Канд. физ.-мат. наук **Н. В. Попова**

РЫНОЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ИХ ПРОДОЛЖЕНИЕ

В статье предлагаются две теоремы о свойствах цены облигации, сформулированные и доказанные как математические теоремы при тех же условиях, что и известные рыночные теоремы. Первая из теорем рассматривает влияние уровня доходности рынка на изменчивость цены облигации. Теорема существует в настоящее время в виде рыночного наблюдения и как задача в существующей литературе не рассматривалась. Вторая теорема посвящена ранее не изученной зависимости величины изменения цены облигации при изменении срока до погашения от уровня доходности рынка. Установлено наличие максимумов абсолютного и относительного изменений цены. Доказанные в теоремах утверждения подтверждаются вычислениями.

Ключевые слова и словосочетания: рыночные теоремы, математические методы, влияние уровня доходности рынка.

Известны пять рыночных теорем[1]. Это теоремы о свойствах цены облигации. Теоремы сформировались в результате наблюдений на рынке облигаций. Позже они были сформулированы и доказаны как математические теоремы[2]. Свойства цены, сформулированные в этих теоремах, «важны для прогнозирования влияния процентных ставок на курсы облигаций»[3]. В настоящее время эти теоремы являются основой теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности. Очевидно, что развитие и углубление этой теории имеют значение не только для самой теории, но и для практического инвестирования, так как способствуют обоснованности инвестиционных решений.

В данной статье приводятся формулировки и доказательства двух теорем о свойствах цены облигации. Это теоремы о влиянии уровня доходности рынка на изменчивость цены облигации (теорема 1) и на величину изменения цены облигации при изменении срока до погашения (теорема 2). Теоремы сформулированы и доказаны при тех же условиях, что и известные теоремы. Это условия определенности. В связи с этим предлагаемые теоремы можно рассматривать как продолжение известных рыночных теорем.

Основные требования условий определенности: облигация является справедливо оцененной[4], не имеет кредитного риска и не может быть отозвана

---

[1] См.: Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции. – М. : Инфра-М, 1999. – С. 456–458.

[2] См.: Барбаумов В. Е., Гладких И. М., Чуйко А. С. Финансовые инвестиции. – Ч. 1. Инвестиции с фиксированными доходами : учебное пособие. – М. : Изд-во Рос. экон. акад., 2000. – С. 46–57; Мельников А. В., Попова Н. В., Скорнякова В. С. Математические методы финансового анализа. – М. : Анкил, 2006. – С. 121–136.

[3] Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции. – С. 458.

[4] Там же. – С. 421.

эмитентом до установленной даты погашения. Для доказательства теорем использованы свойства дифференцируемых функций и числовых последовательностей. При доказательстве теоремы 2 использован результат, полученный ранее автором при изучении свойств дюрации Маколея.

Первая теорема посвящена влиянию уровня процентных ставок рынка на изменчивость цены облигации. Изменчивостью цены облигации называют относительное (процентное) изменение цены облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ при изменении ее доходности[1]. Под доходностью облигации, или рыночной доходностью, понимается доходность к погашению[2]. Рыночной доходностью называют «уровень рыночной доходности финансовых инструментов со сравнимым риском»[3]. По величине $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ оценивают чувствительность цены облигации к изменению рыночной процентной ставки на заданную величину[4], т. е. процентный риск облигации − одну из важнейших ее характеристик как объекта инвестирования. Поэтому задачи о факторах, влияющих на данный показатель, представляют как теоретический, так и практический интерес. Уровень процентных ставок рынка – один из таких факторов. «Чем выше уровень доходности, тем ниже изменчивость цены»[5]. Это утверждение сформулировано на основе рыночных наблюдений и является эмпирическим. Задача о влиянии уровня доходности на изменчивость цены облигации в существующей литературе не рассматривалась[6]. Формулировка этой зависимости в виде математической теоремы и ее доказательство выглядят следующим образом.

Теорема 1. Чем выше уровень процентных ставок рынка, тем меньше относительное изменение цены облигации при изменении ее доходности на заданную величину.

Доказательство. Пусть r и $P(r)$ – доходность и цена облигации с потоком платежей ($C_1, C_2, \ldots, C_n; t_1, t_2, \ldots, t_n$) в момент $t = 0$. Уменьшению доходности в этот момент на величину $\Delta r > 0$ соответствует рост цены облигации на величину $\Delta^+ P(r) = P(r - \Delta r) - P(r)$, а увеличению доходности на $\Delta r > 0$ соответствует снижение цены облигации на величину $\Delta^- P(r) = P(r) - P(r + \Delta r)$. Таким образом, величина изменения цены облигации при изменении ее доходности $\Delta^+ P(r)$ или $\Delta^- P(r)$ положительна по определению. Это абсолютное изменение цены облигации, взятое со знаком «+» (абсолютный рост или абсолютное снижение цены). Отношение $\frac{\Delta^+ P(r)}{P(r)}$ или $\frac{\Delta^- P(r)}{P(r)}$ является соответственно

[1] См.: Фабоцци Ф. Дж. Управление инвестициями. – М. : Инфра-М, 2000. – С. 505.
[2] Там же. – С. 504.
[3] Там же. – С. 925.
[4] См.: Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции. – С. 461–462.
[5] Фабоцци Ф. Дж. Управление инвестициями. – С. 507.
[6] Заметим, что влияние уровня доходности на абсолютное изменение цены облигации при изменении ее доходности на заданную величину рассмотрено в работе А. В. Мельникова, Н. В. Поповой и В. С. Скорняковой «Математические методы финансового анализа» (М. : Анкил, 2006. – С. 131).

относительным ростом или относительным снижением цены облигации при изменении ее доходности на величину $\Delta r > 0$.

Пусть для определенности доходность облигации увеличилась на $\Delta r > 0$. Покажем, что относительное снижение цены облигации $\dfrac{\Delta^- P(r)}{P(r)}$ – это убывающая функция r (исходного уровня доходности). Преобразуем ее производную к виду

$$\left(\frac{\Delta^- P(r)}{P(r)}\right)' = \frac{P(r+\Delta r)}{P(r)}\left(\frac{P'(r)}{P(r)} - \frac{P'(r+\Delta r)}{P(r+\Delta r)}\right) \qquad (1)$$

и установим монотонность функции $\dfrac{P'(r)}{P(r)}$. Так как $P(r) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$, то

$$P'(r) = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i C_i(0),\ P''(r) = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i (t_i+1) C_i(0),$$

где $C_i(0) = \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – приведенные к моменту $t = 0$ платежи по облигации.

Тогда

$$\left(\frac{P'(r)}{P(r)}\right)' = \frac{P''(r)P(r) - (P'(r))^2}{P^2(r)} =$$

$$= \frac{1}{P^2(r)(1+r)^2}\left[\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)C_i(0)\sum_{i=1}^{n} C_i(0) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i C_i(0)\right)^2\right].$$

Выражение в квадратных скобках равно

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i(t+1)C_i(0)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} C_j(0)\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} t_j(t_j+1)C_j(0)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} C_i(0)\right) -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} t_i C_i(0)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} t_j C_j(0)\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_i(0)C_j(0)\left((t_i - t_j)^2 + (t_i + t_j)\right) > 0.$$

Отсюда $\left(\dfrac{P'(r)}{P(r)}\right)' > 0$. Значит, $\dfrac{P'(r)}{P(r)}$ – возрастающая функция r. Так как $r < (r + \Delta r)$, то $\dfrac{P'(r)}{P(r)} < \dfrac{P'(r+\Delta r)}{P(r+\Delta r)}$. Тогда из (1) получаем $\left(\dfrac{\Delta^- P(r)}{P(r)}\right)' < 0$. Теорема доказана.

В табл. 1 показано поведение величины $\dfrac{\Delta^- P(r)}{P(r)}$ купонной облигации в зависимости от r для $\Delta r = 0{,}1\%$. Вычисления подтверждают доказанное утверждение теоремы и соответствуют рыночным наблюдениям.

Таблица 1

$A = 100$, $m = 1$, $f = 10\%$, $n = 5$, $\Delta r = 0{,}1\%$

r, %	$P(r)$	$P(r + \Delta r)$	$\Delta^{-}P(r) / P(r)$
1	143,681	139,269	0,0307
2	137,708	135,463	0,0163
3	132,058	130,581	0,0112
4	126,711	125,625	0,0086
5	121,647	120,798	0,0070
6	116,849	116,159	0,0059
7	112,301	111,723	0,0051
8	107,985	107,492	0,0046
9	103,890	103,462	0,0041
10	100,000	99,625	0,0038
11	96,304	95,971	0,0035
12	92,790	92,493	0,0032
15	83,239	83,017	0,0027
18	74,983	74,810	0,0023
20	70,094	69,945	0,0021

Следующая теорема (теорема 2) является естественным продолжением одной из рыночных теорем[1] и посвящена ранее не изученной зависимости величины изменения цены облигации при изменении срока до погашения от уровня доходности рынка. Теорема доказана для купонной облигации. Пусть дана облигация номиналом A, купонные выплаты по которой производятся m раз в году по годовой купонной ставке f. Будем считать, что $m = 1$ (влияние параметра m можно изучить в отдельной задаче). При торговле на бирже информация о ценах на купонные облигации дается в виде котируемой цены. Поэтому дальше будем рассматривать только котируемые цены облигации. Пусть r – доходность облигации в момент $t = 0$. Котируемая цена облигации в момент, когда до ее погашения остается n купонных периодов, равна

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{(1+r)^i} + \frac{A}{(1+r)^n}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2}$$

где $q = fA$ − купонный платеж по облигации.

Предположим, что при уровне доходности облигации r срок до ее погашения сократился с n до $(n - 1)$ купонных периодов. Тогда котируемая цена облигации, продающейся с премией, снизится на величину $\Delta P_n = P_n - P_{n-1}$, а цена облигации, продающейся с дисконтом, поднимется на величину $\Delta P_n = P_{n-1} - P_n$. Для облигации, продающейся по номиналу, $\Delta P_n = 0$. Таким образом, величина изменения цены облигации, продающейся с премией или

[1] См.: Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции.

дисконтом, при уменьшении срока до погашения на один купонный период положительна по определению. Это абсолютное изменение цены облигации, взятое со знаком «+». Далее будем рассматривать положительные абсолютные ΔP_n и относительные $\frac{\Delta P_n}{P_n}$ изменения цены облигации при изменении срока до погашения на один купонный период. Напомним, что одна из известных теорем рассматривает зависимость ΔP_n от n при фиксированном r.

Облигация может продаваться при разных уровнях доходности рынка. Следующая теорема устанавливает зависимость величин ΔP_n и $\frac{\Delta P_n}{P_n}$ от уровня процентных ставок рынка r при фиксированном значении n. Абсолютную ΔP_n и относительную $\frac{\Delta P_n}{P_n}$ величину изменения котируемой цены облигации при изменении срока до погашения на один купонный период будем рассматривать как функцию доходности r .

Теорема 2. При фиксированном $n > 1$ справедливы следующие утверждения:

1) ΔP_n и $\frac{\Delta P_n}{P_n}$ являются убывающими функциями на отрезке $0 \le r \le f$ (облигация продается с премией при $r < f$ и по номиналу при $r = f$);

2) существуют точки максимумов r_a функции ΔP_n и r_o функции $\frac{\Delta P_n}{P_n}$ на множестве $r \ge f$ (облигация продается с дисконтом при $r > f$).

Доказательство. Докажем утверждения теоремы для абсолютного изменения цены облигации. Для облигации, продающейся с премией, функция ΔP_n непрерывна на отрезке $[0, f]$ и дифференцируема на интервале $(0, f)$. Так как производная $(\Delta P_n)'_r = (P_n - P_{n-1})'_r = P'_n - P'_{n-1} < 0$ на множестве $0 < r < f$, то функция ΔP_n является убывающей на отрезке $0 \le r \le f$, причем $\Delta P_n\ (r = 0) = q$, $\Delta P_n\ (r = f) = 0$.

Для облигации, продающейся с дисконтом, функция ΔP_n непрерывна на полуинтервале $[f, +\infty)$ и дифференцируема на интервале $(f, +\infty)$. Тогда

$$(\Delta P_n)'_r = (P_{n-1} - P_n)'_r = P'_{n-1} - P'_n = \begin{cases} >0, & f < r < r_a \\ <0, & r > r_a \end{cases},$$

где

$$r_a = \frac{1 + n f}{n - 1}. \quad (3)$$

Следовательно, r_a − точка максимума функции ΔP_n на полуинтервале $[f, +\infty)$, причем $\Delta P_n(r = f) = 0$, $\Delta P_n(r_a) = A\frac{r_a - f}{(1 + r_a)^n} > 0$, $\lim\limits_{r \to +\infty} \Delta P_n(r) = 0$. Утверждения теоремы для абсолютных изменений цены ΔP_n доказаны.

На рис. 1 показано поведение величины ΔP_n на множествах $0 \le r \le f$ и $r \ge f$.

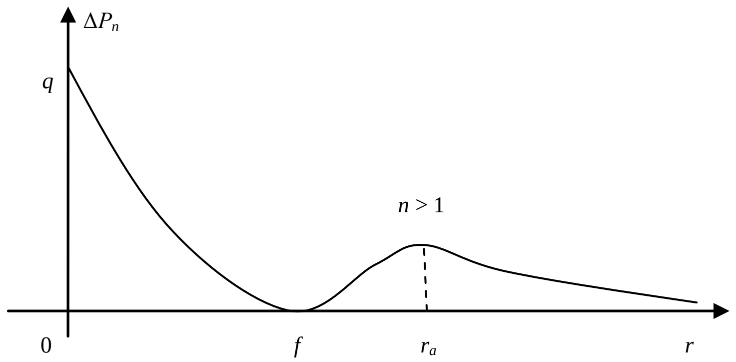

Рис. 1. Зависимость величины ΔP_n от r

Докажем утверждения теоремы для относительного изменения цены облигации. Пусть $f > r$. Рассмотрим производную по r функции $\frac{\Delta P_n}{P_n}$, где $\Delta P_n = P_n - P_{n-1}$. Получим

$$\left(\frac{\Delta P_n}{P_n}\right)'_r = \left(1 - \frac{P_{n-1}}{P_n}\right)'_r = -\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right)'_r = \frac{P_{n-1}}{P_n}\left(\frac{P'_n}{P_n} - \frac{P'_{n-1}}{P_{n-1}}\right).$$

Используем соотношения $\frac{P'_n}{P_n} = -D_n(r)\frac{1}{1+r}$ и $\frac{P'_{n-1}}{P_{n-1}} = -D_{n-1}(r)\frac{1}{1+r}$, где $D_n(r)$ и $D_{n-1}(r)$ – дюрация Маколея облигации при сроках до погашения n и $(n-1)$ купонных периодов и уровне доходности r. Тогда

$$\left(\frac{\Delta P_n}{P_n}\right)'_r = \frac{P_{n-1}}{P_n(1+r)}\left(D_{n-1}(r) - D_n(r)\right).$$

При уровне доходности $r < f$ последовательность $\{D_n(r)\}$ является возрастающей[1]. Следовательно, $\left(\frac{\Delta P_n}{P_n}\right)'_r < 0$ на интервале $(0, f)$ – отношение $\frac{\Delta P_n}{P_n}$ является убывающей функцией доходности r на отрезке $[0, f]$, причем $\frac{\Delta P_n}{P_n}(r=0) = \frac{q}{A+nq}$, $\frac{\Delta P_n}{P_n}(r=f) = 0$. Утверждение теоремы для облигации, продающейся с премией ($f > r$), доказано.

[1] См.: Барбаумов В. Е., Гладких И. М., Чуйко А. С. Финансовые инвестиции. – Ч. 1. Инвестиции с фиксированными доходами : учебное пособие. – М. : Изд-во Рос. экон. акад., 2000. – С. 79; Мельников А. В., Попова Н. В., Скорнякова В. С. Математические методы финансового анализа. – М. : Анкил, 2006. – С. 149.

Пусть $f < r$. Дифференцируем по r функцию $\dfrac{\Delta P_n}{P_n}$, где $\Delta P_n = P_{n-1} - P_n$.

Получим

$$\left(\frac{\Delta P_n}{P_n}\right)'_r = \frac{P_{n-1}}{P_n(1+r)}\left(D_n(r) - D_{n-1}(r)\right).$$

Установлено, что для облигации, продающейся с дисконтом при уровне доходности $r > f$, существует срок $n_o = n_o(r)$ – такой, что для сроков до погашения $n < n_o$ последовательность $\{D_n(r)\}$ является возрастающей, а для $n > n_o$ последовательность $\{D_n(r)\}$ является убывающей[1]. При условии $n_o >> 1$ получено приближенное значение срока n_o:

$$n_o \approx \frac{1}{r} + \frac{1+r}{r-f}\ . \qquad (4)$$

На рис. 2 показана зависимость точки максимума n_o от r по формуле (4). Тогда для фиксированного $n > 1$ получаем:

$$\left(\frac{\Delta P_n}{P_n}\right)'_r = \begin{cases} > 0, & f < r < r_o \\ < 0, & r > r_o \end{cases},$$

где r_o является решением уравнения $n_o(r) = n$ (рис. 2). Отсюда следует, что r_o – точка максимума функции $\dfrac{\Delta P_n}{P_n}$ на множестве $[f, +\infty)$, причем

$$\frac{\Delta P_n}{P_n}(r = f) = 0,\ \frac{\Delta P_n}{P_n}(r_o) = \frac{r_o(r_o - f)}{(r_o - f) + f(1+r_o)^n} > 0,\ \lim_{r\to+\infty}\frac{\Delta P_n}{P_n} = 0.$$

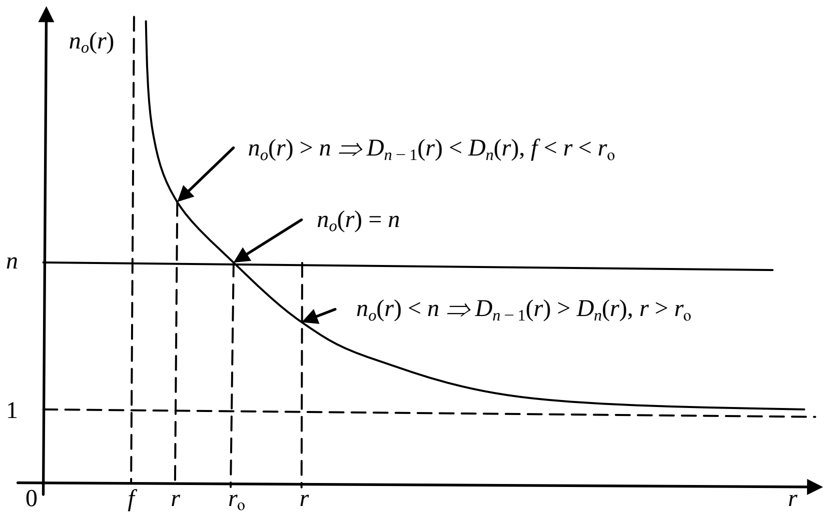

Рис. 2. Зависимость срока n_o от уровня доходности r

[1] См.: Попова Н. В. О некоторых свойствах дюрации Маколея // Вестник финансового университета. – 2011. – № 1 (61).

Для $n_o(r)$ по формуле (4) приближенное решение уравнения $n_o(r) = n$ имеет следующий вид:

$$r_o \approx \frac{(nf+2)+\sqrt{n^2 f^2+4+4f}}{2(n-1)}. \qquad (5)$$

Утверждение теоремы для облигации, продающейся с дисконтом ($f < r$), доказано. Теорема доказана полностью.

В табл. 2 приведены вычисления абсолютного ΔP_n и относительного $\frac{\Delta P_n}{P_n}$ изменений котируемой цены облигации при уменьшении срока до погашения на один купонный период для фиксированного n и различных значений r облигаций с $f > r$ и $f < r$. В области $r > f$ в таблице выделены точки максимумов r_a и r_o. Как видно из табл. 2, результаты вычислений подтверждают доказанные утверждения 1 и 2 теоремы 2.

Таблица 2

A = 100, m = 1, f = 10%, n = 10

r, %	ΔP_n	$\Delta P_n / P_n$
1	8,147583	0,04398351
2	6,562786	0,03818667
3	5,208657	0,03261293
8	0,926387	0,00816775
9	0,422411	0,00396937
10	0,000000	0,00000000
11	0,352184	0,00374223
12	0,643946	0,00725986
13	0,883765	0,01055604
22,1	1,642967	0,03118583
22,2	1,643039	0,03132813
22,3	1,643011	0,03146879
34,0	1,285770	0,03873566
34,1	1,281531	0,03873607
34,2	1,277292	0,03873571

В табл. 3 приведены значения точек максимумов r_a и r_o для $f < r$ и различных n. Ставки r_a и r_o, полученные из непосредственных вычислений ΔP_n и $\frac{\Delta P_n}{P_n}$ для различных r, близки к значениям по формулам (3) и (5) соответственно (с увеличением n значение r_o точнее).

Таблица 3

$A = 100$, $m = 1$, $f = 10\%$

n	10	20	30	40	50	100
r_a, %	22,2	15,7	13,8	12,8	12,2	11,1
r_a (3), %	22,20	15,80	13,80	12,80	12,20	11,10
r_o, %	34,1	18,8	15,2	13,6	12,7	11,2
r_o (5), %	29,58	18,15	14,93	13,48	12,68	11,22

Обсуждение результатов. Основной результат данной работы – математические доказательства теорем и их подтверждение результатами вычислений. Согласно теореме 1, чем выше уровень доходности рынка, тем меньше процентное изменение цены облигации при изменении ее доходности на заданную величину, а следовательно, тем меньше ее процентный риск. Таким образом, теорема 1 устанавливает влияние уровня доходности рынка на инвестиционные свойства облигации, что может представлять интерес для инвестора.

Теорема 2 устанавливает влияние уровня доходности рынка на величину изменения цены облигации при изменении срока до погашения на один купонный период. Доказано наличие максимумов функций ΔP_n и $\frac{\Delta P_n}{P_n}$ и получено подтверждение этого факта с помощью вычислений. Значения доходностей r_a и r_o, близкие к значению купонной ставки, соответствуют большим значениям n. Из этого можно заключить, что результаты теоремы 2 могут иметь практическое значение для долгосрочных бумаг.

Как видим, применение математических методов позволяет получить продолжение известных рыночных теорем. Результаты получены в рамках теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности, в основе которой лежат указанные теоремы. Предложенные теоремы позволяют дополнить данную теорию.

Список литературы

1. *Мельников А. В., Попова Н. В., Скорнякова В.С.* Математические методы финансового анализа. – М. : Анкил, 2006.

2. *Попова Н. В.* О некоторых свойствах дюрации Маколея // Вестник финансового университета. – 2011. – № 1 (61).

3. *Попова Н. В.* Рыночные теоремы как математические // Материалы Международной VIII научно-практической конференции «Образование и наука XXI века – 2012». 17–25 октября 2012 г. Республика Болгария. – София : ООД «Бял ГРАД-БГ», 2012.