

Резонатор с хиральным заполнением

Ю. В. Мухартова

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: muhartova@yandex.ru

Статья поступила 19.05.2009, подписана в печать 08.07.2009

Рассматривается теория электромагнитных экранированных резонаторов, заполненных однородным хиральным веществом. Предложен алгоритм расчета таких систем. В качестве примера исследован сферический хиральный резонатор, для которого получено характеристическое уравнение и вид собственных полей. Показано, что в таком резонаторе могут формироваться только гибридные собственные колебания, чистые E - и H -колебания не возбуждаются.

Ключевые слова: хиральные среды, сферический резонатор, собственные частоты, собственные колебания.
УДК: 517.958; 621.372.8. PACS: 41.20.Cv.

Введение

Естественные хиральные среды были известны с начала XIX века. Термин «хиральный» введен Уильямом Томсоном и означает свойство объекта не совмещаться со своим зеркальным отображением (в плоском зеркале) ни при каких перемещениях и вращениях.

Естественными хиральными объектами являются молекулы сахаров, аминокислот, ДНК и органических полимеров. К числу искусственных хиральных объектов можно отнести спирали, лист Мебиуса, неправильный тетраэдр и т. д. [1–3].

Известно [4], что в случае хиральной среды, изготовленной при помощи произвольным образом ориентированных и равномерно распределенных в нехиральном веществе проволочных пружинок, потерями в которых можно пренебречь, материальные уравнения для гармонических по времени полей ($e^{-i\omega t}$) имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i\xi \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = i\xi \mathbf{E} + \mu^{-1} \mathbf{B}, \quad (1)$$

где ε , μ , ξ — действительные постоянные, представляющие собой диэлектрическую проницаемость, магнитную проницаемость и хиральный адмитанс среды соответственно. Более того, было показано [5], что эти материальные уравнения остаются справедливыми для любой хиральной среды без потерь, произведенной из хиральных объектов произвольной формы.

Настоящая работа посвящена исследованию резонаторов с идеально проводящими стенками, заполненных однородным хиральным веществом. Сферические и цилиндрические резонаторы находят широкое применение в различных областях науки и техники [6–8]. Математическое решение задачи для сферических резонаторов, заполненных обычной средой, было получено достаточно давно [9–11]. В последние годы наблюдается особое внимание к искусственным хиральным средам микроволнового диапазона, в которых хиральность уже не является малой поправкой. В связи с этим представляется интересным обобщить решение задачи на случай хирального резонатора.

1. Ограниченная область с хиральным заполнением

Предположим, что некоторый объем V , ограниченный поверхностью Σ , заполнен однородным хиральным

веществом, которое характеризуется материальными уравнениями (1). С учетом этих соотношений уравнения Максвелла во внутренних точках области V можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}(\varepsilon + \xi^2 \mu) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{i\xi \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{i\xi \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\mu \operatorname{div} \mathbf{H} - i\xi \mu \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (4)$$

$$(\varepsilon + \xi^2 \mu) \operatorname{div} \mathbf{E} + i\xi \mu \operatorname{div} \mathbf{H} = 4\pi \rho. \quad (5)$$

Рассмотрим поверхность, разделяющую две хиральные среды с параметрами ε_1 , μ_1 , ξ_1 и ε_2 , μ_2 , ξ_2 соответственно. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности, направленный из второй среды в первую. Тогда на границе раздела выполняются следующие условия:

$$[\mathbf{n}, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{surf}}, \quad [\mathbf{n}, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0,$$

$$\mu_1 H_{1,n} - i\xi_1 \mu_1 E_{1,n} = \mu_2 H_{2,n} - i\xi_2 \mu_2 E_{2,n},$$

$$\{(\varepsilon_1 + \xi_1^2 \mu_1) E_{1,n} + i\xi_1 \mu_1 H_{1,n}\} - \{(\varepsilon_2 + \xi_2^2 \mu_2) E_{2,n} + i\xi_2 \mu_2 H_{2,n}\} = 4\pi \rho_{\text{surf}},$$

где $\mathbf{j}_{\text{surf}}$ — плотность поверхностного тока, ρ_{surf} — плотность поверхностного заряда. В случае, когда вторая среда является идеальным проводником, т. е. поле внутри нее равно нулю, на границе выполняются условия

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{surf}}^{\text{ind}}, \quad [\mathbf{n}, \mathbf{E}] = 0, \quad (6)$$

$$\mu(H_n - i\xi E_n) = 0, \quad (\varepsilon + \xi^2 \mu) E_n + i\xi \mu H_n = 4\pi \rho_{\text{surf}}^{\text{ind}},$$

где $\mathbf{j}_{\text{surf}}^{\text{ind}}$ — плотность наведенного поверхностного тока, $\rho_{\text{surf}}^{\text{ind}}$ — плотность наведенного поверхностного заряда.

Если от уравнений (2)–(5) первого порядка перейти к дифференциальным уравнениям второго порядка, подействовав на (2) и (3) еще раз оператором rot , то, в отличие от случая обычной среды, оба получаемых в итоге уравнения будут содержать как вектор $\mathbf{E}$, так и вектор $\mathbf{H}$. В полученных уравнениях можно таким

образом сгруппировать слагаемые, что для линейных комбинаций

$$\mathbf{U}_1 = -\mathbf{E}\sqrt{\varepsilon + \xi^2\mu} + i\mathbf{H}\sqrt{\mu}, \quad \mathbf{U}_2 = -i\mathbf{E}\sqrt{\varepsilon + \xi^2\mu} + \mathbf{H}\sqrt{\mu}$$

уравнения окажутся несвязанными.

Предположим, что индуцирующие электромагнитные колебания, плотность тока и заряда зависят от времени, как $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-i\omega t}$ и $\rho = \rho_0 e^{-i\omega t}$. Тогда искомыми векторы $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ также будут гармоническими функциями вида $\mathbf{U}_1 = \mathbf{u} e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{U}_2 = \mathbf{v} e^{-i\omega t}$, а их комплексные амплитуды будут удовлетворять уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{u} = \frac{\omega}{c} \left(\xi\mu - \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2\mu)} \right) \mathbf{u} + \frac{4\pi i\sqrt{\mu}}{c} \mathbf{j}_0, \quad (7)$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{\omega}{c} \left(\xi\mu + \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2\mu)} \right) \mathbf{v} + \frac{4\pi\sqrt{\mu}}{c} \mathbf{j}_0, \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = -\frac{4\pi\rho_0}{\sqrt{\varepsilon + \xi^2\mu} - \xi\sqrt{\mu}}, \quad (9)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = -\frac{4\pi i\rho_0}{\sqrt{\varepsilon + \xi^2\mu} + \xi\sqrt{\mu}}. \quad (10)$$

Из данной системы видно, что для векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ нельзя получить на границе Σ условия, не содержащие наведенных токов и зарядов. Тем не менее можно предложить следующий алгоритм исследования хирального резонатора: для того чтобы получить собственные частоты и собственные колебания резонатора, найдем сначала общее решение однородных уравнений, соответствующих (7)–(10) при отсутствии возбуждающих колебания зарядов и токов; затем выразим векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через найденные $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ и подставим их в однородные граничные условия. Это позволит получить характеристическое уравнение для нахождения собственных частот ω .

2. Сферический хиральный резонатор

Используем предложенную методику для исследования сферического резонатора с хиральным заполнением. Пусть область V представляет собой шар радиуса R с идеально проводящей границей. Находя решение однородных уравнений, соответствующих (7)–(10) в сферической системе координат, и учитывая, что комплексные амплитуды $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны с векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, как

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2\mu}}(i\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \mathbf{h} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}(\mathbf{v} - i\mathbf{u}),$$

получаем общее решение вида

$$\begin{aligned} e_\varphi^{nm} = & \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2\mu}} \left(A_{nm} \frac{k_2\sqrt{r}}{r} J_{n+1/2}(k_2r) + \right. \\ & + B_{nm} \frac{k_1\sqrt{r}}{r} J_{n+1/2}(k_1r) \Big) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} + \\ & + \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2\mu}} \frac{m}{r \sin\theta} \frac{d}{dr} \left(A_{nm} \sqrt{r} J_{n+1/2}(k_2r) - \right. \\ & \left. - B_{nm} \sqrt{r} J_{n+1/2}(k_1r) \right) P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_\theta^{nm} = & \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2\mu}} \frac{m\sqrt{r}}{r \sin\theta} (A_{nm} k_2 J_{n+1/2}(k_2r) + \\ & + B_{nm} k_1 J_{n+1/2}(k_1r)) P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{Bmatrix} - \\ & - \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2\mu}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(A_{nm} \sqrt{r} J_{n+1/2}(k_2r) - \right. \\ & \left. - B_{nm} \sqrt{r} J_{n+1/2}(k_1r) \right) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_r^{nm} = & -\frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2\mu}} \frac{n(n+1)}{r^2} \sqrt{r} (A_{nm} J_{n+1/2}(k_2r) - \\ & - B_{nm} J_{n+1/2}(k_1r)) P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} h_\varphi^{nm} = & \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \left(A_{nm} \frac{k_2\sqrt{r}}{r} J_{n+1/2}(k_2r) - \right. \\ & - B_{nm} \frac{k_1\sqrt{r}}{r} J_{n+1/2}(k_1r) \Big) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{m}{r \sin\theta} \frac{d}{dr} \left(A_{nm} \sqrt{r} J_{n+1/2}(k_2r) + \right. \\ & \left. + B_{nm} \sqrt{r} J_{n+1/2}(k_1r) \right) P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_\theta^{nm} = & \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{m\sqrt{r}}{r \sin\theta} (A_{nm} k_2 J_{n+1/2}(k_2r) - \\ & - B_{nm} k_1 J_{n+1/2}(k_1r)) P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{Bmatrix} - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(A_{nm} \sqrt{r} J_{n+1/2}(k_2r) + \right. \\ & \left. + B_{nm} \sqrt{r} J_{n+1/2}(k_1r) \right) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}, \\ h_r^{nm} = & -\frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{n(n+1)}{r^2} \sqrt{r} (A_{nm} J_{n+1/2}(k_2r) + \\ & + B_{nm} J_{n+1/2}(k_1r)) P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

В этих выражениях $k_1 = \frac{\omega}{c} (-\xi\mu + \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2\mu)})$ и $k_2 = \frac{\omega}{c} (\xi\mu + \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2\mu)})$.

Так как поверхность шара является идеальным проводником, то для вектора $\mathbf{e}$ должно выполняться граничное условие $[\mathbf{r}, \mathbf{e}]|_{r=R} = 0$. Потребуем, чтобы компонента e_φ^{nm} обращалась в нуль при $r = R$. Для этого должна быть справедлива система

$$\begin{cases} A_{nm} k_2 J_{n+1/2}(k_2R) + B_{nm} k_1 J_{n+1/2}(k_1R) = 0, \\ \frac{d}{dR} (A_{nm} \sqrt{R} J_{n+1/2}(k_2R) - B_{nm} \sqrt{R} J_{n+1/2}(k_1R)) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Но если данная система справедлива, то и компонента e_θ^{nm} также обращается в нуль при $r = R$. Кроме того,

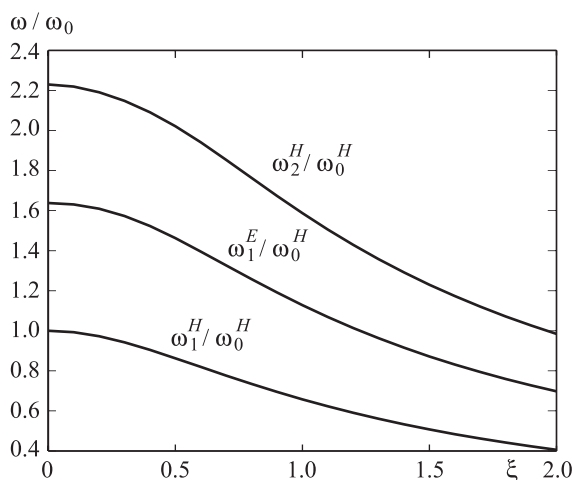
при этом также автоматически выполняется условие (5) на нормальные составляющие векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$.

Однородная система (11) имеет нетривиальное решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Это условие позволяет получить характеристическое уравнение для нахождения собственных частот ω_{np} резонатора:

$$\alpha_2 J_{n+1/2} \left(\frac{\omega}{c} \alpha_2 R \right) \frac{d}{dR} \left(\sqrt{R} J_{n+1/2} \left(\frac{\omega}{c} \alpha_1 R \right) \right) + \alpha_1 J_{n+1/2} \left(\frac{\omega}{c} \alpha_1 R \right) \frac{d}{dR} \left(\sqrt{R} J_{n+1/2} \left(\frac{\omega}{c} \alpha_2 R \right) \right) = 0, \quad (12)$$

где $\alpha_1 = -\xi\mu + \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2\mu)}$ и $\alpha_2 = \xi\mu + \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2\mu)}$.

Результаты численного решения уравнения (12) приведены на рисунке. Как можно видеть, с ростом параметра ξ значения собственных частот уменьшаются, и происходит их сближение.



Зависимость собственных частот от хирального адмитанса ξ для $n = 1$. На графике приведены отношения частот к значению ω_0^H — наименьшей собственной частоте резонатора при отсутствии хиральности ($\xi = 0$). Индексы E и H у частот означают, что в пределе при $\xi = 0$ они стремятся к собственным частотам E - и H -колебаний соответственно.

Заметим, что в случае обычной среды, т.е. при условии $\xi = 0$, характеристическое уравнение (12) вырождается в два уравнения

$$\frac{d}{dR} \left(\sqrt{R} J_{n+1/2}(k_0 R) \right) = 0 \quad (13)$$

и

$$J_{n+1/2}(k_0 R) = 0, \quad (14)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$, так как при этом $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Уравнения (12) и (13) — это характеристические уравнения на собственные частоты E - и H -колебаний обычного сферического экранированного резонатора соответственно. На основании подготовительной теоремы Вейерштрасса (см., напр., [12]) можно показать, что решения уравнения (11) непрерывно зависят от параметра ξ . Обозначим как ω_E^{np} те из них, которые при равном нулю параметре хиральности совпадают с частотами E -колебаний обычного сферического резонатора.

Воспользуемся первым уравнением системы (11) для того, чтобы найти связь между коэффициентами A_{nm} и B_{nm} . В результате получим выражения для комплексных амплитуд собственных колебаний хирального резонатора, которые в пределе $\xi = 0$ с точностью до множителя $k_{0,E}^{np} J_{n+1/2}(k_{0,E}^{np} R)$ совпадут с E -колебаниями обычного сферического резонатора.

Обозначим как ω_H^{np} решения характеристического уравнения (12), совпадающие при равном нулю параметре ξ с собственными частотами, отвечающими H -колебаниям обычного резонатора. Найдем связь между коэффициентами A_{nm} и B_{nm} с помощью второго уравнения системы (11). В результате получим еще одну серию решений для хирального сферического резонатора, которые в пределе при равном нулю параметре хиральности ξ с точностью до множителя $\frac{d}{dR} \left(\sqrt{R} J_{n+1/2}(k_{0,H}^{np} R) \right)$ совпадают с H -колебаниями обычного сферического резонатора. Таким образом, в хиральном резонаторе поддерживаются только гибридные собственные колебания.

Заключение

В работе предложен алгоритм исследования экранированных резонаторов, заполненных хиральным веществом. В качестве иллюстративного примера рассмотрен сферический хиральный резонатор, для которого получены выражения для собственных полей и характеристическое уравнение для собственных частот. Проведенный анализ показал, что в хиральном резонаторе могут формироваться только гибридные собственные поля, которые при обращении в нуль параметра хиральности вырождаются в обычные E - и H -колебания. Собственные частоты хирального резонатора оказываются меньше соответствующих частот резонатора, заполненного обычной средой.

Список литературы

1. Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А., Петров Д.А. // Математическое моделирование. 2007. **19**, № 5. С. 3.
2. Кацеленбаум Б.З., Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шапиров А.Д. // УФН. 1997. **167**. Р. 1201.
3. Pelet P. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1990. **38**, N 1. Р. 90.
4. Bahr A.J., Clausen K.R. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1994. **42**, N 12. Р. 1592.
5. Jaggard D.L., Mickelson A.R., Papas C.H. // Appl. Phys. 1979. **18**. Р. 211.
6. Tobar M.E., Mann A.G. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1991. **39**. Р. 2077.
7. Guillon P., Jiao X. // Proc. IEEE. Part H. 1987. **134**.
8. Schiller S., Beyer R.L. // Opt.Lett. 1991. **16**. Р. 1138.
9. Фел С.С., Левинсон И.Б., Фридберг П.Ш. // Радиофизика и электроника. 1962. **6**, № 11. С. 1125.
10. Julien A., Guillon P. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1986. **34**. Р. 723.
11. Tobar M.E., Anstie J.D., Hartnett J.G. // IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2003. **50**, N 11. Р. 1407.
12. Фукс Б.А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., 1962.

Resonator with chiral filling**Yu. V. Mukhartova***Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.**E-mail: muhartova@yandex.ru*

The theory of electromagnetic shielded resonators with the uniform chiral filling is considered. The algorithm for determining the parameters of such systems is proposed. As an example a spherical chiroresonator is investigated for which the dispersive equation and the eigenfields are obtained. It is shown that only the hybrid eigenfields may exist in such resonator, and the pure E - and H -oscillations are not supported.

Keywords: chiral media, spherical resonator, eigenfrequencies, eigenfields.

PACS: 41.20.Cv.

Received 19 May 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2009).

Сведения об авторе

Мухартова Юлия Вячеславовна — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: muhartova@yandex.ru.