соответственно. На каждом шаге алгоритма эти действия соответствуют $|V_L|$ операциям. На протяжении всего алгоритма эти действия соответствуют $L|V_L|$ операциям. Кроме того на протяжении всего алгоритма β каждое ребро графа $G = (V, E)$ выделяется лишь единожды, общая вычислительная сложность алгоритма β распознавания предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер им равна $O(|E_L| + L|V_L|)$. ◄

Заключение. Книга [15] целиком посвящена распознаванию фрактальных (предфрактальных) графов, порожденных одной затравкой. Вопрос же о распознавании фрактальных (предфрактальных) графов, порожденных множеством затравок, оставался открытым до недавнего времени.

В настоящей работе приведен пример адаптации (изменение правила) процесса порождения предфрактальных графов для моделирования развивающихся сетевых структур. Результатом адаптации стал новый класс предфрактальных графов, порождаемый множеством затравок с чередованием. Как следствие этого, рассмотрена частная задача распознавания предфрактального графа, порожденного парой полных затравок чередованием. Предложенный алгоритм распознавания решает эту задачу за полиномиальное время.

Литература

1. Прогноз и моделирование кризисов и мировой динамики / Под ред. *А.А. Акаева, А.В. Коротаева, Г.Г. Малинецкого.* – М.: УРСС, 2010. – 352 с.
2. *Малинецкий Г.Г., Маненков С.К., Митин Н.А., Шишов В.В.* Когнитивный вызов и информационные технологии: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 46. М., 2010.
3. *Эйдман И.В.* Прорыв в будущее. Социология интернет-революции М.: Объединенное гуманитарное издательство, 2007. – 384 с.
4. *Вебер Л.* Эффективный маркетинг в Интернете. Социальные сети, блоги, Twitter и другие инструменты продвижения в Сети. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2010. – 320 с.
5. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2010. – 228 с.
6. *Градосельская Г.В.* Сетевые измерения в социологии: Учебное пособие. – М.: Издательский дом «Новый учебник», 2004. – 248 с.
7. *Евин И.А.* Введение в теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 121–141
8. *Кочкаров А.А., Кочкаров А.М., Салпагарова Л.У.* Моделирование разрушения сложных сетевых систем: Теоретико-графовый подход // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 5(94). – С. 234–240.
9. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.

10. *Strogatz S.* Exploring complex networks // Nature. – 2001. – № 410. – P. 268–276.

11. *Watts D.J.* Small Worlds. – Princeton: Princeton University Press, 1999.

12. *Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F.* Evolution of networks: From Biological Nets to the Internet and WWW. – Oxford: Oxford University Press, 2003.

13. *Albert R., Barabasi A.* Statistical mechanics of complex networks // Reviews of Modern Physics. – 2002. – № 74. – P. 47–97.

14. *Krön B.* Growth of self-similar graphs // J. Graph Theory, 45(3):224–239, 2004.

15. *Кочкаров А.М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. – Нижний Архыз: РАН САО, 1998.

16. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. – М.: КомКнига, 2005.

17. *Малинецкий Г.Г., Курдюмов С.П.* Нелинейная динамика и проблемы прогноза // Вестник РАН, 2001, т.71, №3. С.210-224.

18. Фракталы в физике / Под ред. *Л. Пьетронеро*, *Э. Тозатти*. – М.: Мир, 1988.

19. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Модели неопределенности в многопользовательских сетях. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.

20. *Кульба В.В., Ковалевский С.С., Уткин В.А.* и др. Управление и контроль реализации социально-экономических целевых программ. – М.: Книжный дом ”Либриком”, 2009.

21. *Новиков Д.А.* Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.