

Н. А. Вавилов, А. В. Степанов

СТАНДАРТНАЯ КОММУТАЦИОННАЯ ФОРМУЛА

Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $GL(n, R)$ — полная линейная группа степени n над R , $E(n, R)$ — ее элементарная подгруппа. Для идеала I кольца R через $GL(n, R, I)$ обозначается главная конгруэнц-подгруппа уровня I , а через $E(n, R, I)$ — относительная элементарная группа уровня I .

Одним из наиболее часто используемых результатов теории линейных групп над кольцами являются стандартные коммутационные формулы

$$[GL(n, R), E(n, R, I)] = E(n, R, I),$$

$$[E(n, R), GL(n, R, I)] = E(n, R, I),$$

первая из которых утверждает в точности, что группа $E(n, R, I)$ нормальна в $GL(n, R)$, а вторая играет центральную роль в описании подгрупп $GL(n, R)$, нормализуемых $E(n, R)$. На стабильном уровне эти формулы были получены Хайманом Бассом [12], позже Андрей Суслин, Леонид Васерштейн, Зенон Борович и первый автор [6, 20, 1] заметили, что для коммутативных колец они справедливы при любом $n > 3$.

В дальнейшем эти формулы многократно перед оказывались и обобщались, и в [3-5, 7-9, 11, 13, 14, 19, 21] можно найти еще несколько их доказательств и много дальнейших ссылок. В то же время Виктор Герасимов [2] привел примеры колец, для которых $E(n, R)$ нетривиальным образом выделяется свободным сомножителем в $GL(n, R)$. В этом случае $E(n, R)$ настолько далека от нормальности, насколько это можно себе представить и, тем самым, *какое-то* условие типа коммутативности или конечномерности здесь необходимо.

Пусть теперь A, B — два идеала. Естественно спросить, что можно сказать про взаимные коммутанты конгруэнц-подгрупп и элементарных групп уровней A и B ? Приведенные выше коммутационные формулы отвечают случаю, когда одна из этих групп абсолютна. В общем случае эта задача рассматривалась в работах Алека Мейсона [1618]. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} E(n, R, AB + BA) &< [E(n, R, A), E(n, R, B)] < [GL(n, R, A), E(n, R, B)] < \\ &< [GL(n, R, A), GL(n, R, B)] < GL(n, R, AB + BA), \end{aligned} \quad (1)$$

однако явное вычисление этих коммутантов является чрезвычайно трудной задачей. Скажем, в работе [16] приведены примеры, показывающие, что *большинство* неравенств здесь являются строгими даже для столь просто устроенных коммутативных колец, как дедекиндовы кольца арифметического типа!

В то же время, сейчас мы докажем, что второе из этих неравенств в действительности является равенством для всех коммутативных колец. А именно, основной целью настоящей работы является доказательство следующего результата.

Теорема. Пусть R — коммутативное кольцо, $n > 3$. Тогда для любых двух идеалов $A, B < R$ имеет место равенство

$$[E(n, R, A), GL(n, R, B)] = [E(n, R, A), E(n, R, B)].$$

Наше доказательство основано на чуть более тщательной реализации той же идеи, что доказательство теоремы 1 работы [19]. Эта формула является совместным обобщением обеих стандартных коммутационных формул.

Напомним основные используемые в дальнейшем обозначения. Как обычно, e обозначает единичную матрицу, а e_{ij} — стандартную матричную единицу. Для $\xi \in G(R)$ и $1 < i = j < n$ через $t_j(\xi) = e + \xi e_{ij}$ обозначается соответствующая [элементарная] трансвекция. Идеалу $I \subset R$ сопоставляется элементарная подгруппа

$$E(n, I) = (t_{ij}(\xi), \xi \in R, 1 < i = j < n),$$

относительная элементарная подгруппа $E(n, R, I)$ уровня I определяется как нормальное замыкание $E(n, I)$ в $E(n, R)$. В свою очередь, главная конгруэнц-подгруппа $GL(n, R, I)$ состоит из всех матриц g , сравнимых с e по модулю I . Ясно, что тогда $g^{-1} = e \pmod{I}$.

Обозначим через R^n свободный правый R -модуль, состоящий из столбцов высоты n с компонентами из R , а через nR — свободный левый R -модуль, состоящий из строк длины n с компонентами из R . Стандартные базисы R^n и nR обозначаются через $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$, соответственно.

Для двух подгрупп $F, H \subset G$ через $[F, H]$ обозначается их взаимный коммутант, т. е. подгруппа, порожденная всеми коммутаторами $[f, h]$, где $f \in F, h \in H$. Заметим, что наши коммутаторы левонормированы, $[x, y] = x y x^{-1} y^{-1}$. Двойной коммутатор $[[x, y], z]$ обозначается просто $[x, y, z]$.

1. Взаимные коммутанты относительных подгрупп. Соберем несколько очевидных утверждений о взаимных коммутантах, которые сформулированы, например, в [16]–[18], но так как их доказательства совсем короткие, мы их приведем. Основное кольцо R здесь не предполагается коммутативным.

Лемма 1. Пусть $n > 2$. Тогда для двух любых идеалов A и B в R выполняется равенство

$$E(n, R, A)E(n, R, B) = E(n, R, A + B).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения $t_j(a + b) = t_j(a)t_j(b)$, $1 < i = j < n$, $a \in A$, $b \in B$, следует, что левая часть содержит $E(n, A + B)$. Произведение двух нормальных подгрупп нормально в $E(n, R)$.

Лемма 2. Пусть $n > 3$. Тогда для двух любых идеалов A и B в R выполняется включение

$$[E(n, R, A), E(n, R, B)] \subset E(n, R, AB + BA).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < i = j < n$. Возьмем произвольный индекс $h = i, j$. Тогда левая часть содержит элементарные трансвекции вида $t_j(ab) = [t_{ih}(a), t_{jh}(b)]$ и $t_j(ba) = [t_{ih}(P), t_{kj}(a)]$, для всех $a \in A, b \in B$. Кроме того, будучи взаимным коммутантом двух нормальных подгрупп, она нормальна в абсолютной элементарной группе $E(n, R)$. Таким образом, она содержит $E(n, R, AB)$ и $E(n, R, BA)$ и, значит, в силу предыдущей леммы также и $E(n, R, AB + BA)$.

Лемма 3. Пусть $n > 2$. Тогда для двух любых идеалов A и B в R выполняется включение

$$[GL(n, R, A), GL(n, R, B)] \subset GL(n, R, AB + BA).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольные $x \in GL(n, R, A)$ и $y \in GL(n, R, B)$. Тогда $x = e + x_1$, $x^{-1} = e + x_2$ для некоторых $x_1, x_2 \in M(n, A)$ таких, что $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 0$ и $y = e + y_1$, $y^{-1} = e + y_2$ для некоторых $y_1, y_2 \in M(n, B)$ таких, что $y_1 + y_2 + y_1 y_2 = 0$. По модулю $AB + BA$ выполняется равенство

$$[x, y] = (e + x_1)(e + y_1)(e + x_2)(e + y_2) = e + x + x + x_1 x_2 + y_1 + y_2 + y_1 y_2 = e. \quad (2)$$

Лемма 3 неявно используется в доказательстве теоремы в тот момент, когда мы заключаем, что какие-то коммутаторы, явным образом раскладывающиеся в произведение элементарных трансвекций, лежат в $E(n, R, AB)$.

2. Доказательство теоремы. Напомним, прежде всего, «тему» работы [19]. Конечно, в [19] тема сформулирована только для абсолютного случая $E(n, R)$, но как там отмечено, в доказательстве ничего не меняется, если брать $\xi \in A$.

Лемма 4. Пусть R — коммутативное кольцо, $n > 3$ и $A \subset R$. Тогда для любой матрицы $g \in GL(n, R)$ элементарная группа $E(n, A)$ порождается трансвекциями $e + e_i v$, где $1 < i < n$, а строка $v \in {}^n A$ такова, что $V_i = 0$ и $(v g^{-1})_j = 0$ для некоторых i, j . По лемме 3 работы [19] имеет место равенство

Приступим теперь к доказательству теоремы. Так как правая часть содержится в левой, а подгруппы $E(n, R, A)$, $E(n, R, B)$ и $GL(n, R, B)$ нормализуются $E(n, R)$, нам достаточно показать включение

$$[E(n, A), GL(n, R, B)] \subset [E(n, R, A), E(n, R, B)].$$

В свою очередь, так как для каждой матрицы $g \in GL(n, R, B)$ подгруппа $E(n, A)$ порождается трансвекциями вида $e + e_i v$, описанного в лемме 4, для доказательства теоремы нам достаточно проверить, что в правой части содержатся все коммутаторы вида $[e + e_i v, g]$, где $v \in {}^n A$, $V_i = 0$ и $(v g^{-1})_j = 0$ для некоторых i, j . По лемме 3 работы [19] имеет место равенство

$$\begin{aligned} [e + e_i v, g] &= (e + e_i v)(e - (g e_i)(v g^{-1})) = \\ &= (e + e_i v)(e - Q_{j i e_j}(v g^{-1}))[e - (g e_i - Q_{j i e_j} f), e - e_j(v g^{-1})], \end{aligned}$$

в справедливости которого можно убедиться и просто перемножив все матрицы, входящие в его левую и правую части.

Продолжаем действовать точно так же, как в доказательстве теоремы 1 работы [19], но теперь будем рассматривать произведения по модулю нормальной подгруппы $E(n, R, AB)$; по лемме 2 эта подгруппа содержится в правой части доказываемой коммутационной формулы.

В случае $j = i$ выполняется сравнение $Q_{e i} - g_{i i} e_i = 0 \pmod{B}$, так как, кроме того, $v = 0 \pmod{A}$, коммутатор в правой части последнего равенства лежит в $[E(n, B), E(n, A)]$. С другой стороны, $Q_{i i} = 1 \pmod{B}$ и $g^{-1} = e \pmod{B}$, так что

$$e - g_{i e_j}(v g^{-1}) = e - e_i v \pmod{E(n, R, AB)},$$

и, таким образом, по модулю правой части первые два сомножителя сокращаются.

С другой стороны, если $j = i$, то $Q_{ji} = 0 \pmod{B}$, так что второй множитель в правой части выражения для $[e+eiv, g]$ лежит в $E(n, R, AB)$. Посмотрим теперь тщательнее на коммутатор в правой части. Он равен $e - (g^{e_i} - g^{e_j})vg^{-1}$, причем $Q_{ei} - g^{e_j} = Q_{jie} \pmod{B}$ и $Q^{-1} = e \pmod{B}$, значит в этом случае

$$[e - (se - Q_{jie})f, e - e_j(vQ^{-1})] = e - eiv \pmod{E(n, R, AB)},$$

и, таким образом, по модулю правой части сокращаются первый и третий сомножитель. Теорема полностью доказана.

3. Заключительные замечания. В заключение сформулируем несколько близких вопросов.

Задача 1. Доказать стандартные коммутационные формулы для всех классических групп и групп Шевалле.

Конечно, для расщепимых классических групп эту формулу можно доказать примерно также, используя построенное в [19, 21] разложение унитаров в этих случаях. Однако для исключительных групп сделать это на таком пути совсем непросто. С этой точки зрения представляют интерес следующие задачи.

Задача 2. Получить локализационное доказательство стандартной коммутационной формулы.

Задача 3. Доказать стандартную коммутационную формулу, используя релятивизацию с несколькими параметрами.

По поводу локализации см. [6, 9-11, 13, 14, 20] и содержащиеся там ссылки, а по поводу релятивизации—[5, 11, 13, 19, 21] и ссылки там.

Известно, что используя кратное коммутирование стандартную коммутационную формулу на абсолютном уровне можно подходящим образом усилить или ослабить. А именно, на стабильном уровне имеет место формула

$$[GL(n, R), GL(n, R, I)] = E(n, R, I),$$

которая вытекает из леммы Уайтхеда и инъективной стабилизации функтора K_1 . Нет, конечно, никакой надежды обобщить эту формулу. В [9], [15] приведены примеры, показывающие, что она, вообще говоря, не имеет места даже для очень хороших коммутативных колец. В частности, фактор-группа $GL(n, R)/E(n, R)$ не является абелевой. Тем не менее, для конечномерных коммутативных колец [9], [14] эта группа очень близка к нильпотентной, в частности, выполняется равенство

$$[GL(n, R), SL(n, R), \dots, SL(n, R)] = E(n, R),$$

где количество подгрупп $SL(n, R)$ в кратном коммутаторе больше или равно размерности кольца R .

Задача 4. Обобщить кратную коммутационную формулу на относительный случай.

Частично эта задача решена в работах [9], [10], но результаты этих работ нельзя считать полным аналогом теоремы настоящей работы, так как там рассматривается только случай одного идеала.

Пример Герасимова показывает, что для некоммутативных колец стандартная коммутационная формула, вообще говоря, не имеет места. Оказывается, однако, что для многих классов конечномерных колец таких, как PI-кольца [4] или слабо нетеровы кольца [3] подгруппа $E(n, R)$ субнормальна в $GL(n, R)$, точнее, для некоторого m выполняется равенство

$$[GL(n, R), E(n, R), \dots, E(n, R)] = E(n, R), \text{ где количество подгрупп } E(n, R) \text{ в}$$

кратном коммутаторе равно m .

Summary

N. A. Vavilov, A. V. Stepanov. Standard commutator formula.

Let R be a commutative ring with 1, $A, B < R$ be its ideals, $GL(n, R, A)$ be the principal congruence subgroup of level A in $GL(n, R)$, and $E(n, R, A)$ be the relative elementary subgroup of level A . We prove the following commutator formula

$$[E(n, R, A), GL(n, R, B)] = [E(n, R, A), E(n, R, B)],$$

which generalises known results. The proof is yet another variation on the theme of decomposition of unipotents.

Литература

1. Борович З. И., Вавилов Н. А. Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом // Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1984. Т. 165. С. 24-42.
2. Герасимов В. Н. Группа единиц свободного произведения колец // Мат. сб., 1987. Т. 134. Вып. 1. С. 42-65.
3. Голубчик И. З. О полной линейной группе над слабо нетеровыми ассоциативными кольцами // Фундам. и прикладн. мат., 1995. Т. 1. Вып. 3. С. 661-668.
4. Голубчик И. З., Михалев А. В. О группе элементарных матриц над PI-кольцами // Исследования по алгебре. Тбилиси, 1985. С. 20-24.
5. Степанов А. В. О нормальном строении полной линейной группы над кольцом // Зап. науч. семин. ПОМИ, 1997. Т. 236. С. 166-182.
6. Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов // Изв. АН СССР, Сер. Мат., 1977. Т. 141. Вып. 2. С. 235-253.
7. Туленбаев М. С. Мультипликатор Шура группы элементарных матриц конечного порядка // Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1979. Т. 86. С. 162-169.
8. Хлебунин С. Г. Некоторые свойства элементарной подгруппы // Алгебра, логика и теория чисел. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 86-90.
9. Bak A. Nonabelian K-theory: the nilpotent class of K_1 and general stability // K-Theory, 1991. Vol. 4. Issue 4. P. 363-397.
10. Bak A., Hazrat R., Vavilov N. Localization-completion, application to relative classical-like groups // J. Pure Appl. Algebra, 2008 (to appear).
11. Bak A., Vavilov N. Structure of hyperbolic unitary groups I. Elementary subgroups // Algebra Colloquium, 2000. Vol. 7. Issue 2. P. 159-196.
12. Bass H. K-theory and stable algebra // Inst. Hautes Etudes Sci., Publ. Math., 1964. Issue 22. P. 5-60.

13. *Hahn A. J., O'Meara O. T.* The classical groups and K-theory // Grundlehren Math. Wiss. Vol.291. Berlin et al.: Springer-Verlag, 1989.
14. *Hazrat R., Vavilov N.* K_1 of Chevalley groups are nilpotent // J. Pure Appl. Algebra, 2003. Vol. 179. P. 99-116.
15. *van der Kallen W.* A module structure on certain orbit sets of unimodular rows // J. Pure Appl. Algebra, 1989. Vol. 57. Issue 3. P. 281-316.
16. *Mason A. W.* On subgroups of $GL(n, A)$ which are generated by commutators. II // J. reine angew. Math., 1981. Vol.322. P.118-135.
17. *Mason A. W.* A further note on subgroups of $GL(n, A)$ which are generated by commutators // Arch. Math., 1981. Vol.37. Issue 5. P.401-405.
18. *Mason A. W., Stothers W. W.* On subgroups of $GL(n, A)$ which are generated by commutators // Invent. Math., 1974. Vol.23. P.327-346.
19. *Stepanov A., Vavilov N.* Decomposition of transvections: a theme with variations // K-Theory, 2000. Vol. 19. P. 109-153.
20. *Vaserstein L.N.* On the normal subgroups of the GL_n of a ring // Algebraic K-Theory, Evanston 1980 (Proc. Conf. Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1980), Lecture Notes in Math., 1981. Vol. 854. Springer, Berlin et al. P.454-465.
21. *Vavilov N.* Structure of Chevalley groups over commutative rings // Proc. Conf. Nonassociative Algebras and Related Topics (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., London et al., 1991. P. 219-335.

Статья поступила в редакцию 13 сентября 2007 г.