

$$\omega_{\max}^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{C_y}{J_1 J_2} (C_m I_{\text{до}} + M_-),$$

где t_1 – длительность 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10 и 11-го этапов, с; t_2 – длительность 3-го этапа, с; t_3 – длительность 6-го этапа, с; t_4 – длительность 9-го этапа, с; $\omega_{\max}^{(3)}$, $\omega_{\max}^{(3)}$ – максимальное при разгоне и при торможении значение третьей производной угловой скорости исполнительного органа механизма, рад/с⁴.

Полученные результаты исследований позволяют перейти к разработке задатчика интенсивности, формирующего близкую к оптимальной по быстродействию диаграмму перемещения электропривода с упру-

гим валопроводом при ограничениях по току и скорости механизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чистов В.П., Бондаренко В.И., Святославский В.А. Оптимальное управление электрическими приводами постоянного тока. – М.: Энергия, 1968.
2. Петров Ю.П. Оптимальное управление электрическим приводом с учетом ограничений по нагреву. – М.: Энергия, 1971.

Кафедра электроснабжения промышленных предприятий
Поступила 11.12.06 г.

621.979

СКОЛЬЖЕНИЕ КОЛЕСА ПРИ КАЧЕНИИ

В.П. БОРОДЯНСКИЙ

Кубанский государственный технологический университет

Фрикционные пары качения (колесо–основание) широко используются в технологических и транспортных машинах. Качение колеса как процесс силового взаимодействия двух тел достаточно глубоко изучен. При этом особое внимание уделено деформации в зоне контакта и связанного с ней относительного смещения точек контактирующих тел [1, 2]. Смещение тел на поверхности контакта является источником потерь на трение и причиной их износа [3, 4].

Для решения задачи определения смещения точек обода катящегося колеса относительно неподвижного основания будем считать, что в момент контакта тела являются отвердевшими [5]. Такой искусственный прием в сочетании с положением о совпадении направлений векторов скорости контактирующей точки колеса и равнодействующей, проходящей через эту точку, позволяет вести кинематический и силовой анализ

взаимодействия катящегося колеса с неподвижным основанием.

Смещение точки обода колеса относительно основания определяется скоростью скольжения. Термин «скольжение» – условный. Фактически на линии поверхности контакта колеса с основанием может происходить не скольжение, а деформация контактирующих тел, поэтому, рассматривая взаимодействие колеса с основанием, определяем касательную составляющую скоростей точек обода колеса. Величина этой составляющей практически влияет на износ обода колеса как в случае скольжения, так и в случае деформации. Рассмотрим варианты качения колеса ведомого и ведущего.

Ведомое упругое колесо, нагруженное вертикальной силой F_0 и горизонтальной движущей силой F_d , показано на рис. 1.

Полагаем, что равнодействующая P_{21} реакции основания 2 проходит через точку A и тогда равновесие системы будет при условии $\vec{F} + \vec{P}_{21} = 0$. Вектор V_{12} скорости точки A обода колеса совпадает с направлением вектора $F = P_{12}$. Мгновенный центр скоростей (МЦС) колеса точки C будет на пересечении перпендикуляров к векторам V_{12} в точке A и V_0 в точке O .

Положение точки C определяется расстоянием $BC = b$. По известной величине деформации колеса, которую определяет угол $\beta_{\max}$ на входе обода в контакт с поверхностью основания, и углу α определяем BC :

$$BC = b = AB \operatorname{tg} \alpha = r \cos \beta_{\max} \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1)$$

Для точки A скорость скольжения V_{12}^r (рис. 2):

$$V_{12}^r = V_{12} \sin \alpha = \omega AC \sin \alpha = \omega \frac{BC}{\sin \alpha} \sin \alpha = \omega b. \quad (2)$$

Для любой точки обода скорость скольжения будет такая же. Например, для точки D скорость V_{12}^r будет

$$V_{12}^r = \omega CD \sin \alpha = \omega \frac{b}{\sin \alpha} \sin \alpha = \omega b. \quad (3)$$

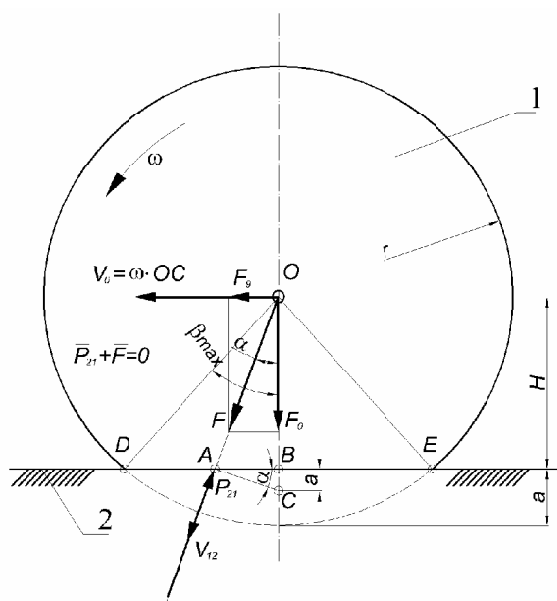


Рис. 1

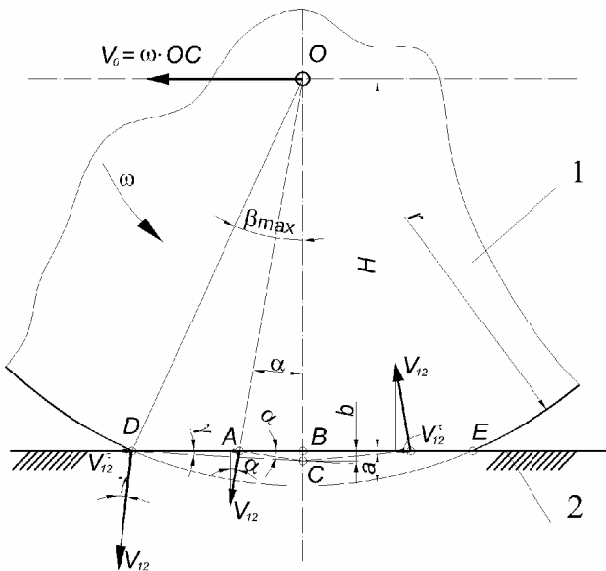


Рис. 2

Таким образом, любая точка на поверхности контакта колеса с основанием будет иметь скорость скольжения, с учетом зависимости (1)

$$V_{12}^{\tau} = \omega r \cos \beta_{\max} \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (4)$$

Чем больше деформация колеса (угол $\beta_{\max}$) и, соответственно, угол α , тем значительнее смещение точек контакта колеса и основания.

При движении по жесткому основанию ведущего упругого колеса, нагруженного силами F_0 , F_c и моментом M (рис. 3), вектор равнодействующей P_{12} наклонен в сторону движения колеса. Мгновенный центр скоростей оказывается выше линии контакта ED . Поэтому проекция вектора V_{12} (скорость скольжения V_{12}^{τ}) на линию контакта будет направлена в сторону противоположную движению, в отличие от направления проекции вектора P_{12} при движении ведомого колеса (рис. 2).

Величина отрезка $BC = b$ аналогично варианту качения ведомого колеса.

$$\begin{aligned} BC = b &= AB \operatorname{tg} \varphi = OB \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi = \\ &= r \cos \beta_{\max} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi; \\ V_{12}^{\tau} &= V_{12} \sin \gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Для любой точки на линии контакта DE величина скорости скольжения V_{12}^{τ} будет одинакова. Например, для точки A

$$V_{12}^{\tau} = V_{12} \sin \varphi = \omega AC \sin \varphi = \omega \frac{BC \sin \varphi}{\sin \varphi} = \omega b. \quad (6)$$

Для точки D

$$V_{12}^{\tau} = V_{12} \sin \gamma = \omega DC \sin \gamma = \omega \frac{b \sin \gamma}{\sin \gamma} = \omega b.$$

После подстановки (5) в (6)

$$V_{12}^{\tau} = \omega r \cos \beta_{\max} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi. \quad (7)$$

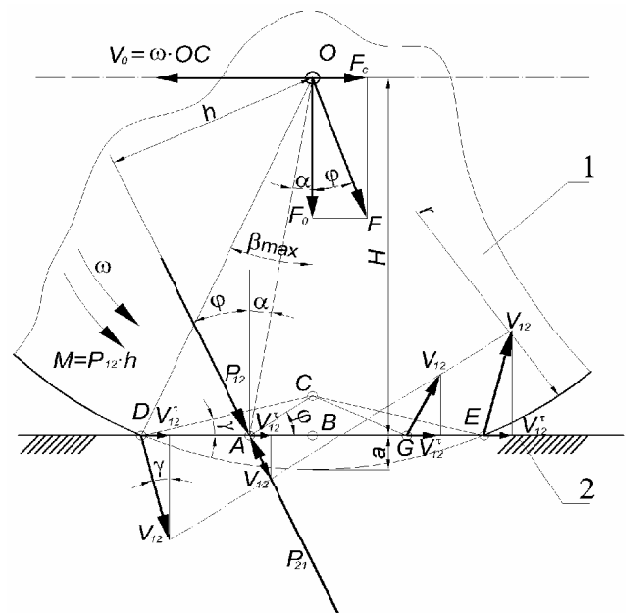


Рис. 3

Таким образом, для ведомого и ведущего упругого колеса скорость скольжения постоянна по всей площади контакта при наличии силы движущей F_d и сопротивления F_c .

При движении ведущего упругого колеса, нагруженного только вертикальной силой F_0 и моментом M (рис. 4), вектор равнодействующей будет проходить через точку A вертикально. Величина момента $M = F_0 h$. Мгновенный центр скоростей будет в точке B , находящейся на линии контакта DE . В результате вектор V_{12} будет направлен перпендикулярно DE , поэтому $V_{12}^{\tau} = 0$. Так как в данном варианте движения колеса отсутствует сила сопротивления F_c , то $\varphi = 0$. Тогда зависимость (7) преобразуется

$$V_{12}^{\tau} = \omega r \cos \beta_{\max} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 0 = 0,$$

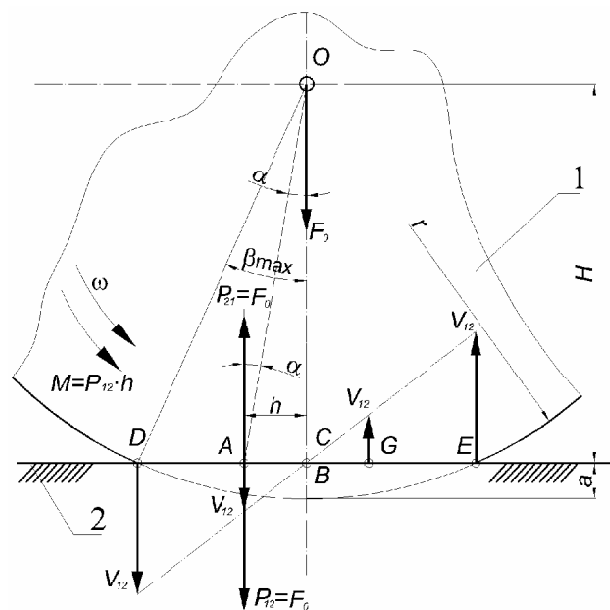


Рис. 4

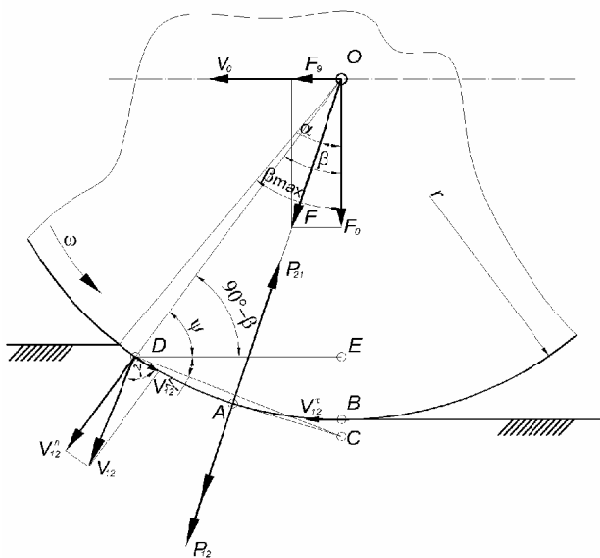


Рис. 5

что подтверждает отсутствие скорости скольжения при качении упругого колеса, нагруженного только вертикальной силой F_0 и моментом M .

Ведомое жесткое колесо, катящееся по деформируемому основанию, нагружено вертикальной силой F_0 и движущей силой F_c .

Полагаем, что точка A (угол α), через которую проходит вектор равнодействующей P_{12} , известна (рис. 5). Так как по этому же направлению проходит вектор V_{12} , то МЦС будет в точке C (пересечение перпендикуляров к векторам V_0 в точке O и V_{12} в точке A).

Определим скорость скольжения V_{12}^{τ} для произвольной точки D (угол β) на дуге контакта колеса 1 с основанием 2 .

$$V_{12}^{\tau} = V_{12} \cos \psi, \quad (8)$$

$$V_{12} = \omega DC = \omega \frac{DE}{\cos \gamma} = \omega \frac{r \sin \beta}{\cos \gamma}, \quad (9)$$

$$\psi = 90 - \beta + \gamma = 90 - (\beta - \gamma). \quad (10)$$

Определим угол γ

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{CE}{DE} = \frac{OC - OE}{r \sin \beta} = \frac{1}{\cos \alpha \sin \beta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (11)$$

Подставляем (9) и (10) в (8):

$$V_{12}^{\tau} = V_{12} \cos [90 - (\beta - \gamma)] = V_{12} \sin (\beta - \gamma) = \frac{\omega r \sin \beta (\sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta)}{\cos \gamma}. \quad (12)$$

После подстановки значения $\operatorname{tg} \gamma$ (11) и упрощений получим

$$V_{12}^{\tau} = \omega r \left(1 - \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right). \quad (13)$$

Анализ (13) показывает, что $V_{12}^{\tau} = 0$ при $\beta = \alpha$.

При $\beta < \alpha$ направление V_{12}^{τ} изменяется на противоположное. Скорость скольжения находится в прямой зависимости от размеров колеса и угловой скорости.

Ведущее жесткое колесо (рис. 6), нагруженное вертикальной силой F_0 , силой сопротивления F_c , движется с угловой скоростью ω при действии момента M .

Полагаем, что точка A , через которую проходит вектор равнодействующей P_{12} , известна.

Тогда направление векторов P_{12} и P_{21} (реакция основания на колесо) будет под углом ϕ к вертикали, так как на колесо действуют силы F_0 (прижатия колеса к основанию) и F_c (горизонтальная сила сопротивления). Угол ϕ между равнодействующей F ($\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_c$) будет увеличиваться при возрастании сил сопротивления F_c . Если угол между P_{12} и нормалью к поверхности колеса в точке A окажется больше угла трения $\phi_{\text{тр}}$, то колесо будет «буксовать»: $\phi + \alpha > \phi_{\text{тр}}$ – условие проскальзывания контактирующей поверхности колеса.

Вектор скорости V_{12} точки обода A совпадает с вектором P_{12} и поэтому МЦС будет в точке C на линии OB . Скорость поступательного движения колеса $V_0 = \omega OC$ меньше скорости обода колеса $V_A = \omega r$.

Смещение (касательная составляющая скорости точки обода) точек обода, контактирующих с основанием, будет в сторону противоположную движению колеса. Величина этого смещения зависит от V_{12}^{τ} , которая минимальна в точке B и максимальна в точке D (начало контакта колеса с основанием).

Для определения величины V_{12}^{τ} необходимо знать положение МЦС (точка C)

$$OC = OM - CM$$

или

$$H = OC = r \cos \alpha - r \sin \alpha \operatorname{tg} \phi = r (\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} \phi). \quad (14)$$

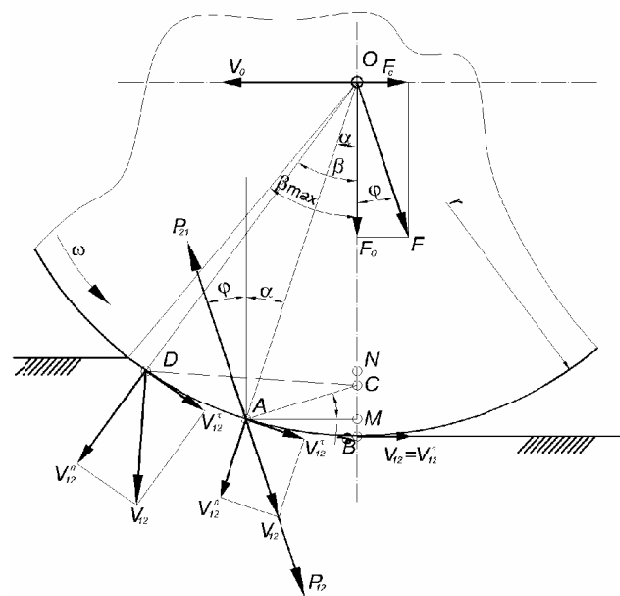


Рис. 6

Тогда для любой точки на дуге контакта (например, точки D) скорость смещения ее относительно основания V_{12}^{τ}

$$V_{12}^{\tau} = V_{12} \cos \psi = \omega DC \cos \psi. \quad (15)$$

Используя теорему синусов, определяем угол ψ и DC (рис. 6)

$$\frac{H}{\sin \psi} = \frac{r}{\sin(180 - \beta - \psi)}. \quad (16)$$

После проведения преобразований

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{H \cos \beta}{r - \sin \beta}; \quad (17)$$

$$DC = \frac{H \sin \beta}{\sin \psi}. \quad (18)$$

В (15) подставляем значения (18), (14) и (17):

$$V_{12}^{\tau} = \omega \frac{H \sin \beta}{\sin \psi} \cos \psi = \omega \frac{H \sin \beta}{\operatorname{tg} \psi} = \omega r (1 - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi \cos \beta). \quad (19)$$

Частные случаи.

а) скорость скольжения в точке A при $\alpha = \beta$:

$$V_{12}^{\tau} = \omega r (\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi); \quad (20)$$

б) скорость скольжения в точке B ($\beta = 0$)

$$V_{12}^{\tau} = \omega r (1 - \sin \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi). \quad (21)$$

Ведущее жесткое колесо (рис. 7) нагружено вертикальной силой F_0 и движется с угловой скоростью ω при действии момента M .

Направление вектора P_{12} , проходящего через точку A обода, будет параллельным вектору F_0 . Величина момента

$$M = P_{12} h, \quad (22)$$

при этом $P_{12} = F_0$ и угол между $\bar{P}_{12}$ и радиусом OA такой же, как и угол α , определяющий положение точки A .

Определим $\bar{V}_{12}^{\tau}$ для произвольно выбранной точки D на обode колеса 1, контактирующей с основанием 2.

Движение жесткого колеса по деформируемому основанию, нагруженного F_0 и M (рис. 7), является частным случаем движения колеса, нагруженного F_0 , F_c и M (рис. 6). Поэтому зависимость (19) при $\varphi = 0$ преобразуется

$$V_{12}^{\tau} = \omega r (1 - \sin \alpha \cos \beta). \quad (23)$$

Таким образом, и в данном варианте качения жесткого колеса по деформируемому основанию по всей поверхности контакта будет происходить скольжение: в начале контакта $\bar{V}_{12}^{\tau}$ максимальна, а на выходе из контакта обода с основанием – минимальна.

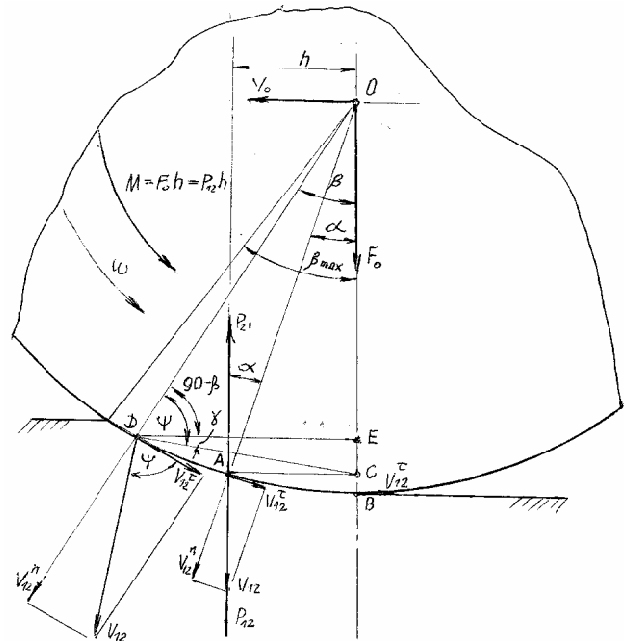


Рис. 7

ВЫВОДЫ

1. Качение колеса по неподвижному основанию сопровождается явлением скольжения по поверхности контакта. Величина и направление векторов скорости скольжения точек поверхности контакта колеса зависят от внешней нагрузки, приложенной к колесу, и характера деформации колеса и основания.

2. Упругое колесо, катящееся по жесткому основанию, на поверхности контакта имеет одинаковую скорость скольжения любой точки. Жесткое колесо, катящееся по деформируемой поверхности, имеет на поверхности контакта переменные скорости скольжения точек.

3. Задача определения кинематических характеристик может решаться при известном положении точки на обode колеса, через которую проходит вектор равнодействующей. Определить положение этой точки можно с использованием опытных данных (см. в литературе значения коэффициента трения качения), либо решая конкретную задачу определения напряжений на поверхности контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Виравов Р.В.** Тяговые свойства фрикционных передач. – М.: Машиностроение, 1982. – 263 с.
2. **Андреев А.В.** Передача трением. – М.: Машгиз, 1978. – 176 с.
3. Трение, изнашивание и смазка. Кн. 2. / Под редакцией И.В. Кругельского и В.В. Алисина. – М.: Машиностроение, 1979. – 358 с.
4. **Горячева И.Г., Добычин М.Н.** Контактные задачи в трибологии. – М.: Машиностроение, 1988. – 256 с.
5. **Пинегин С.В.** Трение качения в машинах и приборах. – М.: Машиностроение, 1976. – 264 с.

Кафедра машин и аппаратов пищевых производств

Поступила 05.12.05 г.