

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.2:004.421.5:004.7

В. Н. ЗАДОРОВЫЙ

Омский государственный
технический университет,
г. Омск

РАСТУЩИЕ СЕТИ С ПОТЕРЯМИ УЗЛОВ

Разрабатываются методы анализа растущих сетей со случайными потерями узлов. На основе теории случайных графов предпочтительного связывания выводятся уравнения для распределения степеней вершин в переходном и стационарном режимах. Предлагаются численные методы решения полученных уравнений. Приводятся примеры расчетов. Оценивается устойчивость распределения степеней вершин к потерям.

Ключевые слова: теория сетей, случайные графы предпочтительного связывания, переходные и стационарные распределения степеней связности.

1. Введение. В науке о сетях информационные, транспортные, электрические, социальные и многие другие большие сети рассматриваются как явление природы, исследование которого приводит к познанию общих законов развития сетей и к разработке стратегий управления сетевыми процессами. В последнее время от разумного и своевременного решения этих важных вопросов все более зависит не только прогресс, но и само существование человеческой цивилизации.

Математической основой теории сетей является теория случайных графов, которая со времени создания классической теории простейших случайных графов [1] обогатилась развитым математическим аппаратом исследования множества более адекватных и сложных графовых моделей. Одними из наиболее перспективных моделей сетей являются графы предпочтительного связывания. Первая и наиболее

популярная до настоящего времени версия графов предпочтительного связывания — это графы Барабаши — Альберт (графы БА), предложенные в работах [2–4]. Появление графов БА привело к взрывному росту числа публикаций по теории сетей (см., например, [5–8]), в которых предлагаются и исследуются случайные графы, представляющие собой обобщения модели БА. В работах [9–11] предлагается и исследуется класс графов с нелинейным правилом предпочтительного связывания (НППС), а также разрабатывается математический аппарат для точного расчета стационарных характеристик графов с НППС.

Граф с НППС выращивается из небольшого графа без петель (затравки) путем добавления к нему в моменты $t = t_1, t_2, \dots$ очередного *приращения графа* — новой вершины со случайным числом x исходящих из нее дуг. Концы дуг приращения связыва-

ются со случайно выбираемыми вершинами графа. Вероятность p_i того, что дуга выберет для связи вершину i , пропорциональна весу f этой вершины, определяемому через ее степень связности k_i :

$$p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_j f(k_j)}. \quad (1)$$

При неограниченном добавлении приращений формируется бесконечный граф. Таким образом, случайный граф с НППС задается двумя параметрами — распределением $\{r_k\}$ вероятностей случайной величины x — числа дуг у приращения — и весовой функцией $f(k) \geq 0$. Будем считать, что $f(k) > 0$ тогда и только тогда, когда $g \leq k \leq M$ (где $g \geq 0$, $M \leq \infty$) и обозначать $f(k)$ в виде f_k .

2. Постановка задачи. В теории случайных графов с НППС [9–11] решаются задачи анализа (расчета характеристик) графов, заданных параметрами $\{r_k\}$ и $f(k)$, и задачи синтеза (калибровки) графов, т.е. задачи определения таких $\{r_k\}$ и $f(k)$, которые обеспечивают наличие у выращиваемых графов заданных характеристик.

Решения задач анализа охватывают в качестве частных случаев результаты, полученные в других работах. Если число x дуг приращения считать постоянным ($x = m = \text{const}$) и положить $f(k) = k$, то граф с НППС превращается в граф БА, а соответствующие найденные для графов с НППС соотношения — в соотношения для графов БА (известные ранее или новые). Если положить $f(k) = k^g$, то при $x = m = \text{const}$ из соотношений для графов с НППС получается ряд результатов, найденных в [6] для графов со степенной весовой функцией.

Вместе с тем целый класс решенных для графов с НППС задач — задач калибровки — не имеет аналогов в частных теориях графов предпочтительного связывания. Это обеспечивает графам с НППС серьезные преимущества при построении моделей реальных больших сетей.

Найденные в теории графов с НППС аналитические выражения и методы точного численного расчета таких характеристик, как распределение степеней связности (РСС) вершин или дуг графа обеспечивают этой теории принципиальные преимущества по скорости и точности вычислений в сравнении с методами имитационного моделирования (ИМ).

Преимущества теории случайных графов с НППС становятся еще более значимыми в результате вывода уравнений динамики, описывающих переходные процессы развития графов при $t < \infty$, и в результате разработки численных методов их решения [12]. Численные методы расчета особенно важны при вычислении хвостов таких распределений, которые, оказываясь степенными (фрактальными), на порядки усложняют применение ИМ [13].

В статье [14] получен результат, обеспечивающий теории графов с НППС еще одно качественное преимущество: выведены уравнения динамики для графов с НППС, случайно теряющих дуги в ходе выращивания графов. Эти результаты позволяют исследовать реальные сети с потерями связей.

В настоящей статье ставится и решается задача анализа графов с НППС со случайными потерями вершин. На каждом шаге выращивания таких графов наряду с присоединением очередного приращения может быть (с вероятностью p) потеряна одна случайно выбранная вершина (с.в.в.). При потере вершины удаляются и все инцидентные ей дуги графа. Требуется вывести уравнения динамики, позволя-

ющие по заданным параметрам p , $\{r_k\}$ и f рассчитывать переходные процессы в растущих графах. На основе уравнений динамики требуется получить уравнения для стационарных РСС вершин и разработать численные методы их решения. Необходимо также на примерах расчета графов с потерями вершин показать возможность получения содержательных выводов о моделируемых реальных сетях с потерями узлов.

3. Вывод уравнений динамики. В процессе выращивания графа будем рассматривать его РСС вершин как вектор-функцию $\mathbf{q}(t) = \{q_k(t)\}$ скалярного аргумента t , где q_k — вероятность того, что с.в.в. графа имеет степень связности k . Например, кольцо на $N > 2$ вершинах имеет РСС $\mathbf{q} = \{q_0, q_1, q_2\} = \{0, 0, 1\}$, так как в кольце степень с.в.в. с вероятностью 1 равна двум. В общем случае длина (число координат) вектора $\mathbf{q}$ равна $K + 1$ (где $K = \max\{k\}$) и меняется во времени t .

Поскольку на каждом шаге выращивания графа к нему добавляется одна вершина и теряется в среднем p вершин, то, пренебрегая малыми размерами затравки, среднее число $N(t)$ вершин в графе можно считать равным $(1 - p)t$.

Для получения уравнений динамики графов с потерями естественно опереться на выведенные в [12] уравнения динамики графов без потерь:

$$N_k(t + 1) = N_k(t) + r_k + mP_{k-1}(t) - mP_k(t), \quad k \geq g, \quad (2)$$

где N_k — среднее число вершин графа, имеющих степень k ;

$r_k = P(x = k)$ — вероятность того, что приращение графа имеет k дуг;

$m = \sum k r_k$ — средняя степень приращения графа;

$P_k(t) = \frac{q_k(t)f_k}{\bar{f}(t)}$ — вероятность того, что по правилу (1)

дуга приращения выберет вершину графа, имеющую степень k . В этом последнем выражении $\bar{f}(t) =$

$= \sum_{k=g}^M f_k q_k(t)$ — средний вес вершин графа на шаге t .

С учетом того, что $N_k(t) = q_k(t)N(t)$ и что в графе без потерь $N(t) = t$, уравнения (2) приводятся в [12] к виду

$$q_k(t + 1) = \frac{t q_k(t) + r_k + m P_{k-1}(t) - m P_k(t)}{t + 1},$$

или, с учетом приведенного выше для $P_k(t)$ выражения, к виду

$$q_k(t + 1) = \frac{t q_k(t) + r_k + \frac{m}{\bar{f}(t)} [q_{k-1}(t) f_{k-1} - q_k(t) f_k]}{t + 1}, \quad k \geq g. \quad (3)$$

Уравнения (3) позволяют рассчитать РСС $\mathbf{q}(t)$ графа без потерь при заданном начальном РСС $\mathbf{q}(t_0)$, которое определяется начальным графом-затравкой, содержащим $N_0 = t_0$ вершин. Эти уравнения, как и лежащее в их основе соотношение (2), являются асимптотически точными. С ростом t рассчитываемые по этим уравнениям РСС $\mathbf{q}(t)$ быстро сходятся к точным РСС.

Теперь для вывода уравнений динамики, описывающих эволюцию графов с потерями, добавим к правой части соотношения (2) слагаемые, учитывающие влияние на величину $N_k(t + 1)$ возможной

G8		=1/\$A\$8*(\$A\$7*G7+\$G\$3/\$B\$3+\$D\$2/\$B\$3*(F7*F\$4-G7*\$G\$4)/\$C\$7-\$B\$2/\$B\$3*G7+\$B\$2*\$H\$2/\$B\$3*H7-\$B\$2*\$G\$2/\$B\$3*G7)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2	p =	0,2	m =	2	k =		0	1	2	3	4	5	6
3	q =	0,8	M =	200	rk		0	0	1				
4					f(k) =	0	0	1	2	3	4	5	6
5	t	N(t)	<f>(t)	kcp(t)			q0(t)	q1(t)	и т.д.				
6	3	3	2,0000	2,000			0	0	1	0			
7	4	3,2	2,5000	2,500			0	0,125	0,25	0,625	0	0	0
8	5	4	2,7500	2,750			0,00625	0,0875	0,43125	0,1	0,375	0	0
9	6	4,8	2,8958	2,896			0,008594	0,088305	0,408878	0,214394	0,052557	0,227273	0
10	7	5,6	2,9896	2,990			0,010213	0,087697	0,418237	0,182177	0,129644	0,031884	0,140148
11	8	6,4	3,0540	3,054			0,011358	0,088227	0,421808	0,183146	0,101086	0,08574	0,020738
Паузер qk(t)													

Рис. 1. Таблица на Excel для расчета РСС $q(t)=\{q_k(t)\}$ растущего графа с потерями вершин

(с вероятностью p) потери с.в.в. графа. Обозначая через A_k подмножество (слой) вершин, имеющих степень k , и через $B(l, k)$ — подмножество дуг (туннель), исходящих из вершин слоя A_l и заходящих в вершины слоя A_k , можно отметить следующее.

1. Поскольку с.в.в. с равной вероятностью может оказаться любой из N вершин графа, то в слое A_k она выбирается с вероятностью q_k . И первое корректирующее правую часть соотношения (2) слагаемое, равное $[-pq_k(t)]$, учитывает среднее число вершин, теряемых в слое A_k непосредственно за счет выбора удаляемой вершины в этом слое.

2. Если с.в.в. удаляется из некоторого (любого) слоя A_l , то вместе с ней удаляются все инцидентные ей дуги. В среднем одну вершину слоя A_l с вершинами

слоя A_k связывает $\frac{|B(l, k)| + |B(k, l)|}{|A_l|}$ дуг. Удаление

этих дуг уменьшает степени соответствующих вершин слоя A_k . Поэтому такие вершины из слоя A_k уходят. Представим их среднее число в виде

$$\frac{|B(l, k)| + |B(k, l)|}{|A_l|} = \frac{1}{N} \frac{|B(l, k)| + |B(k, l)|}{|A_l| / N} = \frac{1}{N} \frac{|B(l, k)| + |B(k, l)|}{q_l}$$

и, усредняя по выборам с.в.в. во всех слоях, находим безусловное среднее число вершин, теряемых в слое A_k за счет снижения их степени:

$$\sum_l q_l \frac{1}{N} \frac{|B(l, k)| + |B(k, l)|}{q_l} = \frac{1}{N} \sum_l |B(l, k)| + |B(k, l)|$$

Последняя сумма представляет здесь общее (среднее) число дуг, инцидентных вершинам слоя A_k . Заменяя ее эквивалентным более простым выражением kN_k , находим, что среднее число вершин, уходящих из слоя A_k из-за снижения их степени, составляет $kN_k/N = kq_k$.

Таким образом, вторая поправка к правой части соотношения (2) равна $[-pkq_k(t)]$, где множитель p учитывает вероятность потери с.в.в.

3. Рассуждая аналогично, нетрудно определить, что из-за снижения степеней в слое A_{k+1} из него в слой A_k на шаге t приходит в среднем $p(k+1)q_{k+1}(t)$ вершин.

Учитывая все три найденные поправки, получаем из (2) следующее уравнение эволюции графа с потерями вершин:

$$N_k(t+1) = N_k(t) + r_k + mP_{k-1}(t) - mP_k(t) -$$

$$-pq_k(t) + p(k+1)q_{k+1}(t) - pkq_k(t), \quad k \geq g, \quad (4)$$

где, принимая во внимание неизбежное появление вершин со степенью $k=0$, следует положить $g=0$.

Для удобства расчетов РСС $q(t)=\{q_k(t)\}$ остается привести уравнение (4) к виду, аналогичному уравнению (3), описывающему граф без потерь. Для этого перепишем (4) с заменами $N_k(t+1)=N(t+1)q_k(t+1)=(1-p)(t+1)q_k(t+1)$ и $N_k(t)=N(t)q_k(t)=(1-p)(t)q_k(t)$ следующим образом:

$$(1-p)(t+1)q_k(t+1) = (1-p)(t)q_k(t) + r_k + mP_{k-1}(t) - mP_k(t) - pq_k(t) + p(k+1)q_{k+1}(t) - pkq_k(t), \quad k \geq 0. \quad (5)$$

Применяя обозначение $q=(1-p)$ и подставляя в (5) выражения для $P_{k-1}(t)$ и $P_k(t)$, получаем формулу для расчета РСС вершин на шаге $t+1$ через РСС на шаге t :

$$q_k(t+1) = \frac{1}{t+1} \left[tq_k(t) + \frac{r_k}{q} + m \frac{q_{k-1}(t)f_{k-1} - q_k(t)f_k}{q\bar{f}(t)} - p \frac{q_k(t) - (k+1)q_{k+1}(t) + kq_k(t)}{q} \right], \quad k \geq 0. \quad (6)$$

Естественно, что при вероятности потерь $p=0$ (а тогда $q=1$) эта формула превращается в формулу (3) эволюции графа без потерь.

4. Расчет переходных процессов. Формула (6) позволяет на одном листе Excel легко рассчитывать РСС $q(t)=\{q_k(t)\}$ для любого шага $t > t_0$, начиная с РСС, заданного для $t=t_0$. Не зависящие от t последовательности $\{k\}$, $\{r_k\}$ и $\{f_k\}$ фиксируются в строках верхней «шапки» листа Excel аналогично тому, как это делается при расчете графов без потерь вершин [12]. Скалярные показатели, зависящие от времени, такие как средняя степень вершин $\bar{k}(t) =$

$= \sum_{k \geq 0} kq_k(t)$ и их средний вес $\bar{f}(t) = \sum_{k \geq 0} f_k q_k(t)$ можно

вычислять в столбцах левой части листа.

На рис. 1 показан фрагмент листа с расчетом РСС $q(t)=\{q_k(t)\}$ растущего графа, определяемого параметрами $p=0,2$, $\{r_1; r_2\}=\{0; 1\}$, $f_k=k$ при $1 \leq k \leq 200$ (при прочих k вес $f_k=0$). Этот граф отличается от графа БА с параметром $m=2$ лишь тем, что максимальная степень его вершин ограничена и на каждом шаге выращивания графа может с вероятностью $p=0,2$ потеряться с.в.в. графа.

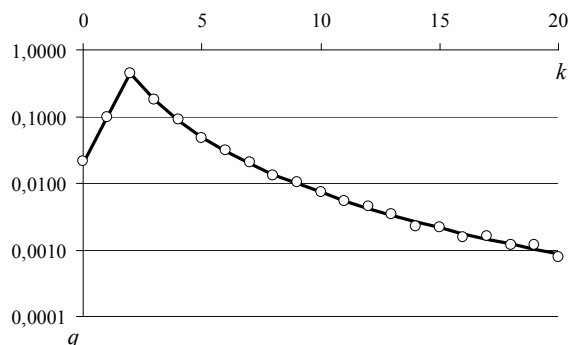


Рис. 2. Полученное в ИМ и расчетное РСС растущего графа с потерями вершин ($t = 500$)

Основная часть листа, в которой выполняется расчет вероятностей $q_k(t)$, начинается ячейкой **G7**, которая на рис. 1 выделена для того, чтобы записанная в ней в виде выражения $=1/\$A8*(\$A7*G7+G\$3/\$B\$3+\$D\$2/\$B\$3*(F7*F\$4-G7*G\$4)/\$C7-\$B\$2/\$B\$3*G7+\$B\$2*H\$2/\$B\$3*H7-\$B\$2*G\$2/\$B\$3*G7)$ формула (6) была видна в строке набора формул (в верхней части листа). Ячейка **G7** копируется в лежащие правее нее ячейки, а затем вся полученная строка ячеек копируется в нижележащие строки. Начальное РСС задается в ячейках **G6**, **H6** и т.д. В данном случае начальное РСС соответствует графу-кольцу на трех вершинах.

Колонка $N(t)$ содержит среднее число вершин в графе ($N \sim qt$) и в расчетах, согласно формуле (6), не участвует.

На рис. 2 построен график РСС $q(t) = \{q_k(t)\}$ при $t = 500$ (РСС рассчитано на листе, показанном на рис. 1). График результатов расчета РСС (сплошная линия) сопоставляется с графиком результатов ИМ (маркеры).

Согласованность результатов расчета с результатами ИМ подтверждает правильность асимптотически точной формулы (6) и ее пригодность для практических расчетов.

Заметим, что в ряде случаев вероятности «второго порядка малости», которыми мы пренебрегли при выводе формулы (6), например, вероятности того, что с одной вершиной свяжется несколько дуг приращення, могут сказаться на точности расчета ранних стадий переходного процесса. Например, при большом среднем числе дуг приращення, большой вероятности потерь и малом размере затравки (малом начальном времени t_0) рассчитываемые малые вероятности q_k могут принимать отрицательные значе-

ния. Эта ситуация легко корректируется выбором подходящего достаточно большого значения t_0 . Обычно при $p < 0,9$ достаточно брать t_0 в пределах от 10 до 60 единиц времени.

5. Уравнения стационарного распределения степеней. Обозначим через Q_k финальные (стационарные) вероятности степеней k , т.е. $Q_k = \lim_{t \rightarrow \infty} q_k(t)$, и решим задачу вычисления стационарного РСС $Q = \{Q_k\}$.

Умножив равенство (6) на $(t+1)$, перепишем его следующим образом:

$$(t+1)q_k(t+1) - tq_k(t) = \frac{r_k}{q} + m \frac{q_{k-1}(t)f_{k-1} - q_k(t)f_k}{q\bar{f}(t)} -$$

$$- p \frac{q_k(t) - (k+1)q_{k+1}(t) + kq_k(t)}{q}, \quad k \geq 0. \quad (7)$$

Здесь левая часть $(t+1)q_k(t+1) - tq_k(t) = tq_k(t+1) - tq_k(t) + q_k(t+1)$ содержит дифференциал $tq_k(t+1) - tq_k(t)$, который сходится с ростом t к нулю, если $q_k(t)$ сходится к пределу Q_k не медленнее, чем со степенной скоростью ct^{-a} (где $a > 1$). На практике, при решении конкретных задач, это условие легко проверяется и подтверждается на этапе расчета переходных процессов. Поэтому при $t \rightarrow \infty$ положим $tq_k(t+1) - tq_k(t) \rightarrow 0$ и оставим в левой части равенства (7) лишь слагаемое $q_k(t+1)$. Учитывая теперь, что при $t \rightarrow \infty$ величина $q_k(t+1)$ сходится к Q_k , величины $q_{k-1}(t)$, $q_k(t)$, $q_{k+1}(t)$, сходятся, соответственно, к Q_{k-1} , Q_k , Q_{k+1} , а средний вес вершин $\bar{f}(t)$ сходится к стационарному среднему весу $\langle f \rangle$, из равенства (7) получаем:

$$Q_k = \frac{r_k}{q} + m \frac{Q_{k-1}f_{k-1} - Q_k f_k}{q\langle f \rangle} -$$

$$- p \frac{Q_k - (k+1)Q_{k+1} + kQ_k}{q}, \quad k \geq 0.$$

Выражая отсюда Q_k и добавляя формулу для вычисления $\langle f \rangle$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} Q_k = \frac{r_k + \frac{mf_{k-1}}{\langle f \rangle} Q_{k-1} + p(k+1)Q_{k+1}}{1 + \frac{mf_k}{\langle f \rangle} + pk}, & k \geq 0, \\ \langle f \rangle = \sum_{k=0}^M f_k Q_k, \end{cases} \quad (8)$$

решая которую численными методами, можно рассчитывать искомые стационарные вероятности Q_k .

O7		Текущее									
1	fk=k	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	
2			p = 0,2			<f> текущее		<f> новое			
3			m = 2,0000			3.3290380		3.3290380			
4						sum					
5	<k> =	3,333334				1.000000003					
6	m =	2,0000				epsilon					
7	k	rk	fk	Новое Qk	Текущее	6.4957E-06					
8	-1	0	0	0	0						
9	0	0	0	0,019937	0,019937						
10	1	0	1	0,099685	0,099685						
11	2	1	2	0,448776	0,448776						
12	3	0	3	0,179372	0,179372						

Рис. 3. Фрагмент листа, предназначенный для расчета стационарного РСС $\{Q_k\}$

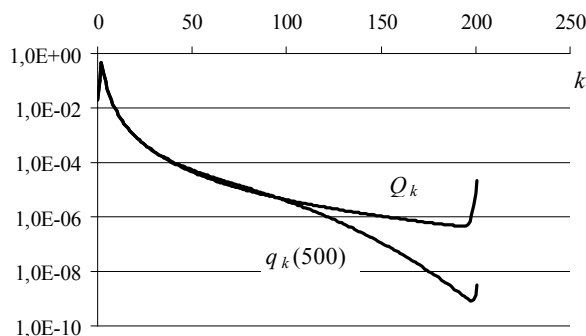


Рис. 4. Графики переходного при $t = 500$ и финального РСС графа с потерями вершин

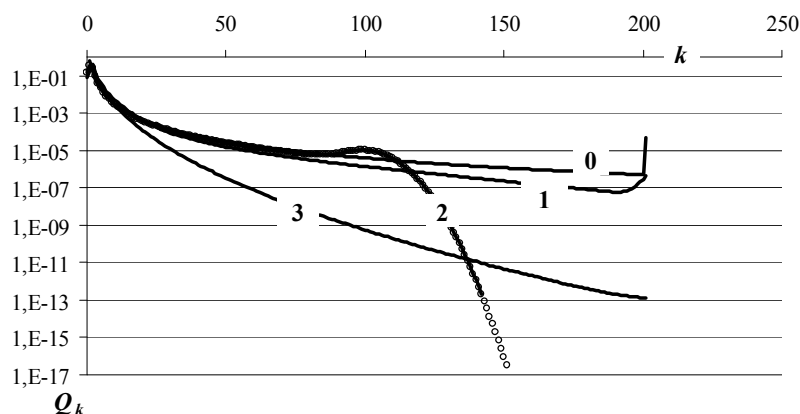


Рис. 5. Состояния большой сети при различных сценариях воздействия на нее

6. Расчет стационарного распределения степеней. На рис. 3 показан фрагмент листа Excel с решением системы уравнений (8) для графа, рассмотренного в предыдущем разделе статьи. Решение выполняется методом простых итераций. В колонке **О** в формате «значения» записано текущее приближение распределения $\{Q_k\}$. В качестве начального приближения $\{Q_k\}$ можно взять, например, РСС $\{q_k(t)\}$ при $t = 500$, рассчитываемое методами предыдущего раздела при некоторой произвольной загрузке графа. В ячейке **Р3** в формате «значение» находится текущее приближение среднего веса $\langle f \rangle$ (его начальное приближение также можно взять из расчета переходного процесса развития графа). Через текущие приближения РСС и $\langle f \rangle$ по формулам (8) в колонке **Н** и ячейке **Р3** рассчитываются новые приближения для $\{Q_k\}$ и, соответственно, для $\langle f \rangle$. Далее эти новые приближения нужно скопировать и вставить на место текущих приближений (специальной вставкой, как значения). Для такого копирования и вставки удобно создать простой макрос, с помощью которого копирование и вставка выполняются одновременным нажатием выбранной комбинации клавиш. В ячейке **Р7** вычисляется показатель погрешности — корень квадратный из суммы квадратов разностей между текущими приближениями вероятностей Q_k и их новыми значениями. На рис. 3 этот показатель умножен на 1000. Комбинацию клавиш, вызывающую макрос, можно просто придавить, не отпуская, тогда все пересчеты будут происходить с высокой скоростью, за секунды снижая показатель погрешности до нужных малых значений.

На рис. 4 сравниваются графики стационарного РСС $\{Q_k\}$ графа, рассмотренного в предыдущем разделе, и переходного РСС, достигаемого на шаге $t = 500$.

Из рисунка видно, что в ходе эволюции графа вероятности q_k невысоких степеней k связности мало отличаются от стационарных вероятностей Q_k уже при относительно небольших значениях t (в данном случае при $t = 500$). Но в такое же время t вероятности больших степеней k могут отличаться от соответствующих стационарных вероятностей на несколько порядков.

7. Заключение. Полученные в статье уравнения (6) и (8) позволяют эффективно рассчитывать переходные и стационарные процессы эволюции графов с нелинейным правилом предпочтительного связывания, растущих в условиях случайной потери вершин.

Это обеспечивает возможность в рамках науки о сетях ставить и решать задачи анализа и синтеза широкого класса реальных стохастических сетей и разрабатывать эффективные стратегии управления сетевыми процессами. К таким задачам относятся, в частности, задачи динамической идентификации растущих сетей (включая информационные, транспортные, электрические, социальные, террористические и другие сети) и задачи выбора и оптимизации управленческих решений, актуальные для широкого класса таких сетей.

В качестве примера на рис. 5 сравниваются финальные РСС $\{Q_k\}$ растущей сети, получающиеся при различных приблизительно эквивалентных по стоимости сценариях воздействия на сеть.

В данном примере сеть моделируется графом, описанным в разделе 4 статьи.

Цифрой 0 на рис. 5 помечено финальное РСС, достигаемое при базовом сценарии развития, когда связи и узлы в сети не теряются. Из графика можно видеть, что при размерах сети в несколько миллионов узлов она будет содержать сотни узлов, име-

ющих максимальную степень связности 200 (см. «хвостик» в правом конце графика).

График 1 соответствует сценарию роста сети при потере в среднем половины узлов: здесь вероятность p взята равной 0,5. Предположим, что целью воздействия на сеть является недопущение ее заметного роста. Тогда сценарий «устранения» в среднем каждого второго узла в ходе роста сети следует признать наихудшим. Ведь, несмотря на такое воздействие, сеть приходит в итоге практически в то же состояние, что и в базовом сценарии.

График 2 — это две практически совпадающие линии, одна представляет результат «финального просеивания случайно выбранной половины узлов», другая — результат «финального просеивания случайно выбранной половины связей», каковое производится однократно в отношении уже сформировавшейся сети. Этот сценарий лучше первого, но такая «война» с узлами/связями уже сформированной сети заканчивается не вполне удовлетворительно, так как в сети еще остается большое число узлов-лидеров с высокой степенью связности, близкой к 100.

Наилучшим оказывается сценарий, результат которого представлен графиком 3. Этот результат достигается при потере случайно выбранных связей. На каждом шаге выращивания сети с вероятностью 0,5 теряется одна случайно выбранная связь. В результате при размерах сети в несколько миллионов узлов в ней уже трудно найти лидера с хотя бы 50 связями. Для расчета этого сценария использовались уравнения, выведенные в статье [14].

Здесь следует пояснить, что в базовом сценарии сеть растет при $m = 1$, а в сценариях с ликвидацией половины узлов/связей — при $m = 2$, т.е. сеть имеет «ресурс сопротивления», обеспечивающий сохранение «средней скорости» ее роста. Несмотря на одинаковый «ресурс сопротивления», качество сети при разных сценариях воздействия на нее оказывается принципиально различным.

Рассмотренный пример показывает, что найденные новые теоретические результаты позволяют получать важные содержательные выводы о свойствах моделируемых растущих сетей даже при отсутствии информации о деталях их структуры.

Библиографический список

1. Erdos P., Renyi A. On the evolution of random graphs // Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences 5. 1960. P. 17–61.
2. Barabasi A. L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. 286. P. 509–512.
3. Barabasi A. L., Albert R. Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. 2002. 74. P. 47–97.
4. Barabasi A. L. Scale-free networks: A decade and beyond // Science. 2009. 325. P. 412–413.
5. Amaral L. A. N., Scala A., Barthélemy M., Stanley H. E. Classes of small-world networks // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 2000. 97. P. 11149.
6. Krapivsky P. L., Redner S. Organization of growing random networks // Phys. Rev. E 63. 2001. 066123.
7. Newman M. The structure of scientific collaboration networks // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2001. 98. P. 404–409.
8. Clauset, A., Shalizi, C.R., Newman, M. Power-law distributions in empirical data, Rev. Mod. Phys. 2009. 51. P. 661–703.
9. Задорожный В. Н. Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания // Проблемы управления. 2011. № 6. С. 2–11.
10. Zadorozhnyi V., Yudin E. Growing Network: Nonlinear Extension of the Barabasi-Albert Model // Communications in Computer and Information Science. 2014. Vol. 487. P. 432–439.
11. Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B. Growing network: models following nonlinear preferential attachment rule, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2015. Vol. 428. P. 111–132. DOI: 10.1016/j.physa.2015.01.052.
12. Задорожный В. Н., Бадрызов В. А. Переходные процессы в растущих сетях с нелинейным правилом предпочтительного связывания // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. 2016. № 1 (145). С. 95–99.
13. Задорожный В. Н., Кутузов О. И. Проблемы генерации случайных величин с фрактальными распределениями // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. 2012. № 3 (113). С. 20–24.
14. Задорожный В. Н., Юдин Е. Б. Уравнения динамики степеней узлов в растущих сетях с потерями связей // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. № 1. Т. 3. С. 340–346.

ЗАДОРЖНЫЙ Владимир Николаевич, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления.

Адрес для переписки: zwn2015@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 11.01.2017 г.

© В. Н. Задорожный