Секция: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Разложение формы Березина на сфере [1]

© **А. А. Артемов**

Канонические представления обобщенной группы Лоренца $G = SO_0(1, n{-}1)$ на единичной сфере $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ определяются как ограничения на G представлений максимально вырожденных серий надгруппы $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Форма Березина $\mathcal{B}_{\mu,\nu}(f, h)$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, на сфере Ω есть полуторалинейная форма, ядро которой $E_{\mu,\nu}(u, v)$, $u, v \in \Omega$, получается из ядра оператора, сплетающего представления максимально вырожденных серий. А именно, $E_{\mu,\nu}(u, v) = b(\mu) \cdot [u, v]^{\mu,\nu}$, где $[u, v] = -u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$. Множитель $b(\mu)$ взят таким образом, чтобы оператор с ядром $E_{\mu,0}(u, v)$ переводил тождественную единицу на Ω в нее саму. Задача о разложении формы Березина сводится к разложению по сферическим функциям обобщенных функций $E^+_\mu = b(\mu)\ y_1^\mu$ и $E_{\mu,\nu} = b(\mu)\ x_n^{\mu,\nu}$ на гиперболоидах $\mathcal{Y}^+ = \{[y, y] = -1, y_1 \geqslant 1\}$ и $\mathcal{X} = \{[x, x] = 1\}$, соответственно, и обобщенной функции $E^{\mathrm{mix}}_{\mu,\nu} = b(\mu)\ y_n^{\mu,\nu}$ на гиперболоиде $\mathcal{Y}^+$ по смешанным сферическим функциям. Для простоты изложения мы ограничимся случаем $n{=}3$. Тогда $b(\mu) = (-\mu - 1)/2\pi$.

На гиперболоиде $\mathcal{Y}^+$ сферические функции Ψ_σ, $\sigma \in \mathbb{C}$, только множителем отличаются от функций Лежандра: $\Psi_\sigma(y) = 2\pi\ P_\sigma(y_1)$, на гиперболоиде $\mathcal{X}$ сферические функции $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$, $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon{=}0, 1$, имеют выражение

$$\Psi_{\sigma,\varepsilon}(x) = -\frac{2\pi}{\sin\sigma\pi}\ \Big[P_\sigma(-x_3) + (-1)^\varepsilon P_\sigma(x_3)\Big],$$

сферические функции Ψ^d_n дискретной серии пропорциональны функциям Лежандра второго рода: $\Psi^d_n(x) = 4Q_n(x_3)$, наконец, смешанные сферические функции $\Phi_{\sigma,\varepsilon}$ на гиперболоиде $\mathcal{Y}^+$ даются формулой:

$$\Phi_{\sigma,\varepsilon}(y) = 2\pi\Big[e^{i\sigma\pi/2} + (-1)^\varepsilon e^{-i\sigma\pi/2}\Big]^{-1} \cdot \Big(P_\sigma(iy_3) + (-1)^\varepsilon P_\sigma(-iy_3)\Big).$$

Основной результат состоит в следующих разложениях для $\mathrm{Re}\ \mu{<}{-1/2}$:

$$E^+_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma)\ \Lambda(\mu, \sigma)\ \Psi_\sigma\ d\rho\,,$$

$$E_{\mu,\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} (1/2)\omega(\sigma)\ \Lambda(\mu, \nu, \sigma)\ \Psi_{\sigma,\nu}\ d\rho + \sum_{n=0}^{\infty}\ \omega_n\ \Lambda_n(\mu)\ \Psi^d_n\,,$$

$$E^{\mathrm{mix}}_{\mu,\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\sigma)}{\sin\sigma\pi}\ \Lambda^{\mathrm{mix}}(\mu, \nu, \sigma)\ \Phi_{\sigma,\nu}\ d\rho\,,$$

[1] Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований: гранты No. 05-01-00074а, 07-01-91209 ЯФ_а и 06-06-96318 р_центр_а, Научными Программами "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы": проект РНП.2.1.1.351 и Темплан No. 1.5.07.

во всех интегралах $\sigma = -(1/2) + i\rho$. Здесь $\omega(\sigma)$, ω_n – известные множители в мерах Планшереля,

$$\Lambda(\mu,\sigma) = \frac{\Gamma\big((-\mu+\sigma)/2\big)\Gamma\big((-\mu-\sigma-1)/2\big)}{\Gamma\big(-\mu/2\big)\Gamma\big((-\mu-1)/2\big)},$$
$$\Lambda(\mu,\nu,\sigma) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\mu-\nu}{2}\pi\cdot\Lambda(\mu,\sigma),\ \Lambda_n(\mu) = 2^{-\mu+1}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\mu+n}{2}\pi\cdot\Lambda(\mu,n),$$
$$\Lambda^{\mathrm{mix}}(\mu,\nu,\sigma) = \big[\sin\frac{\mu-\sigma}{2}\pi + (-1)^\nu\sin\frac{\mu+\sigma}{2}\pi\big]\{\sin\mu\pi\}^{-1}\Lambda(\mu,\sigma).$$

О граничных представлениях, связанных с полиномиальным квантованием [1]

© **Н. Б. Волотова**

В настоящей заметке мы хотим обсудить один из вариантов граничных представлений, возникающих в связи с полиномиальном квантованием. Мы ограничимся ключевым примером: однополостным гиперболоидом $\mathcal{X} = G/H$ в $\mathbb{R}^3$, здесь $G = \mathrm{SO}_0\,(1,2)$, $H = \mathrm{SO}_0\,(1,1)$. Полиномиальное квантование на этом гиперболоиде построено в [2].

Для $x \in \mathbb{R}^3$ обозначим $Q = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Гиперболоид $\mathcal{X}$ задается уравнением $Q = 1$, группа G сохраняет Q, подгруппа H сохраняет координату x_3. Многочлен f на $\mathbb{R}^3$ называется G-гармоническим, если он удовлетворяет волновому уравнению $(-\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)f = 0$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Пусть S, $\mathcal{H}$, S_k, $\mathcal{H}_k$ обозначают пространства всех многочленов, всех G-гармонических многочленов, однородных многочленов степени k, однородных G-гармонических многочленов степени k на $\mathbb{R}^3$, соответственно. Обозначим через $S(\mathcal{X})$, $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ и т.д. ограничения на $\mathcal{X}$ многочленов из S, $\mathcal{H}$ и т.д. Для G-гармонических многочленов такое ограничение взаимно-однозначно. В пространствах $\mathcal{H}_k$ и $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ действует (сдвигами) конечномерное неприводимое представление π_k группы G со старшим весом k.

Всякий многочлен f из S_k разлагается по степеням Q:

$$f(x) = h_k(x) + h_{k-2}(x)Q + h_{k-4}(x)Q^2 + \ldots, \tag{1}$$

где $h_j \in \mathcal{H}_j$. Многочлен $h_k(x)$ есть G-гармоническая проекция многочлена $f(x)$, она выражается через $f(x)$ некоторой дифференциальной формулой, аналогичной формуле для обычной гармонической проекции [1]. С другой стороны, на $\mathcal{X}$ G-гармоническая проекция $h_k(x)$ дается сверткой (определение свертки дано в [2]) $f(x)$ со сферической функцией Ψ_k, последняя есть функция Лежандра $P_k(x_3)$ с некоторым множителем. Из (1) следует, что $S_k(\mathcal{X}) = \mathcal{H}_0(\mathcal{X}) + \mathcal{H}_1(\mathcal{X}) + \ \ldots\ + \mathcal{H}_k(\mathcal{X})$.

Спроектируем $\mathbb{R}^3$ на плоскость $L = \{x_1 = 1\}$, сопоставляя точке x точку $y = x/x_1$ ($x_1 \neq 0$). Тогда гиперболоид $\mathcal{X}$ перейдет во внешность единичного круга: $x_2^2 + x_3^2 > 1$, а многочлен F из $S_k(\mathcal{X})$ перейдет в многочлен φ от двух переменных y_2, y_3 степени k (многочлен F есть ограничение многочлена $f \in S_k$ на $\mathcal{X}$, а φ есть ограничение многочлена f на L). По (1) многочлен φ разлагается по степеням $p = y_2^2 + y_3^2 - 1$:

$$\varphi(y) = \alpha_k(y) + \alpha_{k-2}(y)p + \alpha_{k-4}(y)p^2 + \ldots. \tag{2}$$

Таким образом, разложение (2) дает характеризацию представлений π_m, действующим в $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$, с точки зрения "граничных" значений многочленов из $S_k(\mathcal{X})$.

[1]Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований: гранты No. 05-01-00074a, 07-01-91209 ЯФ_а и 06-06-96318 р_центр_а, Научными Программами "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы": проект РНП.2.1.1.351 и Темплан No. 1.5.07.