

УДК 512+519.17+517.987

СЛОВА С МИНИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ РОСТА

А. Л. Чернятьев

Введение. В работе изучаются бесконечные слова над конечным алфавитом $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Через A^+ обозначается множество всех конечных последовательностей символов, или *слов*. Бесконечное слово $W = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (или *сверхслово*) — это бесконечная (в обе стороны) последовательность символов из A . Конечное слово всегда может быть единственным образом представлено в виде $w = w_1 \dots w_n$, где $w_i \in A, 1 \leq i \leq n$. Число n называется *длиной слова* w и обозначается через $|w|$, количество вхождений в слово w символа $a_i \in A$ обозначается через $|w|_{a_i}$. Множество всех (конечных и бесконечных) подслов слова W обозначим через $F(W)$, множество подслов длины n — через $F_W(n)$, количество различных подслов длины n — через $T_W(n) = \text{Card } F_W(n)$, функция $T_W : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется *функцией сложности* слова W . Слово W называется *рекуррентным*, если любое его подслово встречается в нем бесконечно много раз. Известна классическая

Теорема эквивалентности [1]. Пусть W — бесконечное рекуррентное слово над бинарным алфавитом $A = \{a, b\}$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) слово W является словом Штурма, т.е. имеет функцию сложности $T_W(n) = n + 1$;
- 2) слово не периодически и является сбалансированным, т.е. для любых двух подслов $u, v \subset W$ одинаковой длины выполняется неравенство $||v|_a - |u|_a| \leq 1$;
- 3) слово $W = (w_n)$ является механическим словом с иррациональным α , т.е. существуют иррациональное число α , $x_0 \in [0, 1]$ и интервал $U \subset \mathbb{S}^1$, $|U| = \alpha$, такие, что выполняется условие

$$w_n = \begin{cases} a, & T_\alpha^n(x_0) \in U; \\ b, & T_\alpha^n(x_0) \notin U. \end{cases}$$

В общем случае, когда мы имеем компактное множество M , гомеоморфизм $f : M \rightarrow M$, открытое подмножество $U \subset M$ и траекторию $\dots, f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$ начальной точки $x_0 \in M$, говорят, что система (M, f, U, x_0) порождает слово $W = (w_n)$, если $w_n = a \iff f^n(x_0) \in U$ и $w_n = b \iff f^n(x_0) \notin U$. Аналогично рассматривается вариант разбиения на несколько характеристических подмножеств и слов над многобуквенными алфавитами [2].

Бесконечное слово $W = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ над алфавитом $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ называется *словом медленного роста*, если существует натуральное число N , такое, что функция роста удовлетворяет соотношению $T_W(n+1) - T_W(n) = 1$ при всех $n \geq N$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть W — рекуррентное слово над произвольным конечным алфавитом A . Тогда следующие условия на слово W эквивалентны:

- 1) слово W является словом медленного роста;
- 2) существуют иррациональное число α и целые $n_1, n_2, \dots, n_m$, такие, что слово W порождается динамической системой $(\mathbb{S}^1, T_\alpha, I_{a_1}, \dots, I_{a_n}, x)$, где T_α — сдвиг окружности на иррациональную величину α , I_{a_i} — объединение дуг вида $(n_j \alpha, n_{j+1} \alpha)$.

Основные понятия и определения. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — конечный алфавит. Рассмотрим бесконечное слово W над A . Пусть v — его подслово и $x \in A$.

1. Символ x называется *левым (правым) расширением* v , если xv (vx) принадлежит $F(W)$.
2. Подслово v называется *левым (правым) специальным подсловом*, если для него существуют два или более левых (правых) расширения.
3. Подслово v называется *биспециальным*, если оно является и левым, и правым специальным подсловом одновременно.
4. Количество различных левых (правых) расширений подслова называется *левой (правой) валентностью* этого подслова.

Описание бесконечного слова W можно также представить в терминах *графов подслов*, или графов Розы (см. [3]), которые строятся следующим образом: k -*граф* слова W — ориентированный граф, вершины которого взаимно однозначно соответствуют подсловам длины k слова W , из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в W есть подслово длины $k+1$, у которого первые k символов — подслово, соответствующее A , а последние k символов — подслово, соответствующее B . Таким образом, ребра k -графа

биективно соответствуют $(k+1)$ -подсловам слова W . Ясно, что в k -графе G слова W правым (левым) специальным словам соответствуют вершины, из которых выходит (в которые входит) больше одной стрелки. Такие вершины мы будем называть *развилками*. Граф G будем называть *сильно связным*, если из любой вершины в любую вершину можно перейти по стрелкам.

Последователем ориентированного графа G будем называть ориентированный граф $\text{Fol}(G)$, построенный следующим образом: вершины графа $\text{Fol}(G)$ биективно соответствуют ребрам графа G , из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в графе G конечная вершина ребра A является начальной вершиной ребра B . Нетрудно видеть, что $(k+1)$ -граф слова W является подграфом графа последователя $\text{Fol}(G)$ и получается из него удалением некоторых ребер. Эти ребра соответствуют *минимальным не встречающимся словам*, т.е. таким конечным словам u , что u не является подсловом W , но любое подслово u является подсловом W . Если для некоторого графа G существует такой граф G' , что $G = \text{Fol}(G')$, то G' называется *предшественником* G . Для заданного слова W последовательность графов Рози $G_1, G_2, \dots$ называется *эволюцией графов* данного слова.

Графы Рози слов медленного роста. Пусть W — рекуррентное слово медленного роста над алфавитом $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, т.е. $T_W(n+1) - T_W(n) = 1$ для $n \geq N$.

Рассмотрим эволюцию k -графов этого слова начиная с $k = N$. Пусть N -граф содержит m вершин. Поскольку $(N+1)$ -граф содержит $m+1$ вершину, то количество ребер в N -графе равно $m+1$. Легко видеть, что в этом случае граф имеет ровно одну входящую и ровно одну выходящую развилку, которые, возможно, совпадают (если данная вершина соответствует биспециальному слову).

Все ориентированные графы с одной входящей и одной выходящей развилками можно разбить на два класса: сильно связные и не являющиеся таковыми. Поскольку мы считаем, что слово W рекуррентно, нас интересует только случай сильной связности. Назовем эволюцию графов $G_1, G_2, \dots$ слова W *асимптотически правильной*, если для любого $k \geq 1$ граф G_k является сильно связным и начиная с какого-то l все k -графы ($k \geq l$) имеют ровно одну входящую и одну выходящую развилку. При $l = 1$ назовем такую эволюцию *правильной*. Ясно, что а) слово W является словом Штурма тогда и только тогда, когда эволюция графов Рози данного слова правильная и G_1 содержит ровно две вершины, и б) слово W является словом медленного роста тогда и только тогда, когда эволюция графов Рози асимптотически правильная. Несложно видеть, что существуют ровно один путь, ведущий из входящей развилки в выходящую (назовем его *перегородкой*), и ровно два пути из выходящей развилки во входящую (будем называть их *дугами*).

Предложение 1. Пусть k -граф слова W имеет перегородку длины $l \geq 1$ и дуги длины r, s . Тогда последователь $\text{Fol}(G)$ имеет перегородку длины $l-1$, дуги длины $r+1$ и $s+1$ и совпадает с $(k+1)$ -графом слова W .

Рассмотрим теперь предельный случай, когда перегородка вырождается, т.е. входящая развилка совпадает с выходящей. В этом случае развилка соответствует биспециальному слову.

Предложение 2. Последователь графа с вырожденной перегородкой имеет две входящие и две выходящие развилки.

Доказательство. Пусть u — биспециальное подслово W , т.е. $a_i u, a_j u, u a_r, u a_s$ — тоже подслова W при некоторых $a_i, a_j, a_r, a_s \in A$. Тогда развилками (входящими и выходящими) в $\text{Fol}(G)$ будут вершины, соответствующие этим словам.

Таким образом, для $(k+1)$ -графа слова W имеются четыре возможности для удаления одного ребра из $\text{Fol}(G)$, соответствующего минимальному запрещенному $(k+2)$ -слову: $a_i u a_r, a_i u a_s, a_j u a_s, a_j u a_r$. В двух случаях мы получаем сильно связный граф, а в двух — не сильно связный.

Непосредственной проверкой доказывается

Предложение 3. Пусть в графе G перегородка вырождена, а дуги имеют длину r, s соответственно. Тогда $(k+1)$ -граф имеет вид $(s-1, 1, r+1)$ или $(r-1, 1, s+1)$.

Предложение 4. Любой граф G с одной входящей и одной выходящей развилками имеет предшественника, причем только одного.

Доказательство. Пусть граф имеет вид (l, r, s) . Заметим, что графа с $r = s = 1$ не бывает. В случае, если $r, s > 1$, граф предшественника имеет вид $(l+1, r-1, s-1)$; если $(l, 1, s), s > 1$, то — вид $(0, l+1, s-1)$; если $(l, r, 1), r > 1$, то — вид $(0, s+1, l-1)$. Граф вида $(0, 1, k)$ имеет предшественника $(0, 1, k-1)$.

Доказательство основной теоремы. Теперь покажем, как по соответствующему графу слов построить динамическую систему, которая порождала бы данное слово.

Пусть слово W имеет минимальный рост, т.е. $T_W(n+1) - T_W(n) = 1$ для $n \geq k$ начиная с некоторого k . Поскольку каждый граф имеет единственного предшественника, то существует правильная эволюция графов $G'_1, G'_2, \dots, G'_n, \dots$, таких, что G'_n совпадает с k -графом слова W , G'_{n+1} совпадает с $(k+1)$ -графом и т.д.

Эта правильная эволюция соответствует некоторому слову Штурма V . Значит, существует взаимно однозначное соответствие между k -словами слова W и n -словами слова Штурма V , при этом соответствие продолжается на $(k+1)$ -слова W и $(n+1)$ -слова V и т.д.

Разберем сначала случай, когда $k=1$. Символам алфавита A взаимно однозначно соответствуют n -слова некоторого слова Штурма V . По теореме эквивалентности слово V порождается сдвигом окружности T_α . Как было показано выше, n -словам в динамике соответствуют интервалы разбиения: слову $w = c_1 c_2 \dots c_n$ ($c_i \in \{a, b\}$) — интервал $I_w = T_\alpha^{-n+1}(I_{c_1}) \cap T_\alpha^{-n+2}(I_{c_2}) \cap \dots \cap I_{c_n}$, где I_{c_i} — характеристический интервал для c_i . В динамике, порождающей слова Штурма, интервалы I_w , соответствующие n -словам, будут иметь вид $I_w = (n_i \alpha, n_{i+1} \alpha)$, где n_i — некоторые целые числа. Тогда характеристическим множеством для каждого символа $a_i \in A$ будет являться интервал I_w , такой, что слово w соответствует данному символу. Ясно тогда, что слово W будет порождаться тем же сдвигом T_α и характеристическими множествами I_w .

Теперь разберем общий случай. Пусть k -словам слова W соответствуют n -слова слова Штурма V . Точно так же мы можем построить соответствие между интервалами разбиения для n -слов слова Штурма I_w и k -словами слова V . Построим характеристическое множество для каждого символа $a_i \in A$. А именно символу a_i поставим в соответствие все интервалы, которые соответствуют словам, начинающимся на a_i . В этом случае характеристическое множество для произвольного символа может быть несвязным и представлять собой объединение нескольких интервалов. Покажем, что при таком выборе характеристических множеств найдется точка, эволюция которой будет совпадать с W .

Действительно, пусть слово W начинается с некоторого k -слова $w = c_1 c_2 \dots c_k$. Ему мы поставим в соответствие интервал I_w . Рассмотрим следующий $(k+1)$ -й символ c_{k+1} , этому $(k+1)$ -слову мы поставим в соответствие интервал $I_{w'}$, где $w' = c_1 c_2 \dots c_{k+1}$, и т.д.

Получаем бесконечное множество вложенных интервалов $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, которые в силу равномерности сдвига окружности могут иметь только одну предельную точку. Эволюция этой точки и будет совпадать со словом W .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Morse M., Hedlund G. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories // Amer. J. Math. 1940. **62**. 1–42.
2. Белов А.Я., Кондаков Г.В. Обратные задачи символической динамики // Фунд. и прикл. матем. 1995. **1**, № 1. 71–79.
3. Rauzy G. Mots infinis en arithmetique // Automata on Infinite Words: Ecole de Printemps d'Informatique Theorique, Le Mont Dore, May 1984/ Ed. by M. Nivat, D. Perrin, Lect. Notes Comput. Sci. Vol. 192. 1985. Berlin etc.: Springer-Verlag, 165–171.

Поступила в редакцию
04.07.2007

УДК 511

О КОНСТАНТАХ В НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. Х. Гияси

В 1918 г. для первообразного характера Дирихле χ по простому модулю q И. М. Виноградов [1–3] и Г. Поля [4] независимо доказали, что

$$|T(N)| = \left| \sum_{n \leq N} \chi(n) \right| < \sqrt{q} \log q.$$

Положим $S(\chi) = \max_{N \geq 1} |T(N)|$.

Э. Ландау рассмотрел задачу оценки постоянной b в следующем неравенстве:

$$S(\chi) \leq b \sqrt{q} \log q (1 + o(1)).$$