

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Русинов, Р.В.** Математическая модель теплового цикла поршневых двигателей внутреннего сгорания [Текст] / Р.В. Русинов, Р.Ю. Добрецов // Научно-технические ведомости, СПбГПУ. Сер.: Наука

и образование.— 2012. № 1 (142).— С. 182–188.

2. Теория ДВС [Текст]: учебное пособие / Под ред. Н.Х. Дьяченко. — М.: Машиностроение, 1974.— С. 121–133.

УДК 539.384: 629.12.011.001.24

*С.О. Барышников*

**СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ ОБШИВКИ СУДНА**

Обшивка судна, помимо поперечной нагрузки (давление воды и др.), испытывает и действие усилий в ее срединной поверхности, которые могут быть как растягивающими, так и сжимающими. Наиболее неприятен случай действия сжимающих сил, которые могут привести к потере устойчивости элементов обшивки. Основным силовым набором (шпангоуты, стрингеры) обшивка делится на прямоугольные панели (пластины), которые можно считать защемленными по всему контуру.

Известные решения (см. [1–4]) получены для шарнирно опертой пластины и пластины, две противоположные кромки которой защемлены, а две другие свободно оперты; там же приводятся исследования, касающиеся определения эйлеровой нагрузки. Однако во многих случаях расчетной схемой является пластина, защемленная по всем граням. Эта задача — более сложная и не имеет точного решения в замкнутой форме, а ее приближенные решения оставляют открытым вопрос о точности результатов. В данной работе точное решение достигается в ходе бесконечного итерационного процесса исправления невязок в граничных условиях [5]. При достижении заданной точности процесс прекращается.

Рассмотрим прямоугольную защемленную пластину с размерами в плане  $a \times b$  и постоянной толщиной  $h$ , нагруженную равномерной поперечной нагрузкой  $q_0$  и постоянными сжимающими усилиями  $T_x$  и  $T_y$ , приложенными к граням пластины (рис.1). Начало системы координат  $XOY$  поместим в центр пластины.

Дифференциальное уравнение изгиба такой пластины имеет вид [1, 2]

$$D \nabla^2 \nabla^2 W = q_0 - T_x \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - T_y \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}, \quad (1)$$

где  $W$  — прогиб срединной поверхности пластины;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4}{\partial Y^4}$  — бигармонический оператор.

Перейдем к безразмерным координатам  $x = X/b$ ,  $y = Y/b$ . Тогда уравнение (1) можно привести к виду

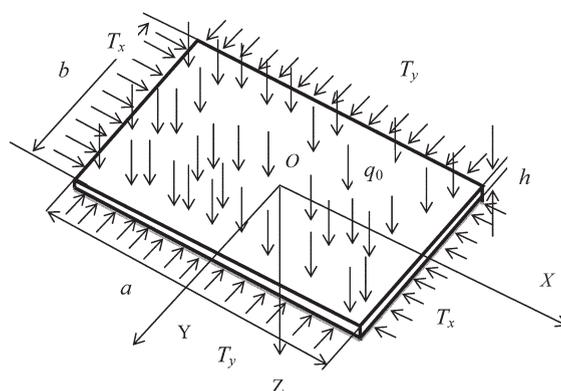


Рис. 1. Защемленная по контуру пластина под действием поперечной нагрузки и сжимающих усилий в срединной плоскости

$$\nabla^2 \nabla^2 w + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 1, \quad (2)$$

где  $w = \frac{WD}{q_0 b^4}$  — относительный прогиб;  $T_1 = \frac{b^2}{D} T_x$ ,

$T_2 = \frac{b^2}{D} T_y$  — относительные сжимающие усилия, приложенные к граням.

Относительные размеры пластины будут такими:  $-\gamma/2 \leq x \leq \gamma/2$ ,  $-1/2 \leq y \leq 1/2$ , где  $\gamma = a/b$ .

Граничные условия на защемленных кромках имеют вид

$$x = \pm \gamma/2 \text{ при } w = 0, \quad \partial w / \partial x = 0; \quad (3)$$

$$y = \pm 1/2 \text{ при } w = 0, \quad \partial w / \partial y = 0. \quad (4)$$

Задача ставится так: найти функцию прогибов  $w(x,y)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению (2) и граничным условиям (3), (4).

Разложим правую часть уравнения (2) в двойной ряд Фурье:

$$1 = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} q_{ks} \cos(\mu_s x) \cos(\lambda_k y), \quad (5)$$

где  $\mu_s = s\pi/\gamma$ ,  $\lambda_k = k\pi$ ;

$$q_{ks} = \frac{4}{\gamma} \int_{-\gamma/2}^{\gamma/2} \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\mu_s x) \cos(\lambda_k y) dx dy = \frac{16 (-1)^{\tilde{k}+1} (-1)^{\tilde{s}+1}}{\gamma \lambda_k \mu_s}, \quad (6)$$

Здесь  $\tilde{k} = (k+1)/2$ ,  $\tilde{s} = (s+1)/2$ . Тогда уравнение (2) примет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 w + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{16}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}+1} (-1)^{\tilde{s}+1} \frac{\cos(\mu_s x) \cos(\lambda_k y)}{\mu_s \lambda_k}. \quad (7)$$

Начальный компонент решения выберем в виде

$$w_0(x, y) =$$

$$= \frac{16}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} g_{ks} \frac{(-1)^{\tilde{k}} (-1)^{\tilde{s}}}{\lambda_k \mu_s} \cos(\mu_s x) \cos(\lambda_k y), \quad (8)$$

где  $g_{ks}$  — неопределенные коэффициенты.

Функция (8) удовлетворяет условиям отсутствия прогибов защемленных граней. Потребуем, чтобы она удовлетворяла и дифференциальному уравнению изгиба (7). Тогда для отыскания коэффициентов  $g_{ks}$  получаем уравнение

$$g_{ks} [(\lambda_k^4 + \mu_s^2)^2 - T_1 \mu_s^2 - T_2 \lambda_k^2] = 1,$$

из которого следует

$$g_{ks} = \frac{1}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2 - T_1 \mu_s^2 - T_2 \lambda_k^2}. \quad (9)$$

Начальный компонент (8) представляет известное решение для свободно опертой пластины.

Заметим, что для устойчивости свободно опертой пластины сжимающие усилия должны быть такими, чтобы знаменатель дроби (9) не обращался в ноль.

Начальное решение (8) не удовлетворяет лишь условиям отсутствия углов поворота заданных сечений (вторые условия в (3), (4)), т. е. порождает следующие невязки:

$$\theta_{x0} \Big|_{x=\gamma/2} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \Big|_{x=\gamma/2} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}+1} \alpha_{k0} \cos(\lambda_k y); \quad (10)$$

$$\theta_{y0} \Big|_{y=1/2} = \frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{y=1/2} = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}+1} \alpha_{s0}^* \cos(\mu_s x), \quad (11)$$

где

$$\alpha_{k0} = -\frac{16}{\gamma \lambda_k} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} g_{ks};$$

$$\alpha_{s0}^* = -\frac{16}{\gamma \mu_s} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} g_{ks}. \quad (12)$$

Заметим, что на противоположных гранях выражения (10) и (11) поменяют знак.

Чтобы компенсировать невязки (10), (11), поступим следующим образом. Добавим к начальному решению  $w_0$  функцию вида



$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{k}+1} A(k) \operatorname{ch}(\beta_k x) \cos(\lambda_k y), \quad (13)$$

где  $A(k), \beta_k$  — неопределенные коэффициенты.

Потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла соответствующему однородному дифференциальному уравнению задачи

$$\nabla^2 \nabla^2 w + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

Тогда для определения коэффициентов  $\beta_k$  получаем биквадратное уравнение

$$\beta_k^4 - 2\lambda_k^2 \mu_s^2 + \lambda_k^4 + T_1 \beta_k^2 - T_2 \lambda_k^2 = 0, \quad (15)$$

из которого находим

$$\beta_k^2 = \frac{1}{2} \left[ 2\lambda_k^2 - T_1 + \sqrt{4\lambda_k^2 (T_2 - T_1) + T_1^2} \right];$$

$$\bar{\beta}_k^2 = \frac{1}{2} \left[ 2\lambda_k^2 - T_1 - \sqrt{4\lambda_k^2 (T_2 - T_1) + T_1^2} \right].$$

Подкоренные выражения в этих формулах могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от величин  $T_1$  и  $T_2$ . В последнем случае выражения для  $\beta_k^2$  и  $\bar{\beta}_k^2$  будут комплексными. В силу четности функции  $\operatorname{ch}(\beta_k x)$  получим

$$\beta_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 2\lambda_k^2 - T_1 + \sqrt{4\lambda_k^2 (T_2 - T_1) + T_1^2} \right]};$$

$$\bar{\beta}_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 2\lambda_k^2 - T_1 - \sqrt{4\lambda_k^2 (T_2 - T_1) + T_1^2} \right]}. \quad (16)$$

Поскольку вместо одной последовательности коэффициентов  $\beta_k$  получено две (16), то функция (13) преобразуется так:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{k}+1} (A_k \operatorname{ch}(\beta_k x) + B_k \operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x)) \cos(\lambda_k y), \quad (17)$$

где коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  должны быть такими, чтобы функция (17) удовлетворяла граничным условиям (3), т. е. компенсировала бы невязку (10). (Невязкой (11) мы займемся позже.) Это дает систему двух уравнений

$$\begin{cases} A_k \operatorname{ch} \frac{\beta_k \gamma}{2} + B_k \operatorname{ch} \frac{\bar{\beta}_k \gamma}{2} = 0, \\ A_k \beta_k \operatorname{sh} \frac{\beta_k \gamma}{2} + B_k \bar{\beta}_k \operatorname{sh} \frac{\bar{\beta}_k \gamma}{2} = -\alpha_{k0}, \end{cases} \quad (18)$$

из которой получим

$$A_k = -\frac{\alpha_{k0}}{\operatorname{ch} \frac{\beta_k \gamma}{2} \left( \beta_k \operatorname{th} \frac{\beta_k \gamma}{2} - \bar{\beta}_k \operatorname{th} \frac{\bar{\beta}_k \gamma}{2} \right)},$$

$$B_k = -\frac{\operatorname{ch}(\beta_k \gamma / 2)}{\operatorname{ch}(\bar{\beta}_k \gamma / 2)} A_k. \quad (19)$$

Функция прогибов (17) на гранях  $y = \pm 1/2$  равна нулю, но порождает угловые деформации заделанных сечений, т. е. дает невязки, подобные (11):

$$\begin{aligned} \theta_{yI} \Big|_{y=\frac{1}{2}} &= \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=\frac{1}{2}} = \\ &= -\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k (A_k \operatorname{ch}(\beta_k x) + B_k \operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x)). \end{aligned} \quad (20)$$

Разложим гиперболические косинусы в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\beta_k x) &= \frac{4}{\gamma} \operatorname{ch} \frac{\beta_k \gamma}{2} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}+1} \frac{\mu_s \cos(\mu_s x)}{\beta_k^2 + \mu_s^2}, \\ \operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x) &= \\ &= \frac{4}{\gamma} \operatorname{ch} \frac{\bar{\beta}_k \gamma}{2} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}+1} \frac{\mu_s \cos(\mu_s x)}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20) и переставляя знаки суммирования, после преобразований получим

$$\theta_{yI} \Big|_{y=\frac{1}{2}} = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}+1} \alpha_{sI}^* \cos(\mu_s x), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{sI}^* &= \\ &= -\frac{4\mu_s}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{g_{ks} \lambda_k \sqrt{4\lambda_k^2 (T_2 - T_1) + T_1^2}}{\beta_k \operatorname{th} \frac{\beta_k \gamma}{2} - \bar{\beta}_k \operatorname{th} \frac{\bar{\beta}_k \gamma}{2}} \alpha_{k0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Сложим теперь невязки (11) и (22):

$$\theta_{yI} \Big|_{y=\frac{1}{2}} = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}+1} \alpha_{sI}^* \cos(\mu_s x). \quad (24)$$

Здесь  $\alpha_{sI}^* = \alpha_{sI}^* + \alpha_{s0}^*$ .

Теперь, чтобы их устранить, добавим к решению функцию, аналогичную (13):

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}+1} C(s) \operatorname{ch}(\xi_s y) \cos(\mu_s x), \quad (25)$$

где  $\xi_s$ ,  $C(s)$  подлежат определению. Подчиняя эту функцию однородному дифференциальному уравнению изгиба (14), получим для коэффициентов  $\xi_s$  биквадратное уравнение

$$\xi_s^4 - 2\mu_s^2 \xi_s^2 + \mu_s^4 - T_1 \mu_s^2 + T_2 \xi_s^2 = 0, \quad (26)$$

которое дает

$$\xi_s = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 2\mu_s^2 - T_2 + \sqrt{4\mu_s^2(T_1 - T_2) + T_2^2} \right]};$$

$$\bar{\xi}_s = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 2\mu_s^2 - T_2 - \sqrt{4\mu_s^2(T_1 - T_2) + T_2^2} \right]}. \quad (27)$$

Заметим, что формулы (26), (27) аналогичны (15) и (16). Здесь так же корни могут быть как действительными, так и комплексными.

С учетом (27) функция (25) запишется в виде

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}+1} \left( C_s \operatorname{ch}(\xi_s y) + D_s \operatorname{ch}(\bar{\xi}_s y) \right) \cos(\mu_s x). \quad (28)$$

Потребуем, чтобы она удовлетворяла условиям (4) на грани  $y = \pm 1/2$ , компенсируя при этом невязку (24). Тогда для определения коэффициентов  $C_s$ ,  $D_s$  получим систему, аналогичную (18):

$$\begin{cases} C_s \operatorname{ch} \frac{\xi_s}{2} + D_s \operatorname{ch} \frac{\bar{\xi}_s}{2} = 0; \\ C_s \xi_s \operatorname{sh} \frac{\xi_s}{2} + D_s \bar{\xi}_s \operatorname{sh} \frac{\bar{\xi}_s}{2} = -\alpha_{sI}^*, \end{cases} \quad (29)$$

из которой находим

$$C_s = -\frac{\alpha_{sI}^*}{\operatorname{ch} \frac{\xi_s}{2} \left( \xi_s \operatorname{th} \frac{\xi_s}{2} - \bar{\xi}_s \operatorname{th} \frac{\bar{\xi}_s}{2} \right)};$$

$$D_s = -C_s \frac{\operatorname{ch}(\xi_s/2)}{\operatorname{ch}(\bar{\xi}_s/2)}. \quad (30)$$

Функция (28) удовлетворяет условию отсутствия прогибов граней  $x = \pm \gamma/2$ , но подобно функции (17) дает угловые деформации этих граней:

$$\theta_{x1} |_{x=\gamma/2} = \frac{\partial w_2}{\partial x} |_{x=\gamma/2} =$$

$$= - \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s \left( C_s \operatorname{ch}(\xi_s y) + D_s \operatorname{ch}(\bar{\xi}_s y) \right). \quad (31)$$

Разлагая гиперболические косинусы в ряды Фурье по формулам, аналогичным (21),

$$\operatorname{ch}(\xi_s y) = 4 \operatorname{ch} \frac{\xi_s}{2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{k}+1} \frac{\lambda_k \cos(\lambda_k y)}{\xi_s^2 + \lambda_k^2},$$

$$\operatorname{ch}(\bar{\xi}_s y) = 4 \operatorname{ch} \frac{\bar{\xi}_s}{2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{k}+1} \frac{\lambda_k \cos(\lambda_k y)}{\bar{\xi}_s^2 + \lambda_k^2}, \quad (32)$$

подставляя (30), (32) в (31) и переставляя знаки суммирования, получим

$$\theta_{x1} |_{x=\gamma/2} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{k}+1} \alpha_{k1} \cos(\lambda_k y), \quad (33)$$

где

$$\alpha_{k1} = -4\lambda_k \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{g_{ks} \mu_s \sqrt{4\mu_s^2(T_1 - T_2) + T_2^2}}{\xi_s \operatorname{th} \frac{\xi_s}{2} - \bar{\xi}_s \operatorname{th} \frac{\bar{\xi}_s}{2}} \alpha_{sI}^*. \quad (34)$$

Таким образом, после наложения каждой из пары функций  $w_1(x, y)$ ,  $w_2(x, y)$ , которые мы будем называть исправляющими, остаются невыполненными граничные условия по углам поворота смежных заделанных кромок. Поэтому полное устранение невязок достигается бесконечным наложением исправляющих функций типа (17) и (28), т. е. в ходе итерационного процесса, который нетрудно реализовать на компьютере. Невязки выполнения граничных условий должны убывать по абсолютной величине. При достижении заданной точности вычислений итерационный процесс прекращается.

Последующие пары исправляющих функций будут иметь вид

$$w_{1n}(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{k}+1} (A_{kn} \operatorname{ch} \beta_k x + B_{kn} \operatorname{ch} \bar{\beta}_k x) \cos \lambda_k y; \quad (35)$$

$$w_{2n}(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}+1} (C_{sn} \operatorname{ch}(\xi_s y) + D_{sn} \operatorname{ch}(\bar{\xi}_s y)) \cos \mu_s x, \quad (36)$$

где  $n$  — номер итерации ( $n = 2, 3, \dots$ ), а коэффициенты рядов вычисляются по формулам

$$A_{kn} = -\frac{\alpha_{k(n-1)}}{\operatorname{ch} \frac{\beta_k \gamma}{2} \left( \beta_k \operatorname{th} \frac{\beta_k \gamma}{2} - \bar{\beta}_k \operatorname{th} \frac{\bar{\beta}_k \gamma}{2} \right)};$$

$$B_{kn} = -\frac{\operatorname{ch}(\beta_k \gamma / 2)}{\operatorname{ch}(\bar{\beta}_k \gamma / 2)} A_{kn}; \quad (37)$$

$$C_{sn} = -\frac{\alpha_{sn}^*}{\operatorname{ch} \frac{\xi_s}{2} \left( \xi_s \operatorname{th} \frac{\xi_s}{2} - \bar{\xi}_s \operatorname{th} \frac{\bar{\xi}_s}{2} \right)};$$

$$D_{sn} = -C_{sn} \frac{\operatorname{ch}(\xi_s / 2)}{\operatorname{ch}(\bar{\xi}_s / 2)}, \quad (38)$$

где в свою очередь

$$\begin{aligned} & \alpha_{k(n-1)} = \\ & = -4\lambda_k \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{g_{ks} \mu_s \sqrt{4\mu_s^2 (T_1 - T_2) + T_2^2}}{\xi_s \operatorname{th} \frac{\xi_s}{2} - \bar{\xi}_s \operatorname{th} \frac{\bar{\xi}_s}{2}} \alpha_{s(n-1)}^*; \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{sn}^* = \\ & = -\frac{4\mu_s}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{g_{ks} \lambda_k \sqrt{4\lambda_k^2 (T_2 - T_1) + T_1^2}}{\beta_k \operatorname{th} \frac{\beta_k \gamma}{2} - \bar{\beta}_k \operatorname{th} \frac{\bar{\beta}_k \gamma}{2}} \alpha_{k(n-1)}. \quad (40) \end{aligned}$$

В силу линейности задачи искомое решение можно записать так:

$$\begin{aligned} & w(x, y) = \\ & = \frac{16}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} g_{ks} \frac{(-1)^k (-1)^s}{\lambda_k \mu_s} \cos(\mu_s x) \cos(\lambda_k y) + \\ & + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{k+1} (A_{k\Sigma} \operatorname{ch}(\beta_k x) + \\ & + B_{k\Sigma} \operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x)) \cos(\lambda_k y) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{s+1} (C_{s\Sigma} \operatorname{ch}(\xi_s y) + \\ & + D_{s\Sigma} \operatorname{ch}(\bar{\xi}_s y)) \cos(\mu_s x), \quad (41) \end{aligned}$$

где  $A_{k\Sigma} = A_k + A_{k2} + \dots + A_{kn}$ , ...,  $D_{s\Sigma} = D_s + D_{s2} + \dots + D_{sn}$  — суммарные значения коэффициентов рядов по всем итерациям.

Условие сходимости итерационных решений к точному решению задачи можно записать в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{kn}, \alpha_{ks}^*) = 0 \quad (k, s = 1, 3, \dots). \quad (42)$$

В качестве примера рассмотрим случай  $T_1 = T_2 = T$ , т. е. когда пластина одинаково сжимается с обеих сторон. Формулы (9), (16), (27), (23), (34) примут вид

$$g_{ks} = \frac{1}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)(\lambda_k^2 + \mu_s^2 - T)}; \quad (43)$$

$$\beta_k = \lambda_k; \quad \bar{\beta}_k = \sqrt{\lambda_k^2 - T}; \quad (44)$$

$$\xi_s = \mu_s; \quad \bar{\xi}_s = \sqrt{\mu_s^2 - T}; \quad (45)$$

$$\alpha_{s1}^* = -\frac{4T}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{g_{ks} \lambda_k \alpha_{k0}}{\beta_k \operatorname{th} \frac{\beta_k \gamma}{2} - \bar{\beta}_k \operatorname{th} \frac{\bar{\beta}_k \gamma}{2}}; \quad (46)$$

$$\alpha_{k1} = -4\lambda_k T \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{g_{ks} \mu_s \alpha_{s1}^*}{\xi_s \operatorname{th} \frac{\xi_s}{2} - \bar{\xi}_s \operatorname{th} \frac{\bar{\xi}_s}{2}}. \quad (47)$$

(Если  $T < \pi^2$ , то для квадратной пластины подкоренные выражения будут всегда положительными.)

Для вычисления прогибов была составлена программа в системе аналитических вычислений

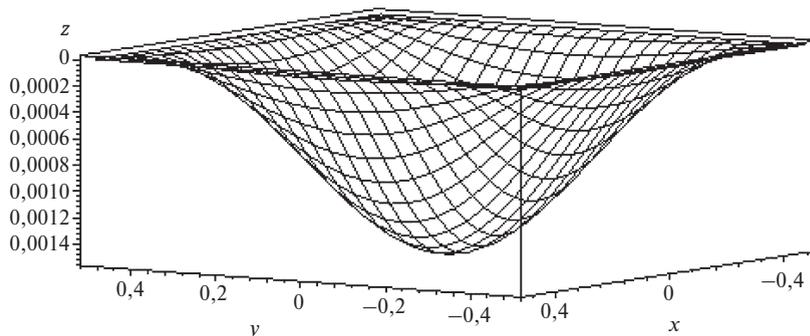


Рис. 2. Изогнутая поверхность квадратной пластины при  $T = 9$

*Maple 14*. В рядах удерживалось 199 членов, число итераций — 12. При дальнейшем увеличении этих параметров первые пять значащих цифр не изменялись. Процесс быстро сходился. Для проверки правильности работы программы сначала сжимающие усилия принимались равными единице. При этом максимальный прогиб в центре квадратной пластины составил 0,0012904. Для сравнения: при отсутствии сжимающих усилий в работе [2] получено значение 0,00126. Таким образом, сжимающие усилия в плоскости пластины увеличивают ее прогиб.

На рис. 2 приведена изогнутая поверхность квадратной пластины при  $T = 9$ . Максимальный относительный прогиб составил 0,0015332.

Зная функцию прогибов (41), нетрудно получить выражения изгибающих моментов и произвести их вычисления.

Предложенный метод позволяет получить решение, сколь угодно близкое к точному, увеличением количества членов в рядах и числа итераций. Вычислительный алгоритм весьма прост. Анализ сходимости итерационных решений можно проводить численно в ходе самого процесса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Папкович, П.Ф. Строительная механика корабля. Часть II [Текст] / П.Ф. Папкович.— Л.: Гос. союзное изд-во судостр. промыш-сти, 1941.— 960 с.

2. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер.— М.: Физматгиз, 1963.

3. Тимошенко, С.П. Устойчивость упругих систем [Текст] / С.П. Тимошенко.— М.: Гостехиздат, 1955.

4. Голоскоков, Д.П. Математическое моделирование упругих тонкостенных систем [Текст] / Д.П. Голоскоков, А.А. Грищенко.— СПб.: Изд-во СПГУВК, 1999.

4. Сухотерин, М.В. Об одном методе исследования защемленной по контуру прямоугольной пластины [Текст] / М.В. Сухотерин.— Докл. АН Армянской ССР.— 1987.— Т. LXXXV, 4.— С. 147–151.