Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 521.1

Собственные и несобственные KS-матрицы [1]

С. М. Полещиков

Множество обобщенных KS-матриц разбивается на два класса в зависимости от знака определителя этих матриц.

Обобщенная KS-матрица четвертого порядка вычисляется по формуле

$$L(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top K_1 K_4 \\ \mathbf{u}^\top K_2 K_4 \\ \mathbf{u}^\top K_3 K_4 \\ \mathbf{u}^\top K_4 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^4$ и матрицы K_i, $i = 1, 2, 3, 4$, называемые образующими KS-матрицы, обладают свойствами

$$K_m{}^2 = -E, \quad K_m = -K_m{}^\top, \quad m = 1, 2, 3, 4,$$
$$K_i K_j + K_j K_i = 0, \quad K_i K_4 = K_4 K_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Как следует из [1] (см. теорему 1), для образующих KS-матриц возможен один из следующих случаев:
1) $K_1,\ K_2,\ K_3 \in \mathcal{L}(U, V, W),\ K_4 \in \mathcal{L}(X, Y, Z)$.
2) $K_1,\ K_2,\ K_3 \in \mathcal{L}(X, Y, Z),\ K_4 \in \mathcal{L}(U, V, W)$.
В первом случае будем говорить, что $L(\mathbf{u})$ является KS-матрицей первого типа, во втором случае — KS-матрицей второго типа.

Рассмотрим единичные векторы $\mathbf{u}$: $|\mathbf{u}| = 1$. Тогда получим

$$L(\mathbf{u}) L^\top(\mathbf{u}) = E.$$

То есть на единичной сфере S^3 матрица $L(\mathbf{u})$ является ортогональной в обычном смысле.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-02-03763а)

Ортогональные матрицы делятся на собственные (с определителем +1) и несобственные (с определителем −1). Поэтому множество KS-матриц естественным образом разбивается на два класса в зависимости от знака определителя матрицы $L(\mathbf{u})$.

Выясним зависимость знака определителя KS-матрицы от ее типа. В силу непрерывности функции $\det L(\mathbf{u})$ достаточно вычислить этот определитель при каком-нибудь векторе $\mathbf{u}$. Возьмем, например, $\mathbf{u} = (1,0,0,0)^{\top}$ и пусть $L(\mathbf{u})$ матрица первого типа. Тогда имеем

$$\det L(\mathbf{u}) =$$

$$= \begin{vmatrix} -a_{11}a_2 - a_{21}a_1 - a_{31}a_3 & a_{21}a_3 - a_{31}a_1 & -a_{11}a_3 + a_{31}a_2 & a_{11}a_1 - a_{21}a_2 \\ -a_{12}a_2 - a_{22}a_1 - a_{32}a_3 & a_{22}a_3 - a_{32}a_1 & -a_{12}a_3 + a_{32}a_2 & a_{12}a_1 - a_{22}a_2 \\ -a_{13}a_2 - a_{23}a_1 - a_{33}a_3 & a_{23}a_3 - a_{33}a_1 & -a_{13}a_3 + a_{33}a_2 & a_{13}a_1 - a_{23}a_2 \\ 0 & -a_2 & -a_1 & -a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \det(a_{ij}),$$

где $\mathbf{e}_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})^{\top}$ так называемые представляющие векторы матриц K_i, $i = 1,2,3$ и $\mathbf{e} = (a_1, a_2, a_3)^{\top}$ — представляющий вектор матрицы K_4. Значит, $\det L(\mathbf{u})$ не зависит от вектора $\mathbf{e}$.

Аналогичное вычисление даст $\det L(\mathbf{u}) = -\det(a_{ij})$, если $L(\mathbf{u})$ — матрица второго типа.

Таким образом, установлена формула

$$\det L\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right) = (-1)^{k+1} \det(a_{ij}),$$

где k — тип KS-матрицы: $k = 1,2$.

Литература

1. **Полещиков С. М., Холопов А. А.** Обобщенные KS-преобразования 4-го порядка// *Вестник Сыктывкар. ун-та. Сер.1.* Вып.2. 1996. С. 201–212.

Summary

Poleshchikov S. M. Proper and improper KS-matrices.

The set of KS-matrices is divided into two classes depending on the sign of their determinant.

Сыктывкарский лесной институт

Поступила 26.01.96