Цыкина Светлана Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры функционального анализа, e-mail: tsykinasv@yandex.ru

UDC 517.98
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2093-2097

SYMBOLS IN POLYNOMIAL QUANTIZATION

© **S. V. Tsykina**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: tsykinasv@yandex.ru

We present a new approach to the definition of covariant and contravariant symbols in polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces.
Key words: Lie groups and Lie algebras; pseudo-orthogonal groups; representations of Lie groups; para-Hermitian symmetric spaces; covariant and contravariant symbols; polynomial quantization

REFERENCES

1. *Tsykina S.V.* Differential geometric structure of para-Hermitian symmetric spaces with pseudo-orthogonal group of translations // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2015. V. 20. Iss. 5. P. 1511–1516.
2. *Tsykina S.V.* Polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces with pseudo-orthogonal group of translations // International workshop "Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics", Moscow, Aug. 25–30, 2007. V. II. P. 63–71.
3. *Molchanov V.F.* Representations of the pseudo-orthogonal group associated with a cone // USSR Matem. Sbornik, 1970. V. 91. № 3. P. 358–375.

Received 24 October 2016

Tsykina Svetlana Viktorovna, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Functional Analysis Department, e-mail: tsykinasv@yandex.ru

Информация для цитирования:
Цыкина С.В. Символы в полиномиальном квантовании // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2093-2097. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2093-2097
Tsykina S.V. Simvoly v polinomial'nom kvantovanii [Symbols in polynomial quantization]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2093-2097. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2093-2097 (In Russian)

УДК 517.95
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2098-2106

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОПЕРЕЖЕНИЕМ

© **Е. В. Чаплыгина, А. Н. Зарубин**

Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева
302026, Российская Федерация, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
E-mail: aleks_zarubin@mail.ru

Исследуется задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе в главной части и переменным отклонением аргумента. Доказана теорема единственности без ограничения на величину отклонения. Найдены в явной форме интегральные представления решений в области эллиптичности и гиперболичности.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа; задача Коши; задача Дирихле; разностное уравнение; задача Геллерстедта

1. Постановка задачи.

В смешанной области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где

$$D^+ = \bigcup_{k=0}^{2} D_k^+ \cup J = \{(x,y) : 0 < x < \sqrt{3}\tau, 0 < y < h\} \ (0 < h, \tau \equiv const)$$

и $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{2} D_k^-$ — эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+ = \{(x,y) : \sqrt{k}\tau < x < \sqrt{k+1}\tau, 0 < y < h\} \ (k = 0,1,2),$$

$$D_k^- = \{(x,y) : -y + \sqrt{k}\tau < \alpha_1^k(x) < y + \sqrt{k+1}\tau, (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})\tau/2 < y < 0\}$$
$$(k = 0,1,2),$$

$$I = \{(x,y) : 0 < x < \sqrt{3}\tau, y = 0\} = \bigcup_{k=0}^{2} I_k,$$

$$I_k = \{(x,y) : \sqrt{k}\tau < x < \sqrt{k+1}\tau, y = 0\} \ (k = 0,1,2),$$

$$J = \bigcup_{k=1}^{2} J_k, \ J_k = \{(x,y) : x = \sqrt{k}\tau, 0 < y < h\} \ (k = 1,2),$$

$$\alpha_1^0(x) = x, \alpha_1^1(x) = \sqrt{x^2 - \tau^2}, \alpha_1^2(x) = \alpha_1(\alpha_1(x)) = \sqrt{x^2 - 2\tau^2},$$

рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} Lu(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + sgn(y)u_{yy}(x,y) = \\ = H(x-\tau)u(\sqrt{x^2 - \tau^2}, y) + H(\sqrt{2}\tau - x)u(\sqrt{x^2 + \tau^2}, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где $H(\xi)$ — функция Хевисайда.

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k (k=0,1,2)$. Тип функционального запаздывания и опережения следует из представлений

$$u(\sqrt{x^2-\tau^2}, y) = u(x - (x - \sqrt{x^2-\tau^2}), y) = u(x - \tau_1(x), y) = R_x^{\tau_1(x)} u(x,y),$$

$$u(\sqrt{x^2+\tau^2}, y) = u(x + (\sqrt{x^2+\tau^2} - x), y) = u(x + \tau_2(x), y) = R_x^{-\tau_2(x)} u(x,y),$$

где $R_x^{\theta(t)}$ — оператор сдвига по переменной x: $R_x^{\theta} q(x,y) = q(x - \theta(t), y)$:

$$\tau_1(x) = x - \sqrt{x^2-\tau^2} > 0, \tau_2(x) = \sqrt{x^2+\tau^2} - x > 0.$$

Задача G**.** Найти в области D функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \backslash J) \cap C^2(D \backslash (I \cup J))$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$u(0,y) = u(\sqrt{3}\tau, y) = 0, \ 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u(x,h) = \varphi(x), \ 0 \le x \le \sqrt{3}\tau, \tag{3}$$

$$u(x, -\alpha_1^k(x)) = \psi_k(x), \ \sqrt{k}\tau < x < (\sqrt{k} + \sqrt{k+1})\tau/2 \ (k=0,2), \tag{4}$$

$$u(x, \alpha_1(x) - \tau) = \psi_1(x), (1+\sqrt{2})\tau/2 < x < \sqrt{2}\tau, \tag{5}$$

условиям сопряжения

$$u(x, 0-) = u(x, 0+) = \omega(x), 0 \le x \le \sqrt{3}\tau; \tag{6}$$

$$u_y(x, 0-) = u_y(x, 0+) = \nu(x), 0 < x < \sqrt{3}\tau, x \ne \tau, \sqrt{2}\tau; \tag{7}$$

условиям согласования

$$\varphi(0) = \varphi(\sqrt{3}\tau) = \psi_0(0) = 0, \psi_1(\sqrt{2}\tau) = \psi_2(\sqrt{2}\tau),$$

где $\varphi(x), \psi_k(x)$ $(k=0,1,2)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

2. Общее решение уравнения (1)

Уравнение (1) в терминах функций

$$u_k^{\pm}(x,y) = u(x,y), (x,y) \in D_k^{\pm} \ (k=0,1,2) \tag{8}$$

можно записать в форме системы

$$L\bar{u}^{\pm}(x,y) = A\bar{u}^{\pm}(x,y), \ (x,y) \in D_0^+,$$

где

$$\bar{u}^{\pm}(x,y) = (u_0^{\pm}(x,y), u_1^{\pm}(\alpha_2^1(x), y), u_2^{\pm}(\alpha_2^2(x), y))^{\mathrm{T}}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

которая в характеристических переменных

$$\xi = x + y\sqrt{-sgny}, \eta = x - y\sqrt{-sgny} \tag{10}$$

будет иметь вид матричного уравнения

$$4\bar{u}_{\xi\eta}^{\pm}(\xi,\eta) = A\bar{u}^{\pm}(\xi,\eta).$$

Решение этого уравнения, найденное методом последовательных приближений или с помощью [1, с. 67–68], можно представить формулой

$$\begin{gathered}\bar u^{\pm}(\xi,\eta)=\bar u^{\pm}(0,0)\mathcal{J}_0(i\sqrt{A\xi\eta})+\int\limits_0^{\xi}\mathcal{J}_0(i\sqrt{A\eta(\xi-t)})\bar\Phi_1^{\pm}(t)dt+\\ +\int\limits_0^{\eta}\mathcal{J}_0(i\sqrt{A\xi(\eta-t)})\bar\Phi_2^{\pm}(t)dt,\end{gathered}\tag{11}$$

где $\bar\Phi_1^{\pm}(t),\bar\Phi_2^{\pm}(t)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые вектор–функции; $i=\sqrt{-1},\mathcal{J}_0(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z/2)^{2k}/(k!\Gamma(k+1))$ — функция Бесселя [2, с.727] первого рода нулевого порядка.

Поскольку матрица A из (9) имеет различные собственные значения $\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{2}$, то она приводима к диагональному виду, то есть существует матрица $T_A(|T_A|\neq 0)$ такая, что $T_A^{-1}AT_A=\Lambda_A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$, причем

$$T_A=\begin{pmatrix}1&\sqrt2&-\sqrt2\\0&2&2\\-1&\sqrt2&-\sqrt2\end{pmatrix},\ T_A^{-1}=\frac{1}{4\sqrt2}\begin{pmatrix}2\sqrt2&0&-2\sqrt2\\1&\sqrt2&1\\-1&\sqrt2&-1\end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\begin{gathered}\mathcal{J}_0(i\sqrt{A}t)=\mathcal{J}_0(i\sqrt{T_A\Lambda_AT_A^{-1}t})=T_A\mathcal{J}_0(i\sqrt{\Lambda_At})T_A^{-1}=\\ =T_A\begin{pmatrix}\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_1t})&0&0\\0&\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2t})&0\\0&0&\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_3t})\end{pmatrix}T_A^{-1}=\\ =\frac{1}{4\sqrt2}\begin{pmatrix}2\sqrt2+\sqrt2\gamma_2(t)&2\gamma_1(t)&-2\sqrt2+\sqrt2\gamma_2(t)\\2\gamma_1(t)&2\sqrt2\gamma_2(t)&2\gamma_1(t)\\-2\sqrt2+\sqrt2\gamma_2(t)&2\gamma_1(t)&2\sqrt2+\sqrt2\gamma_2(t)\end{pmatrix},\end{gathered}\tag{12}$$

где

$$\gamma_n(t)=\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2t})+(-1)^n\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_3t})\ (n=1,2).\tag{13}$$

Поэтому из равенства (11) в силу (12), (13) и возвращения к старым переменным по формулам (10) найдем общее решение уравнения (1) в форме

$$\begin{gathered}\bar u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),y)=\lambda_2^{(1-(-1)^k)/2}\int\limits_0^{z_0^{\pm}}\Phi_1^{\pm}(t)\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2\bar z_0^{\pm}(z_0^{\pm}-t)})dt+\\ +\lambda_2^{(1-(-1)^k)/2}\int\limits_0^{\bar z_0^{\pm}}\Phi_2^{\pm}(t)\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2z_0^{\pm}(\bar z_0^{\pm}-t)})dt,\ (x,y)\in D_0^{\pm}\ (k=0,1,2),\end{gathered}\tag{14}$$

где $\Phi_1^{\pm}(t),\Phi_2^{\pm}(t)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции;

$$z_0^+=x+iy,\bar z_0^+=x-iy;z^-=x+y,\bar z_0^-=x-y,$$

причем
$$\alpha_2^0(x)=x, \alpha_2^1(x)=\alpha_2(x)=\sqrt{x^2+\tau^2}, \alpha_2^2(x)=\alpha_2(\alpha_2(x))=\sqrt{x^2+2\tau^2}$$
и
$$\begin{gathered} u_k^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau-0,y)=u_{k+1}^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau+0,y)=0,\ 0\le y\le h; \\ \frac{\partial}{\partial x}(u_k^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau-0,y))\ne\frac{\partial}{\partial x}(u_{k+1}^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau+0,y)), 0<y<h(k=0,1). \end{gathered} \tag{15}$$

3. Однозначная разрешимость задачи G

Т е о р е м а 1. *Если* $\varphi(x)\in C[\sqrt{k}\tau,\sqrt{k+1}\tau]\cap C^2(\sqrt{k}\tau,\sqrt{k+1}\tau)$ $(k=0,1,2)$, $\psi_k\in$ $\in C[\sqrt{k}\tau,(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2]\cap C^2(\sqrt{k}\tau,(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2)(k=0,2)$, $\psi_1\in C[(1+\sqrt{2})\tau/2,\sqrt{2}\tau]\cap$ $\cap\, C^2((1+\sqrt{2})\tau/2,\sqrt{2}\tau)$ *абсолютно интегрируемы на своих промежутках;* $\varphi(0)=\varphi(\sqrt{3}\tau)=$ $=\psi_0(0)=0$, $\psi_1(\sqrt{2}\tau)=\psi_2(\sqrt{2}\tau)$ *и* $\psi_k'(x)$ *при* $x\to\sqrt{k}\tau(k=0,2)$, $\psi_1'(x)$ *при* $x\to\sqrt{2}\tau$ *допускают интегрируемую особенность, то существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи* G.

Единственность решения задачи G следует из утверждений.

Л е м м а 1. Если $u(x,y)$ — решение уранения (1) в области $D^-=\bigcup_{k=0}^2 D_k^-$ из класса $C(\bar{D}^-)\cap C^2(D^-)$, обращающееся в нуль на характеристиках
$$y=-\alpha_1^k(x), \sqrt{k}\tau<x<(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2(k=0,2), y=\alpha_1(x)-\tau,$$
$$(1+\sqrt{2})\tau/2<x<\sqrt{2}\tau,$$
то
$$\beta=\int_0^{\sqrt{3}\tau}\omega(x)\nu(x)dx\ge 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы аналогично приведенному в [4, с. 128–130] (по схеме [5, с. 491–493]).

Л е м м а 2. Если $u(x,y)$ — решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C(\bar{D}^+)\cap$ $\cap\, C^2(D^+\backslash J)$, обращающееся в нуль при $x=\sqrt{k}\tau(0\le y\le h)(k=0,1,2,3;$ в силу (2) и (15)) $y=h(0\le x\le\sqrt{3}\tau)$, то $\beta\le 0$ и
$$\beta+\iint_{D^+}[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+\gamma^2(x,y)]dxdy=0, \tag{16}$$
где
$$\gamma^2(x,y)=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-\tau^2}}\right)H(x-\tau)u(x,y)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)\ge 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о получим из тождества
$$u(x,y)[Lu(x,y)-H(x-\tau)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)-H(\sqrt{2}\tau-x)u(\sqrt{x^2+\tau^2},y)]=$$
$$=(u(x,y)u_x(x,y))_x+(u(x,y)u_y(x,y))_y-u_x^2(x,y)-u_y^2(x,y)-$$
$$-H(x-\tau)u(x,y)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)-H(\sqrt{2}\tau-x)u(x,y)u(\sqrt{x^2+\tau^2},y)=0,$$
интегрируя которое по области
$$D_\varepsilon^+=\{(x,y):0<x<\sqrt{3}t,\varepsilon<y<h\}(0<\varepsilon\equiv const),$$