Н. Б. Волков, А. Е. Майер, В. В. Погорелко, А. П. Яловец РАСЧЁТ ТЕЧЕНИЙ В СУСПЕНЗИЯХ

Для описания течений в суспензии предложена модель гетерогенной среды, учитывающая процессы теплопроводности, теплообмена и трения между компонентами, релаксацию их к равновесию. Проведены численные исследования зависимости скорости звука в суспензии от объемной доли и размеров включений. Результаты согласуются с экспериментальными данными. Получены выражения для скорости звука и смещений включений суспензии в акустическом приближении.

Ключевые слова: модель гетерогенной среды, скорость звука, смещения включений, суспензия.

В последние годы особый интерес представляет моделирование волновых процессов в многофазных средах. Одним из таких процессов, интересным с точки зрения практических приложений и моделирования, является распространение звука в двухфазной среде. В частности, в работах [1-3] изучалось движение частиц, взвешенных в жидкости или газе, в результате действия звуковых волн. В настоящее время большое внимание уделяется ультразвуковому исследованию суспензий [4]. В составе суспензии можно выделить жидкую несущую среду и включения различной объемной доли с размерами от 10 нм до 100 мкм. Взаимодействие компонент суспензии (механическое, тепловое, электрическое, химическое и пр.) в значительной мере определяет ее свойства. В настоящей работе нас в первую очередь будет интересовать механическое взаимодействие компонент и его влияние на поведение суспензии в условиях динамического нагружения.

Для описания течения суспензий в условиях динамического нагружения будем опираться на получивший широкое распространение подход многоскоростных взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов [5-7]. В рамках этого подхода поведение каждого компонента определяется законами сохранения. Существенной проблемой при реализации данного подхода является определение удельного объема компонент суспензии. В существующих моделях эта проблема обычно решается за счет упрощающих предположений, например, о несжимаемости включений [5-6] либо о равенстве давлений несущей фазы и включений [7]. При рассмотрении динамических процессов в суспензиях такие предположения часто являются неприемлемыми.

В данной работе в рамках подхода многоскоростной гетерогенной среды предложена математическая модель суспензии, обеспечивающая выполнение законов сохранения. В этой модели учитываются силы межфазного трения, теплообмен, а также релаксация компонент среды по напряжениям.

Модель гетерогенной среды. Рассмотрим многокомпонентную среду, состоящую из несущей среды (матрицы) и включений разного размера и термодинамического состояния. Будем считать, что размеры включений в смеси во много раз больше расстояний между молекулами. Данное допущение позволяет рассматривать гетерогенную среду как совокупность многоскоростных взаимодействующих континуумов [5-7].

Пусть V — некоторый элемент объема гетерогенной смеси; V^(j) — объем j-компоненты в элементе *V*; $\alpha^{(j)}$ — объемная доля j-компоненты.

Сформулируем основные положения модели.

1. Усредненный по физически малому объему тензор деформации гетерогенной смеси *u_{ik}* имеет вид

$$u_{ik} = \sum_{j} \alpha^{(j)} u_{ik}^{(j)},$$
 (1)

где $u_{ik}^{(j)}$ — тензор деформации j-компоненты.

Данное выражение получается путем стандартной процедуры усреднения тензора деформации по элементарному объему, включающего подобласти, содержащие лишь одну компоненту. Из (1) естественным образом вытекает аддитивность приращений объемов компонент среды

$$\delta V = \sum_{j} \delta V^{(j)} \,.$$

Для приращений вектора смещения можно выполнить аналогичную процедуру усреднения и получить следующее выражение для тензора скоростей деформации $v_{ik} = \sum_{j} \alpha^{(j)} v_{ik}^{(j)}$, где $v_{ik}^{(j)}$ — тензор скоростей деформации j-компоненты.

2. Элементарная работа $\dot{A}^{(j)}$, совершаемая j-компонентой над всей гетерогенной средой в единицу времени в единице объема, имеет вид

$$\dot{A}^{(j)} = \alpha^{(j)} \sigma^{(j)}_{ik} v_{ik}, \qquad (2)$$

где $\sigma_{ik}^{(j)}$ — тензор напряжений j-компоненты. Действительно, $\dot{A}^{(j)}$ должна определяться напряженным состоянием данной компоненты и деформацией среды в целом и, кроме того, должна удовлетворять выражению для элементарной работы, совершаемой при деформации в единицу времени в единице объема гетерогенной сме-

си
$$\dot{A} = \sum_{j} \dot{A}^{(j)} = \sigma_{ik} v_{ik}$$
.

3. Все компоненты среды равноправны и движутся в самосогласованном поле напряжений σ_{*ik*}, создаваемом всеми компонентами среды:

$$\sigma_{ik} = \sum_{j} \alpha^{(j)} \sigma_{ik}^{(j)}.$$
 (3)

Для получения (3) в качестве термодинамического потенциала гетерогенной среды выберем внутреннюю энергию единицы ее объема. Поскольку данный термодинамический потенциал обладает свойством аддитивности, запишем:

$$E = \sum_{j} \alpha^{(j)} E^{(j)} \left(u_{ik}^{(j)}, S^{(j)} \right), \tag{4}$$

где $E^{(j)}$, $S^{(j)}$ — внутренняя энергия и энтропия единицы объема j-компоненты. Так как компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial E}{\partial u_{ik}}\right)_S$$
 [8], то, записав с учетом (2) основ-

ное термодинамическое соотношение для дефор-

мируемых тел $dE^{(j)} = T^{(j)}dS^{(j)} + \sigma^{(j)}_{ik}du_{ik}$, можно из (4) получить (3).

4. Компоненты в гетерогенной среде стремятся к локальному термодинамическому равновесию. Время установления локального термодинамического равновесия между компонентами в некотором малом объеме конечно и определяется геометрией компонент и их объемной долей. При описании процесса установления равновесия необходимо учесть релаксацию напряжений компонент и обусловленное этим процессом изменение плотности каждой компоненты и ее внутренней энергии. Сформулируем систему уравнений механики для компонент гетерогенной среды в интегральной форме для некоторого элемента объема V в подвижной системе координат, связанной с движением центра масс. Для учета взаимодействия компонент в уравнение движения и в уравнение для внутренней энергии необходимо добавить слагаемые, описывающие теплообмен и трение между компонентами гетерогенной среды.

Полная производная по времени примет вид

$$d_c/dt = \partial/\partial t + (\vec{v}_c \nabla),$$

где $\vec{v}_{\tilde{n}} = \sum_j \vec{v}^{(j)} m^{(j)} / \sum_j m^{(j)}$ — скорость цент-

ра масс, $\vec{v}^{(j)}$, $m^{(j)}$ — соответственно скорость и масса j-компоненты в объеме V. В дальнейшем для обозначения производной по времени в системе центра масс будем использовать также точку. Обозначим через $\vec{\xi}^{(j)} = \vec{v}^{(j)} - \vec{v}_{\tilde{n}}$ относительную скорость j-компоненты.

Уравнение непрерывности для j-компоненты полностью эквивалентно уравнению непрерывности, приведенному в [5], и имеет вид

$$\frac{d_c m^{(j)}}{dt} = -\oint_{(V)} \rho^{(j)} \xi_k^{(j)} ds_k,$$
(5)

где $\rho^{(j)} = m^{(j)} / V = \alpha^{\binom{\prime}{j}} \overline{\rho}^{(j)}, \overline{\rho}^{(j)} = m^{(j)} / V^{(j)}$ — соответственно приведенная и истинная плотности j-компоненты; правая часть уравнения описывает поток массы через поверхность объема V, обусловленный переходом в систему центра масс. При записи (5) учтено, что $\frac{\dot{V}}{V} = (\nabla \vec{v}_c)$.

Уравнение движения для j-компоненты в поле напряжений (3) имеет вид

$$\frac{d_{c}\left(m^{(j)}v_{i}^{(j)}\right)}{dt} = \alpha^{(j)} \oint_{(V)} \sigma_{ik} ds_{k} - V\sum_{k} B^{(jk)}\left(v_{i}^{(j)} - v_{i}^{(k)}\right) - \oint_{(V)} \rho^{(j)}v_{i}^{(j)}\xi_{k}^{(j)} ds_{k}, \quad (6)$$

где правая часть уравнения описывает соответственно поверхностную силу, силы трения между компонентами, поток импульса через поверхность элемента объема V, связанный с переходом в подвижную систему координат, $B^{(jk)}$ — коэффициент трения между j- и k-компонентами, для которого справедливо соотношение $B^{(jk)} = B^{(kj)}$.

Уравнение для внутренней энергии j-компоненты можно записать в виде

$$\frac{d_{c}}{dt} \left(m^{(j)} U^{(j)} \right) = \int_{V} \alpha^{(j)} \sigma_{ik}^{(j)} v_{ik} dV - \alpha^{(j)} \oint_{S_{v}} q_{k}^{(j)} ds_{k} + \\ + \int_{V} \sum_{k} Q^{(jk)} \left(T^{(j)} - T^{(k)} \right) dV + \\ + \int_{V} \sum_{k} \beta^{(jk)} B^{(jk)} \left(v_{i}^{(j)} - v_{i}^{(k)} \right)^{2} dV - \oint_{S_{v}} \rho^{(j)} U^{(j)} \xi_{k}^{(j)} ds_{k}, (7)$$

где $U^{(j)}$ — внутренняя энергия единицы массы ј-компоненты; слагаемые в правой части уравнения соответственно учитывают работу компоненты при деформации смеси (2), теплопроводность, теплообмен между компонентами, работу сил трения, поток энергии через поверхность элемента объема V, связанный с переходом в подвижную систему координат. В уравнении введены обозначения: $q_k^{(j)} = -\kappa^{(j)} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial x_k}$ — поток тепла, обусловленный теплопроводностью, где $\kappa^{(j)}$ — коэффициент теплопроводности j-компоненты; $Q^{(jk)}$ — коэффициенты теплообмена между ј-компонентой и к-компонентой; $\beta^{(jk)}$ — доля тепла, передаваемая j-компоненте при трении с k-компонентой [5], причем $\beta^{(kj)}$ = $= 1 - \beta^{(jk)}$.

Удобно представить $\sigma_{ik}^{(j)} = -P^{(j)}\delta_{ik} + S_{ik}^{(j)}$, где $P^{(j)}$ — шаровая часть, $S_{ik}^{(j)}$ — девиатор напряжений для j-компоненты. Шаровая часть тензора напряжений находится из уравнения состояния, а уравнение для девиатора тензора напряжений j-компоненты имеет вид

$$\frac{d_c}{dt} \left(m^{(j)} S_{ik}^{(j)} \right) =$$

$$= 2\mu^{(j)} m^{(j)} \hat{v}_{ik}^{(j)} - \oint_{(V)} \rho^{(j)} S_{ik}^{(j)} \xi_m^{(j)} ds_m, \quad (8)$$

где $\hat{v}_{ik}^{(j)} = v_{ik}^{(j)} - \frac{1}{3}v_{ll}^{(j)}\delta_{ik}; \quad \mu^{(j)}$ — модуль

сдвига для j-компоненты. Для жидкой компоненты модуль сдвига будем полагать равным нулю. Пластическое течение описывается путем сохранения девиатора напряжений на пределе текучести (условие текучести Мизеса) [9].

Запишем уравнение для изменения объема j-компоненты. Изменение объемной доли компоненты за счет перетекания массы вещества через поверхность объема V определяется выражением

$$\dot{\alpha}^{(j)} = \frac{\dot{m}^{(j)}}{\overline{\rho}^{(j)}V} = \alpha^{(j)} \frac{\dot{m}^{(j)}}{m^{(j)}} \,.$$

Поскольку $\dot{V}^{(j)} = \alpha^{(j)} \dot{V} + \dot{\alpha}^{(j)} V$, уравнение для изменения объема j-компоненты (без учета релаксации) будет иметь вид

$$\frac{\dot{V}^{(j)}}{V^{(j)}} = \frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{m}^{(j)}}{m^{(j)}}.$$
(9)

Важным физическим процессом в многокомпонентной среде является выравнивание (релаксация) напряжений в компонентах. Поэтому система уравнений (5)–(9) дополняется уравнениями релаксации компонент, скорость которой зависит от геометрии включений.

Рассмотрим в сферической системе координат отдельное неподвижное включение радиуса $R^{(j)}$, находящееся в жидкости с давлением $P^{(L)}$. За счет разности напряжений в жидкости и во включении происходит изменение объемов компонент, стремящихся к равновесию по напряжениям. В течение времени Δt в результате деформации включения возмущается слой шириной $c_l^{(j)}\Delta t$, где $c_l^{(j)}$ — продольная скорость звука в j-компоненте.

Уравнение движения для вещества отдельного включения можно записать в виде

$$\rho^{(j)}\dot{v}_r^{(j)} = -\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r},$$

где r — координата в сферической системе координат, $v_r^{(j)}$ — радиальная составляющая скорости вещества включения.

Начальные условия имеют вид

$$\sigma_{rr}\left(r \le R^{(j)}, t_n\right) = \sigma_{rr}^{(j)}\left(t_n\right),$$

$$\sigma_{rr}\left(r > R^{(j)}, t_n\right) = P^{(L)}\left(t_n\right).$$

Решая уравнение движения для вещества отдельного включения, можно получить приближенное выражение для изменения плотности компонент:

$$\overline{\rho}^{(j)}(t_{n+1}) = \overline{\rho}^{(j)}(t_n) + \\ + \frac{P^{(L)} + \sigma_{rr}^{(j)}}{c_{eff}^2} (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_r}}),$$

где $c_{eff}^2 = (c_l^{(j)})^2 + \frac{V^{(j)}}{V^{(L)}} \frac{\overline{\rho}^{(L)}}{\overline{\rho}^{(j)}} (c^{(L)})^2,$
а $\tau_r^{(j)} = \frac{1}{3} \frac{R^{(j)} c_l^{(j)}}{c_{eff}^2}$ — характерное время релак-

25

При этом необходимо учесть изменение объема и внутренней энергии компонент.

Коэффициенты трения $B^{(jk)}$ для включения сферической формы находились по формуле Стокса. Коэффициенты теплообмена $Q^{(jk)}$ между включениями и жидкостью были найдены из решения уравнения теплопроводности в окружающей сферическую частицу жидкости.

Из уравнений (5)–(10) легко получить уравнения для среды в целом, для чего следует просуммировать каждое из уравнений по всем компонентам. Получившиеся уравнения имеют обычный вид, как и в односкоростном случае, но зависят от относительного движения составляющих. Интегрируя получившиеся уравнения по всему объему гетерогенной среды, учитывая, что в случае изолированной системы потоки массы, импульса и энергии через ее поверхность равны нулю, получим законы сохранения массы импульса и энергии.

Дополняя систему уравнений (5)–(10) уравнениями состояния, мы получим замкнутую систему уравнений для суспензии, учитывающую взаимодействие фаз. Данная система уравнений решалась методом, описанным в работе [10].

Акустическое приближение. Пусть по суспензии вдоль оси z распространяется плоская продольная волна малой амплитуды. В этом случае уравнение движения (6) в акустическом приближении в эйлеровых координатах можно переписать в виде

$$\rho^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial t} = \alpha^{(j)} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \sum_{k} B^{(jk)} \left(v^{(j)} - v^{(k)} \right). (11)$$

Рассмотрим случай, когда суспензия состоит из двух компонент: несущей среды (обозначим индексом «1») и включений радиуса $R^{(j)}$ (индекс «2»). Согласно (3), тензор напряжений в этом случае можно записать в виде

$$\sigma_{zz} = (1 - \alpha)\overline{\rho}^{(1)}c^{(1)2}\varepsilon^{(1)} + \alpha\overline{\rho}^{(2)}c_l^{(2)2}\varepsilon^{(2)},$$
(12)

где $c^{(1)}, c_l^{(2)}$ — соответственно скорость звука в жидкости и продольная скорость звука в материале включения; $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$ определяют деформацию (относительное изменение объема) несущей среды и включений в системе центра масс.

Изменение объемной доли компоненты $\alpha^{(j)}$ при фиксированном объеме V может быть обусловлено перетоком ее массы через поверхность объема и процессом релаксации компонент к термоди-

намическому равновесию. При малой амплитуде волны перетоком массы компоненты через поверхность элемента объема V можно пренебречь и изменение объемной доли компонент обусловлено только релаксацией компонент к одинаковому давлению. Полная релаксация напряжений в рассматриваемой суспензии будет происходить, если выполняется условие $R/c_l^{(2)} \ll 1/\omega$, где ω — частота волны.

Из сказанного следует, что в отсутствие релаксации деформации компонент имеют вид

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon_0 = \frac{\sum_{k=1,2}^{k} \rho^{(k)} u_{zz}^{(k)}}{\sum_{k=1,2}^{k} \rho^{(k)}}.$$
 (13)

В случае мгновенной релаксации компонент по напряжению деформацию компонент можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon_0 + \frac{\delta V}{V^{(1)}}, \quad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon_0 - \frac{\delta V}{V^{(2)}}.$$
(14)

В выражении (14) δV — приращение объемов компонент за счет релаксации, которое можно найти, приравняв напряжения компонент:

$$\overline{\rho}^{(1)}c^{(1)2}\left(\varepsilon_0 + \frac{\delta V}{V^{(1)}}\right) = \overline{\rho}^{(2)}c_l^{(2)2}\left(\varepsilon_0 - \frac{\delta V}{V^{(2)}}\right).$$
(15)

Учитывая оба предельных случая — (11) и (12), можно выражение для тензора напряжений в суспензии записать в виде

$$\sigma_{zz} = D \sum_{k=1,2} \rho^{(k)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z}.$$
 (16)

Входящая в (16) константа D имеет вид

$$D = \frac{(1-\alpha)\overline{\rho}^{(1)}c^{(1)2} + \alpha\overline{\rho}^{(2)}c^{(2)2}_l}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}} + D_0, \quad (17)$$

где $D_0 = 0$ в отсутствие релаксации компонент,

$$D_0 = -\frac{(1-\alpha)\alpha}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}} \cdot \frac{(\overline{\rho}^{(1)}c^{(1)2} - \overline{\rho}^{(2)}c_l^{(2)2})^2}{(1-\alpha)\overline{\rho}^{(2)}c_l^{(2)2} + \alpha\overline{\rho}^{(1)}c^{(1)2}}$$

в случае мгновенной релаксации.

Подставляя выражения (16) с соответствующим коэффициентом (17) в уравнение движения (11), получим систему уравнений для векторов смещения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$:

$$\begin{bmatrix}
\rho^{(1)} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = (1 - \alpha) D \left[\rho^{(1)} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2} + \rho^{(2)} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z^2} \right] - \frac{9}{2} \eta \frac{\alpha}{R^2} \frac{\partial}{\partial t} (u^{(1)} - u^{(2)}) \\
\rho^{(2)} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = \alpha D \left[\rho^{(1)} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2} + \rho^{(2)} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z^2} \right] - \frac{9}{2} \eta \frac{\alpha}{R^2} \frac{\partial}{\partial t} (u^{(2)} - u^{(1)})$$
(18)

Система уравнений (18) представляет собой волновые уравнения для суспензии, содержащей включения одного сорта. Будем искать решение (18) в виде плоской волны:

$$u^{(j)} = A^{(j)} e^{i(\omega t - kz)}.$$
 (19)

Подставляя (19) в (18), получим однородную систему уравнений, которая будет отличаться для двух рассматриваемых предельных случаев релаксации по напряжению только видом коэффициента *D*:

$$\begin{cases} A^{(1)}B_{11} + A^{(2)}B_{12} = 0; \\ A^{(1)}B_{21} + A^{(2)}B_{22} = 0, \end{cases}$$
(20)

где

$$B_{11} = -\omega^{2} + (1 - \alpha)Dk^{2} + \frac{9}{2}\frac{1}{\rho^{(1)}}\eta\frac{\alpha}{R^{2}}i\omega,$$

$$B_{12} = (1 - \alpha)\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}}Dk^{2} - \frac{9}{2}\frac{1}{\rho^{(1)}}\eta\frac{\alpha}{R^{2}}i\omega,$$

$$B_{21} = \alpha\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}}Dk^{2} - \frac{9}{2}\frac{1}{\rho^{(2)}}\eta\frac{\alpha}{R^{2}}i\omega,$$

$$B_{22} = -\omega^{2} + \alpha Dk^{2} + \frac{9}{2}\frac{1}{\rho^{(2)}}\eta\frac{\alpha}{R^{2}}i\omega.$$

Решая эту систему уравнений, можно определить скорость звука в суспензии, которая совпадает с фазовой скоростью при распространении колебаний малой амплитуды. Помимо этого можно определить смещения включений, которые будут возникать при прохождении через суспензии волн различной частоты.

Скорость звука в суспензии. Если частицы в суспензии малы так, что имеют место полное увлечение их жидкостью и мгновенная релаксация компонент по напряжению, то скорость распространения малых возмущений в такой среде можно вычислить аналитически. Пусть плоская продольная волна распространяется вдоль оси z. Тензор напряжения σ_{zz} и продольную скорость звука в упругой среде можно записать в виде [8]

$$\sigma_{zz} = K' u_{zz}; c = \sqrt{K' / \rho}, \qquad (21)$$

где $K' = K + 4\mu/3$, K, μ — соответственно модули всестороннего сжатия и модуль сдвига, u_{zz} — относительное изменение объема среды, ρ — массовая плотность. Для жидкости полагаем модуль сдвига равным нулю.

Применяя, в соответствии с формулами (1) и (3), выражения (21) к суспензии и ее компонентам, можно найти K' для суспензии:

$$K' = \alpha \cdot K'^{(2)} \frac{u_{zz}^{(2)}}{u_{zz}} + (1 - \alpha) \cdot K^{(1)} \frac{u_{zz}^{(1)}}{u_{zz}}, \quad (22)$$

где $K^{(2)} = K^{(2)} + 4\mu^{(2)}/3$, $K^{(2)}, \mu^{(2)}$ — модули всестороннего сжатия и сдвига включений, $K^{(1)}$ — модуль всестороннего сжатия несущей среды, $u_{zz}^{(2)}$, $u_{zz}^{(1)}$ — относительные изменения объема компонент, $u_{zz} = \alpha \cdot u_{zz}^{(2)} + (1 - \alpha) \cdot u_{zz}^{(1)}$ — относительное изменение объема всей среды, определенное по формуле (1), α — объемная доля частиц.

Если при распространении волны с частотой ω в суспензии с размерами частиц *R* выполняется условие $R/c_l^{(2)} \ll 1/\omega$, где $c_l^{(2)}$ — продольная скорость звука в материале частицы, то имеет место полная релаксация компонент среды по напряжению (при $\omega = 3$ МГц для частиц железа имеем $R \ll 1$ мм):

$$K^{'(2)}u_{zz}^{(2)} = K^{(1)}u_{zz}^{(1)}.$$
 (23)

Учитывая, что массовая плотность суспензии равна $\rho = \alpha \cdot \overline{\rho}^{(2)} + (1 - \alpha)\overline{\rho}^{(1)}$, можно из (21)–(23) получить выражение для скорости звука в суспензии:

$$c = c^{(1)} \sqrt{\frac{\beta \gamma^2}{\left((1-\alpha)\beta \gamma^2 + \alpha\right)\left((1-\alpha) + \alpha\beta\right)}}, \quad (24)$$

где $\beta = \overline{\rho}^{(2)} / \overline{\rho}^{(1)}$, $\gamma = c_l^{(2)} / c^{(1)}$, $\overline{\rho}^{(2)}$, $\overline{\rho}^{(1)}$ истинные плотности частиц и жидкости, $c^{(1)}$ — скорость звука в жидкости, α — объемная доля включений. Если в формуле (24) положить $\gamma = c^{(2)} / c^{(1)}$, где $c^{(2)}$ — объемная скорость звука в материале включений, то она перейдет в формулу Вуда [11].

Если частицы в суспензии такие крупные, что релаксация компонент по напряжению не происходит, то скорость распространения малых возмущений в такой среде тоже можно вычислить аналитически. В этом случае выполняется условие $R/c_l^{(2)} \sim 1/\omega$, релаксация компонент по напряжению отсутствует, и сжимаемость суспензии определяется в основном сжимаемостью жидкости, а не включений. В этом случае выражение для скорости звука в суспензии можно записать в следующем виде:

$$c = c^{(1)} \sqrt{\frac{1 + (\beta \gamma - 1)\alpha}{1 + (\beta - 1)\alpha}}.$$
 (25)

Расчеты и обсуждение результатов. Справедливость формулы (24) проверялась ее сравнением с результатами, полученными в экспериментах [4], где была измерена зависимость скорости звука в воде, в которой присутствовали частицы SiO₂ радиуса 30 нм, от их объемной доли. В данной работе отмечается, что массовая плотность частиц двуокиси кремния несколько меньше массовой плотности макроскопических объемов, которая обычно приводится в справочниках. Согласно данным [12], массовая плотность частиц SiO₂, размеры которых меньше 75 мкм, достигает значений 2140 кг/м³, что существенно меньше плотности макроскопического объема (2650 кг/м³). Здесь при сравнении с экспериментом использовалось значение плотности 2170 кг/м³.

На рис. 1 проводится сравнение с экспериментальными данными [4] результатов, полученных по формуле (24), результатов решения системы уравнений (20), а также результатов расчетов по изложенной выше модели. Разброс экспериментальных значений в [4] объясняется сильной зависимостью скорости звука от температуры суспензии. Как видно из рис. 1, результаты расчета скорости звука по формуле (24) и на основе построенной здесь модели динамики суспензии хорошо согласуются с результатами эксперимента [4]. Отметим, что при определении скорости звука в суспензии на основе модели решалась задача о распространении волны малой амплитуды $(10^2 - 10^3 \text{ Па})$ с частотой $\omega = 3 \text{ МГц}$, возбуждаемой на границе. Для расчетов были использованы двухчленное уравнение состояния воды и уравнение состояния Ми — Грюнайзена для включений.



Рис. 1. Зависимость скорости звука
в суспензии от объемной доли включений стекла SiO₂. Радиус включений К = 30 нм.
— экспериментальные данные работы [4] аналитическая кривая по формуле (24);
— решение системы уравнений (20);
— численные расчеты

Формула (24) позволяет объяснить немонотонную зависимость скорости звука в суспензии от объемной доли включений. Действительно, скорость звука в суспензии определяется соотношением K'/ρ . С увеличением объемной доли включений плотность суспензии ρ растет быстрее, чем уменьшается сжимаемость суспензии $(K')^{-1}$. Этим и объясняется начальное уменьшение скорости звука в суспензии при малых объемной совъемной доли в суспензии при малых объемное совъемное совъемное совъемное совъемное совъемное в суспензии при малых объемное совъемное совъемное совъемное совъемное совъемное в суспензии при малых объемное совъемное совъемное в суспензии при малых объемное совъемное совъемное совъемное совъемное совъемное совъемное в суспензии при малых объемное совъемное совъемное

емных долях включений. При больших объемных долях включений сжимаемость суспензии

 $(K')^{-1}$ уменьшается быстрее, чем растет плотность суспензии ρ , что приводит к увеличению

скорости звука в суспензии.

Приведем результаты численных исследований скорости звука в суспензии, состоящей из воды и включений железа различных размеров и объемной доли. Для определения скорости звука в суспензии моделировалось прохождение ультразвуковой волны с частотой ω = 3 МГц. Результаты расчетов приведены на рис. 2.

Отметим, что при малых радиусах частиц численное значение скорости звука, полученное на основе модели динамики суспензии, стремится к аналитическому решению (24). Некоторое отличие численного и аналитического решения при малых радиусах включений обусловлено использованием приближения полного увлечения включений жидкостью при выводе формулы (24).



Рис. 2. Зависимость скорости звука в суспензии от объемной доли включений железа: 1 — полная релаксация компонент по напряжению (сплошная — расчет по формуле (24), маркеры ○ — решение системы уравнений (20) для R = 0,1 мкм); 2 — отсутствие релаксации компонент по напряжению (сплошная — расчет по формуле (25), маркеры ● — решение системы уравнений (20) для K = 1 мм). Численные расчеты: 3 — R = 0,1 мкм; 4 — R = 1 мкм; 5 — R = 10 мкм

Увеличение радиуса частиц при их неизменной объемной доле приводит к уменьшению суммарной поверхности включений и, как следствие, к уменьшению силы трения с жидкостью. Поэтому увеличение размеров частиц в суспензии сопровождается запаздыванием их смещения относительно смещения жидкости.

На рис. 2 кривая 3 соответствует почти полному увлечению частиц жидкостью, кривая 5 минимальному увлечению частиц. Кривая 4 при малых объемных долях, когда мала суммарная поверхность частиц и мала сила трения, соответствует случаю минимального увлечения частиц жидкостью и по мере увеличения объемной доли и, как следствие, увеличения силы трения приближается к режиму полного увлечения (включения тормозят жидкость).

Часто в суспензиях имеет место коагуляция частиц, когда мелкие частицы объединяются в более крупные кластеры. Поэтому здесь проведены исследования влияния наличия кластеров на скорость звука в суспензии. Если при заданной объемной доле включений α некоторая их часть є · а объединилась в кластеры радиуса $R_c = R \sqrt[3]{n}$ (*n* — количество частиц в кластере), то количество таких кластеров в объеме суспензии *V* будет равно $N_c = \varepsilon N_0 / n$, где N_0 — количество частиц радиуса *R* в этом же объеме, соответствующее объемной доле включений а.

Исследования зависимости скорости звука в суспензии от доли кластеров радиуса R_c в общем числе включений показали, что объединение включений в кластеры приводит к увеличению скорости звука в суспензии. Если кластеры образуются из частиц малых размеров, то имеет место существенное увеличение скорости звука. Например, при фиксированной объемной доле включений $\alpha = 0,2$ образование кластеров радиуса $R_c = 1$ мкм из частиц R = 0,1 мкм приводит к увеличению скорости звука от 1140 до 1520 м/с при изменении доли є в интервале 0-1. Если же кластеры образуются из крупных частиц, то скорость звука в такой суспензии меняется мало. Так, в случае образования кластеров радиуса $R_{c} = 10$ мкм из частиц радиусом R - 1 мкм скорость звука меняется в интервале 1540-1550 м/с при всех є.

На рис. 3 показаны отношения амплитуды смещений включений к амплитуде смещения воды при различных объемных долях в зависимости от частоты волны, найденные из решения системы уравнений (20) для случая полной релаксации компонент по напряжениям.



Рис. 3. Зависимость отношения амплитуд смещений включений и воды от частоты волны. Радиус включений R = 0,1 мкм. Объемные доли включений: • — $\alpha^{(2)} = 0,1$; • — $\alpha^{(2)} = 0,3$; • — $\alpha^{(2)} = 0,5$; • — $\alpha^{(2)} = 0,7$; • — $\alpha^{(2)} = 0,9$

В области частот $v \le 0,3$ МГц при любых объемных долях включений смещения включений и воды совпадают, т. е. имеет место полное увлечение частиц жидкостью при прохождении волны. В области частот $v \ge 3000$ МГц смещения включений при любых объемных долях становятся минимальными из-за их инерционности, поскольку массовая плотность (истинная) больше плотности жидкости.

В диапазоне частот 0,3 < v < 3000 МГц наблюдается переходная область, в которой происходит плавный переход от режима полного увлечения к режиму минимального увлечения частиц проходящей волной. В переходной области при фиксированной частоте волны увеличение объемной доли включений приводит к увеличению их смещения по отношению к смещению жидкости, что обусловлено увеличением силы трения между компонентами суспензии.

При увеличении радиуса частиц характер рассматриваемой зависимости не изменяется, но происходит смещение картины в область меньших частот. Так, например, при увеличении радиуса частиц на порядок зависимости смещаются в область меньших на два порядка частот. Такая закономерность объясняется тем, что сила трения между компонентами в единице объема суспензии, как видно из уравнений (18), обратно пропорциональна квадрату радиуса включений.

Случай отсутствия релаксации в двухкомпонентной суспензии реализуется для крупных частиц при частотах, когда $R/c_l^{(2)} >> 1/\omega$. Например, при радиусе включений $R^{(j)} = 1$ мм данное неравенство выполняется при частотах, превышающих 5 МГц. В этом диапазоне частот движение включений соответствует режиму минимального увлечения.

Список литературы

1. Горьков, Л. П. О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости / Л. П. Горьков // Докл. Акад. наук СССР. 1961. Т. 140, № 1. С. 88–91.

2. Каневский, И. Н. Постоянные силы, возникающие в звуковом поле / И. Н. Каневский // Акуст. журн. 1961. Т. 7, № 1. С. 3–16.

3. Шутилов, В. А. Основы физики ультразвука / В. А. Шутилов. Л. : ЛГУ, 1980. 280 с.

4. Dukhin, A. S. Ultrasound for characterizing colloids / A. S. Dukhin, P. G. Goetz. Elsevier, 2002.

5. Нигматулин, Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин. М. : Наука, 1987.

6. Нигматулин, Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. М. : Наука, 1978.

7. Куропатенко, В. Ф. Модель гетерогенной среды / В. Ф. Куропатенко // Докл. Акад. наук. 2005. Т. 403, № 6. С. 761–763.

8. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Физматлит, 1987. Т. 7: Теория упругости.

9. Уилкинс, М. Л. Расчет упругопластических течений / М. Л. Уилкинс // Вычисл. методы в гидродинамике. М. : Мир, 1967.

10. Яловец, А. П. Расчет течений среды при воздействии интенсивных потоков заряженных частиц / А. П. Яловец // Приклад. механика и техн. физика. 1997. Т. 38, № 1. С. 151–166.

11. Mavko, G. The rock physics handbook: tools for seismic analysis in porous media / G. Mavko, T. Mukerji, J. Dvorkin. Cambridge University Press, 1998.

12. Compendium of shock wave data / M. van Thiel (Ed.) // Lawrence Livermore Laboratory Report. 1977. UCRL-50108. P. 356–357.