УДК 539.375 Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2006, вып. 2

В. К. Лащенов

РАЗРЫВ ОБОЛОЧКИ НА ЦИЛИНДРЕ

Рассматривается стационарная динамическая задача о движении полубесконечного продольного разреза в цилиндрической оболочке, посаженной с натягом на жесткий цилиндр. Найдены контактное давление между оболочкой и цилиндром, коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине разреза. Исследованы вопросы распространения волн и переноса энергии. Показано, что для потока энергии, переносимого незатухающими волнами, справедлива формула Кострова—Никитина—Флитмана [1], связывающая поток энергии, вытекающий из вершины трещины при расщеплении упругой области в стационарном режиме, с КИН.

Близким по тематике задачам посвящены исследования [2–6], в статической постановке контактная задача для цилиндрической оболочки, ослабленной полубесконечным разрезом, изучена в [7].

1. Постановка задачи и форма решения. Пусть в круговой цилиндрической оболочке $-\infty < x < +\infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$ толщины h и радиуса R срединной поверхности, надетой с натягом δ на абсолютно жесткий круговой цилиндр, вдоль образующей цилиндра распространяется с постоянной дорелеевской скоростью c полубесконечный разрез. Берега разреза и внешняя поверхность оболочки свободны от нагрузки, контактное трение между оболочкой и цилиндром отсутствует, контакт предполагается безотрывным, локальная энергия в вершине разреза конечна.

В случае, когда площадка контакта занимает часть поверхности оболочки, в уравнениях оболочки необходимо учитывать деформации сдвига или поперечного сжатия [8]. Рассматривая безотрывный контакт, воспользуемся системой линейных уравнений движения тонких оболочек в перемещениях без учета сдвига и сжатия [9, 10]:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}-\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{h}{B}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\ \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{h}{B}\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\ \frac{1}{R}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R}\right)+\frac{q}{B} &= \frac{h}{B}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

Здесь x, θ — координаты, отсчитываемые соответственно вдоль образующей и направляющей оболочки, ось z направлена по внутренней нормали к срединной поверхности, u, v — осевое и дуговое смещения точек срединной поверхности, w — радиальное смещение, практически заданное постановкой задачи, $B = Eh/(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость на растяжение, E — модуль продольной упругости, ν — коэффициент Пуассона, q — интенсивность нормальной нагрузки на оболочку (тангенциальные компоненты отсутствуют), ρ — плотность, t — время.

Нормальное, кольцевое и сдвигающее усилия выражаются формулами

$$N_x = B\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R}\right)\right], \tag{1.2}$$

© В. К. Лащенов, 2006

$$N_\theta = B\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R}\right), \qquad N_{x\theta} = \frac{1-\nu}{2}B\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right). \tag{1.3}$$

Поставленную задачу разобьем на основную о сплошной оболочке, надетой с натягом δ на жесткий цилиндр, и смешанную корректирующую, снимающую кольцевое усилие на разрезанной части оболочки ($x < 0,\ \theta = 0$). Обе задачи удобно рассматривать в системе координат $x_1 = x - ct,\ \theta_1 = \theta,\ z_1 = z$, связанной с вершиной разреза.

Решение основной задачи находится элементарно. В любом сечении оболочки нормальное усилие равно нулю. Исходя из формулы (1.2), сохраняющей, как и (1.3), свой вид при переходе к подвижной системе координат, получим

$$u = \frac{\nu\delta}{R}x, \qquad v = 0, \qquad w = \delta. \tag{1.4}$$

Здесь и далее индексы текущих координат опускаем.

Решение (1.4) порождает кольцевое усилие и соответствующее ему контактное давление, вызванное натягом. В безмоментной теории для круговой цилиндрической оболочки эти величины связаны формулой $N_\theta = -R\,q$ (см. (1.1), (1.3)) и в данном случае имеют вид $N_\theta = -Eh\delta/R,\ q = Eh\delta/R^2$.

Корректирующая задача с учетом симметрии задается граничными условиями

$$N_{x\theta} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty,\ \theta = 0), \tag{1.5}$$

$$N_\theta = Eh\delta/R \quad (x < 0,\ \theta = 0), \qquad v = 0 \quad (x > 0,\ \theta = 0), \tag{1.6}$$

$$N_{x\theta} = v = 0 \quad (-\infty < x < +\infty,\ \theta = \pi). \tag{1.7}$$

В п. 2 решение задачи (1.5)–(1.7) строится с помощью функций Папковича—Нейбера методом Винера—Хопфа в интегралах Лапласа.

2. Решение корректирующей задачи. Будем рассматривать смешанную задачу (1.5)–(1.7) как задачу для упругого слоя (пластины) $-\infty < x < +\infty,\ 0 \le y \le \pi R$ ($y = \theta R$) толщины h — развертки половины оболочки. В прямоугольных декартовых координатах x, y система (1.1) имеет вид

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\lambda' + 2\mu)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda' + \mu)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & = & \rho c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\[2ex] \mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda' + 2\mu)\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda' + \mu)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & = & \rho c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\[2ex] \dfrac{1}{R}\left(\nu\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \dfrac{q}{B} & = & 0, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

$\lambda' = B\nu/h,\ 2\mu = E/(1+\nu)$. Здесь u, v — компоненты вектора смещения по осям x, y (компонента w вдоль оси z равна нулю).

Уравнения (2.1) — уравнения Ламе в подвижной системе координат. Их решение запишем в виде интегралов Лапласа:

$$u_s(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L U_s(p,y)\, e^{px}\, dp. \tag{2.2}$$

Трансформанты функций $u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = h\tau_{xy},\ u_4 = h\sigma_x,\ u_4 = h\sigma_y$ (τ_{xy}, σ_x, σ_y — компоненты тензора напряжений) приведены в [11]:

$$
\begin{aligned}
&U_1(p,y) = p\Phi_1(p,y) + \frac{2}{(a^2-b^2)p}\Phi_2'(p,y),\\
&U_2(p,y) = \Phi_1'(p,y) - \frac{2}{a^2-b^2}\Phi_2(p,y),\\
&U_3(p,y) = 2\mu hp[\Phi_1'(p,y) - \frac{1+b^2}{a^2-b^2}\Phi_2(p,y)],\\
&U_4(p,y) = \mu h[(2a^2-b^2+1)p^2\Phi_1(p,y) + \frac{4}{a^2-b^2}\Phi_2'(p,y)],\\
&U_5(p,y) = -\mu h[(1+b^2)p^2\Phi_1(p,y) + \frac{4}{a^2-b^2}\Phi_2'(p,y)],\\
&\Phi_1(p,y) = A_1\cos apy + B_1\sin apy, \quad \Phi_2(p,y) = A_2\cos bpy + B_2\sin bpy,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где в силу (1.5), (1.7)

$$
A_1 = (1+b^2)C(p)\cos a\pi Rp\sin b\pi Rp, \qquad B_1 = (1+b^2)C(p)\sin a\pi Rp\sin b\pi Rp, \tag{2.4}
$$

$$
A_2 = a(a^2-b^2)C(p)p\sin a\pi Rp\sin b\pi Rp, \qquad B_2 = -a(a^2-b^2)C(p)p\sin a\pi Rp\cos b\pi Rp,
$$

$C(p)$ — функция, определяемая смешанными условиями (1.6), $\Phi' = \partial\Phi/\partial y$,

$$
a = \sqrt{1-c^2/c_3^2}, \quad b = \sqrt{1-c^2/c_2^2}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}, \quad c_3 = \sqrt{(\lambda'+2\mu)/\rho}
$$

(в случае плоской деформации вместо скорости продольных волн c_3 берется $c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, $\lambda = \lambda'/(1-\nu)$, значение скорости поперечных волн c_2 остается без изменений), L — прямая $\operatorname{Re} p = \alpha$, $\alpha < 0$.

Трансформанты U_2, U_5 при $y = 0$ приводят к уравнениям

$$
N_\theta^+(p) + N_\theta^-(p) = C(p)N_1(p), \quad V^+(p) + V^-(p) = C(p)N_2(p), \quad p \in L, \tag{2.5}
$$

где

$$
N_\theta^\pm(p) = \pm h\int_0^{\pm\infty}\sigma_y(x,0)e^{-px}dx, \qquad V^\pm(p) = \pm\int_0^{\pm\infty}v(x,0)e^{-px}dx,
$$

$$
N_1(p) = \mu hp^2[4ab\sin a\pi Rp\cos b\pi Rp - (1+b^2)^2\cos a\pi Rp\sin b\pi Rp],
$$

$$
N_2(p) = -a(1-b^2)p\sin a\pi Rp\sin b\pi Rp.
$$

Верхние индексы + и − обозначают аналитичность функции в правой и левой полуплоскости соответственно.

Функция N_1 имеет счетное множество комплексных нулей, расположенных симметрично относительно осей комплексной плоскости, т. е. наряду с нулем a_k, находящимся, например, в первом квадранте (номера $k = 1, 2, \ldots$ берутся в порядке возрастания вещественной части), числа $-a_k$ и $\pm\overline{a}_k$ также нули функции N_1. Имеет место асимптотическое соотношение [6]:

$$
a_k = \frac{k}{(a+b)R} + O(1), \qquad k \to +\infty.
$$

Чисто мнимых нулей в рассматриваемом скоростном диапазоне функция N_1 не имеет. Нули функции N_2 очевидны.

В силу (1.6) уравнения (2.5) принимают вид

$$N_\theta^+(p) - \frac{Eh\delta}{Rp} = C(p)N_1(p), \qquad V^-(p) = C(p)N_2(p), \quad p \in L. \tag{2.6}$$

Исключение $C(p)$ приводит к уравнению Винера—Хопфа:

$$N_\theta^+(p) - \frac{Eh\delta}{Rp} = K(p)V^-(p), \qquad p \in L, \tag{2.7}$$

где $K(p) = N_1(p)/N_2(p)$, причем

$$K(p) \to \frac{A_0[4a^2 - (1+b^2)^2]}{a[4ab - (1+b^2)^2]\pi R}, \quad p \to 0; \quad K(i\beta) \sim A_0|\beta|, \quad \beta \to \pm\infty,$$

$$A_0 = \frac{-\mu h[4ab - (1+b^2)^2]}{a(1-b^2)}.$$

Решение однородного уравнения Винера—Хопфа

$$N_{\theta 0}^+(p) = K(p)V_0^-(p), \qquad p \in L$$

нетрудно получить, разбив его на две задачи Римана

$$N_{\theta 1}^+(p) = K_1(p)V_1^-(p), \qquad N_{\theta 2}^+(p) = K_2(p)V_2^-(p), \qquad p \in L$$

при

$$K_1(p) = A_0 p \operatorname{ctg} \pi p, \qquad K_2(p) = K(p)/K_1(p)$$

так, что

$$N_{\theta 1}^+(p)N_{\theta 2}^+(p) = N_{\theta 0}^+(p), \qquad V_1^-(p)V_2^-(p) = V_0^-(p).$$

Факторизовав котангенс, находим решение первой задачи:

$$N_{\theta 1}^+(p) = A_0\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1/2+p)}, \qquad V_1^-(p) = \frac{\Gamma(1/2-p)}{\Gamma(1-p)}.$$

Для второй задачи по формулам Гахова [12] имеем

$$N_{\theta 2}^+(p) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\ln K_2(t)}{t-p}\,dt\right\}, \qquad \operatorname{Re} p > 0,$$

$$N_{\theta 2}^+(i\beta) = K_2^{1/2}(i\beta)\exp\left\{\frac{i\beta}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln K_2(it)/K_2(i\beta)}{t^2-\beta^2}\,dt\right\}.$$

Найденные решения приводят к асимптотическому соотношению

$$N_{\theta 0}^+(p) \sim A_0\sqrt{p}, \qquad p \to \infty.$$

Для получения решения уравнения (2.7) остается заметить, что $N_{\theta 0}^{+} = o(N_{\theta}^{+})$, $p \to \infty$. Используя обобщенную теорему Лиувилля, можем записать

$$N_{\theta}^{+}(p) = -\frac{Eh\delta}{Rp}\left[\frac{N_{\theta 0}^{+}(p)}{N_{\theta 0}^{+}(0)} - 1\right], \quad \operatorname{Re} p > 0;$$

$$V^{-}(p) = -\frac{Eh\delta}{RpN_{\theta 0}^{+}(0)} V_{0}^{-}(p), \qquad \operatorname{Re} p < 0;$$

$$N_{\theta 0}^{+}(0) = N_{\theta 1}^{+}(0) N_{\theta 2}^{+}(0), \quad N_{\theta 1}^{+}(0) = \frac{A_0}{\sqrt{\pi}}, \quad N_{\theta 2}^{+}(0) = \sqrt{\frac{4a^2 - (1+b^2)^2}{aR[4ab - (1+b^2)^2]}}.$$

Тогда согласно (2.6) находим

$$C(p) = -\frac{Eh\delta}{RpN_{\theta 0}^{+}(0)} F(p). \tag{2.8}$$

Здесь $F(p) = N_{\theta 0}^{+}(p)/N_1(p)$ при $\operatorname{Re} p > 0$ и $F(p) = V_0^{-}(p)/N_2(p)$ при $\operatorname{Re} p < 0$. Подстановка (2.8) в (2.2)–(2.4) завершает решение корректирующей задачи.

В заключение заметим, что контактное давление между оболочкой и цилиндром в решении корректирующей задачи выражается формулой

$$q(x,\theta) = -\frac{\mu h}{2\pi i R} \int\limits_{L} C(p) p^2 [4ab \sin a\pi Rp \cos b(\pi - \theta) Rp -$$
$$- (1+b^2)^2 \cos a(\pi - \theta) Rp \sin b\pi Rp]\, e^{px}\, dp.$$

3. Распространение волн и перенос энергии. В формулах (2.2) контур интегрирования L сдвинем на мнимую ось, точнее пусть L проходит по мнимой оси, огибая точку $p = 0$ «слева» по дуге полуокружности «малого» радиуса. Разлагая решение (2.2)–(2.4), (2.8) в ряды по вычетам, взятым в нулях функции $N_1(p)$ ($\operatorname{Re} a_k > 0$), при $x < 0$ получим

$$u_s(x,y) = u_s^0(x,y) + \frac{Eh\delta}{RN_{\theta 0}^{+}(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{\theta 0}^{+}(a_k)}{a_k N_1'(a_k)} U_s^0(a_k, y) e^{a_k x}, \tag{3.1}$$

$U_s(p,y) \equiv C(p) U_s^0(p,y)$. Первые слагаемые в (3.1) — вычеты в нуле

$$u_1^0(x,y) = \frac{2\delta(1+\nu)(1-2a^2+b^2)}{[4a^2-(1+b^2)^2]R}\left[x + \frac{N_{\theta 0}^{+*}(0)}{N_{\theta 0}^{+}(0)}\right],$$

$$u_2^0(x,y) = -\frac{2\delta(1+\nu)a^2(1-b^2)}{[4a^2-(1+b^2)^2]R}(\pi R - y), \tag{3.2}$$

$$u_3^0(x,y) = 0, \quad u_4^0(x,y) = \frac{Eh\delta(1-2a^2+b^2)(1-b^2)}{[4a^2-(1+b^2)^2]R}, \quad u_5^0(x,y) = \frac{Eh\delta}{R},$$

— определяют полиномиальное решение (незатухающую волну), в котором перемещение u_1 растет линейно по x, перемещение u_2 — ограничено. Ряд в (3.1) задает волны, экспоненциально убывающие по x при $x \to -\infty$.

Таким образом, поток энергии, генерируемой полученным решением, может переноситься по слою только полиномиальной волной. Величина его зависит от мощности внешней нагрузки, кинетической энергии скоростей перемещений слоя и внутренней энергии деформаций. В сечении $x = \text{const} < 0$, $-\pi R \le y \le \pi R$, $-h \le z \le h$ поток энергии в любой момент времени может быть найден по формуле [6]

$$W = h \int\limits_{0}^{\pi R} \left\{ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} - \rho c^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dy.$$

Подставив в нее компоненты (3.2), найдем

$$W_\delta = -4 \frac{a^2 \rho c^2 h \pi \delta^2 (1+\nu)^2}{R[4a^2 - (1+b^2)^2]}. \tag{3.3}$$

В рассматриваемом решении поток движется от вершины трещины к $-\infty$, причем с уменьшением скорости продвижения трещины и приближением ее к нулю величина $-W_\delta$ стремится к значению $E\pi h\delta^2/R$, выражающему плотность энергии деформации элементарного решения (1.4) [7].

Учитывая сингулярность поля напряжений в вершине трещины, характерную для задач линейной механики разрушения, найдем асимптотическим способом коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва

$$K_I = -E\delta \sqrt{\frac{2a\pi[4ab - (1+b^2)^2]}{R[4a^2 - (1+b^2)^2]}}. \tag{3.4}$$

Заметим, что при выбранном направлении оси z натяг $\delta < 0$.

Соотношения (3.3) и (3.4) приводят к равенству

$$W_\delta = -K_I^2 \frac{a\rho c^2 h}{2\mu^2 [4ab - (1+b^2)^2]},$$

которое совпадает с формулой Кострова—Никитина—Флитмана [1] для потока энергии, вытекающего из вершины трещины при расщеплении упругой области в стационарном режиме. Поскольку функция $N_2(p)$ на контуре L не имеет чисто мнимых нулей, разложив интегралы (2.2) в ряды по вычетам слева от L, получим при $x \to +\infty$ только затухающие волны, так что потока энергии на $+\infty$ в слое нет.

Summary

V. K. Laschenov. Cracking of a shell on the cylinder.

The dynamic stationary problem of motion of the semi — infinite cut in the cylindrical shell put with a tension on a rigid cylinder is considered. The formulae for the contact pressure between the shell and the cylinder and for the stress intensity factor (SIF) in the cut tip are obtained. The problems of wave propagation and energy transfer are investigated. The formula of Kostrov—Nikitinn—Flitmann relating the energy flow to SIF is shown to be valid for the energy flow transferred by undamped waves

Литература

1. *Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М.* Механика хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. №3. С. 112–125.

2. *Гольдштейн Р. В., Матчинский М.* О стационарном движении трещины в полосе // Инж. ж. Мех. твердого тела. 1967. №4. С. 98–107.

3. *Гольдштейн Р. В.* Стационарное движение трещины в полосе. Предельная скорость трещины // Инж. ж. МТТ. 1968. №2. С. 76–87.

4. *Nilsson F.* Dynamic stress-intenity factors for finity strip problems // J. Fract. Mech. 1972. Vol. 8. N 4. C. 403–411.

5. *Симонов И. В.* Стационарное дозвуковое движение разреза в упругой полосе // Изв. РАН. МТТ. 1982. №6. С. 90–99.

6. *Лащенов В. К., Нуллер Б. М.* Стационарое движение трещины в упругой полосе (однородные задачи) // Прикладная мат. и мех. 2004. Т. 68. Вып. 1. С. 155–169.

7. *Кантинов В. В., Нуллер Б. М.* Контактная задача для цилиндрической оболочки, ослабленной полубесконечной щелью // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. Горьк. ун-т. 1988. С. 61–66.

8. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. С.

9. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.

10. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

11. *Лащенов В. К.* О стационарном движении упругих балок по границе изотропной упругой полосы // Изв. РАН. МТТ. 2002. №4. С. 163–175.

12. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Статья поступила в редакцию 13 декабря 2005 г.