

СТЕПЕННЫЕ СУММЫ И ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ

Касимов А.М.¹, Касимов Ф.Ф.²

Email: Kasimov6114@scientifictext.ru

¹Касимов Абдулло Мухаммедович – старший преподаватель;

²Касимов Феруз Файзуллаевич – преподаватель,
кафедра дифференциальных уравнений, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет,
г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: в этой статье изучается вывод и доказательство формул для $S_m(n)$ - суммы m -х степеней первоначальных n натуральных чисел. В работе приводится связь между суммой $S_m(n)$ и числами Бернулли. В статье также обсуждается применение числа Бернулли при решении других проблем математики. Так, например, при доказательстве частных случаев справедливости проблемы Ферма, в ходе решения проблемы Варинга используются числа Бернулли [1-3]. Статья носит обзорно-аналитический характер. При решении задач олимпиады можно воспользоваться данными этой статьи.

Ключевые слова: числа Бернулли, сумма, бином Ньютона, числа Эйлера, рекуррентная формула.

POWERS SUM AND BERNOULLI NUMBERS

Kasimov A.M.¹, Kasimov F.F.²

¹Kasimov Abdullo Mukhammedovich – Senior Lecturer;

²Kasimov Feruza Fayzullaevich – Lecturer,
DEPARTMENT OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, FACULTY OF PHYSICS AND MATHEMATICS,
BUKHARA STATE UNIVERSITY,
BUKHARA, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: this article studies the derivation and proof of formulas for $S_m(n)$ - the sum of m -th powers of the original n natural numbers. The paper provides a connection between the sum $S_m(n)$ and Bernoulli numbers. The article also discusses the application of the Bernoulli number to other problems in mathematics. So, for example, when proving special cases of the validity of Fermat's problem, in solving Waring's problem, Bernoulli numbers are used. The article is of an overview and analytical nature. When solving the problems of the Olympiad, you can use the data in this article.

Keywords: Bernoulli numbers, sum, Newton binomial, Euler numbers, recurrent formula.

УДК 511

Пусть n – любое конечное натуральное число, $m=0,1,2,...,n$. Настоящая статья носить обзорно – аналитический характер, в ней изучаются вывод и доказательство формул для $S_m(n)$ - суммы m -х степеней первоначальных n натуральных чисел, также $T_k(n)$ - суммы всевозможных произведений по k натуральных чисел взятых из первоначальных n натуральных чисел. В работе приводится связь между суммой $S_m(n)$ и числами Бернулли.

Рассмотрим вывод формулы вычисления суммы

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \sum_{k=1}^m k^m \quad (1)$$

Очевидно, что

$$S_0(n) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n \quad (2)$$

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad (3)$$

Вычислим $S_2(n)$, используя равенство $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, заменим в этом равенстве a последовательно числами 1, 2, 3, ..., n , в результате чего имеем следующие числовые равенства:

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

.....

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

Складывая эти равенства почленно, а затем приведя подобные члены, последовательно получим

$$2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + \dots + n) + n$$

$$(n+1)^3 = 3 \cdot S_2(n) + 3 \cdot S_1(n) + (n+1)$$

$$3 \cdot S_2(n) = (n+1)^3 - (n+1) - 3S_1(n)$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6} \quad (4)$$

Аналогично воспользовавшись равенством $(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$, повторяя вышеуказанные вычисления получим следующее

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2.$$

Теперь, если для сумм $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$, ..., $S_{m-1}(n)$ формулы известны, то выведем формулу позволяющую вычислить сумму $S_m(n)$. Для этого в формуле $(a+1)^{m+1} = a^{m+1} + C_{m+1}^1 \cdot a^m + C_{m+2}^2 \cdot a^{m-1} + \dots + C_{m+1}^m \cdot a + 1$ вместо a положим последовательно числа 1, 2, 3, ..., n . В итоге имеем рекуррентную формулу

$$S_m(n) = \frac{(n+1)((n+1)^m - 1) - C_{m+1}^2 \cdot S_{m-1}(n) - \dots - C_{m+1}^m \cdot S_1(n)}{C_{m+1}^1}. \quad (5)$$

Числа $B_1, B_2, \dots, B_m$ определяемые равенством

$$C_{2m+1}^2 \cdot B_1 - C_{2m+1}^4 \cdot B_2 + C_{2m+1}^6 \cdot B_3 - \dots + (-1)^{m-1} \cdot C_{2m+1}^{2m} \cdot B_m = m - \frac{1}{2} \quad (6)$$

называются числами Бернулли.

Полагая $B_0 = 1$ вычислим несколько первоначальные числа Бернулли: $B_1 = \frac{1}{2}$;

$$B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_3 = 0; \quad B_4 = -\frac{1}{30}; \quad B_5 = 0; \quad B_6 = \frac{1}{42}$$

Вычисления показывают, что кроме B_1 все остальные числа Бернулли с нечетными номерами равны нулю. Было показано, что при определенных условиях все рассматриваемые в работах [4-25] можно воспользоваться понятиями данные в статье. С этой точки зрения в некоторых случаях числа Бернулли с нечетными

номера не учитываются, по этому поводу числа $(-1)^{m-1} \cdot B_m$ заменяют числами B_m и перенумеровав их получают числа

$$B_1 = \frac{1}{6}; B_2 = \frac{1}{30}; B_3 = \frac{5}{66}; B_4 = \frac{691}{2730}, \dots$$

по определению чисел Бернулли именно эти числа получаются, они же участвуют в формуле суммы m – степеней натуральных чисел

Числа Бернулли применяются при решении разных проблем математики. Так, например, при доказательстве частных случаев справедливости проблемы Ферма, в ходе решения проблемы Варинга используются числа Бернулли. Также существуют связи между числами Бернулли B_m и числами Эйлера E_{2m} , определяемые равенством

$$E_0 + C_{2m}^2 E_2 + C_{2m}^4 E_4 + C_{2m}^6 E_6 + \dots + C_{2m}^{2m-2} E_{2m-2} + E_{2m} = 0, \quad E_0 = 1; E_2 = -1; E_4 = 5, \dots$$

Список литературы / References

1. Бухштаб А.А. Теория чисел. Москва, “Просвещение”, 1966.
2. Соминский И.С. Элементарная алгебра. Москва. “Наука”, 1967.
3. Ягудаев Б.Я. Сонли функциялар. Тошкент. “Ўқитувчи”, 1978.
4. Бозоров З.Р. Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости. Сибирский Журнал Индустриальной Математики. 23:1 (2020). С. 28-45.
5. Бозоров З.Р. Обратная задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости, аналитического по пространственной переменной. Научный Вестник Бухарского Государственного университета. 69:1 (2018). С. 21-34.
6. Бешимова Д.Р. Компактные пространства. Молодой учёный. № 13(117). Июль-1, 2016.
7. Бешимова Д.Р. Слабо сепарабельные пространства. Молодой учёный. № 12(116). Июнь-2, 2016.
8. Бешимова Д.Р. Слабая плотность пространства слабо аддитивных функционалов. Молодой учёный. № 8(112). Февраль-1, 2016.
9. Дурдиев У.Д. Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты. и Сибирские Электронные Математические Известия, 17 (2020). С. 179-189.
10. Durdiev U.D. A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. Eurasian journal of mathematical and computer applications, 7:2 (2019). Pp. 4–19.
11. Durdiev U.D. A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. Mathematical Methods in the Applied Sciences 42:18 (2019). Pp. 7440–7451.
12. Durdiev U.D. An Inverse Problem for the System of Viscoelasticity Equation in the Homogeneous Anisotropic Media. Journal of Applied and Industrial Mathematics 13:4 (2019). Pp. 1-8.
13. Маматова Н.Х. Преподавание предмета «Математика для экономистов» при помощи метода кейс-стади. Вестник Науки и образования. 19(97). 2, 2020. С. 45-50.
14. Меражова Ш.Б., Нуриддинов Ж.З., Меражов Н.И., Хидиров У.Б. Методы решений задачи Коши для уравнения волны в случае $n=2$ и $n=3$ // Academy. 4 (55), 2020. С. 21-25.

15. Меражова Ш.Б. Постановка обратной задачи для параболических интегродифференциальных уравнений с интегральным членом типа свертки // Ученый XXI века. 5-3 (2018). С. 47-49.
16. Меражова Ш.Б. Решение методом продолжения задач математической физики в полуограниченных областях // Молодой учёный, 12 (2016). С. 43-45.
17. Меражова Ш.Б., Маматова Н.Х. Априорная оценка для решения первой краевой задачи для уравнения смешанного типа // Молодой учёный, 12 (116), 2016. С. 42-56.
18. Меражова Ш.Б., Мардонова Ф.Я. Эквивалентность задачи для уравнения смешанного типа и задачи Коши для уравнений симметрической системе // Ученый XXI века. 6-1 (53), 2019. С. 20-23.
19. Тураева Н.А. Методические рекомендации по обучению будущих учителей математики конструированию и анализу урока. Вестник Науки и образования. 19(97). 2, 2020. С. 45-50.
20. Меражова Ш.Б. Понятие прямой и обратной задачи в преподавании предмета уравнений математической физики. Вестник Науки и образования. 19(97). 2, 2020. С. 81-85.
21. Merajova Sh.B. Methods of teaching the practical application of topics related to differential equations. European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences Vol. 8. № 9, 2020. Pp. 37-40.
22. Merajova Sh.B. Numerical solution of the second boundary value problem for an equation of mixed-composite type. Journal of Global Research in Mathematical Archives Volume 6. № 10, 2019.
23. Жураев Ф.М., Исломов Б.И. Аналог задачи Дарбу для вырождающегося нагруженного уравнения гиперболического типа // Докл. Межд. Науч. Конф. 19-24 июля, 2010. С. 194-195.
24. Жураев Ф.М. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа // Докл. 42- с. ск. молод. школы-конф. 30 января - 6 февраля 2011.
25. Жураев Ф.М., Исломов Б. Задача АТ для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области // Уз. мат. журнал, 2015. № 2.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, СВОДИМЫЕ К ОПЕРАТОРНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Латипов Х.М.¹, Пармонов Х.Ф.²

Email: Latipov6114@scientifictext.ru

¹Латипов Хакимбой Мирзо угли – ассистент,
кафедра математического анализа;

²Пармонов Хамид Фахриддин угли – ассистент,
кафедра дифференциального уравнения,
физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет,
г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: в настоящей статье рассматриваются две задачи, сводимые к изучению операторных уравнений. Первая задача связана с моделью Фридрихса A_1 . Оператор A_1 исследуется как линейный ограниченный и самосопряженный