

УДК 519.67

Прогнозирование поведения финансовых временных рядов методами фрактального анализа

Д.В. Сенченко

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия;

Senchenko.DV@rea.ru

Аннотация. Работа посвящена разработке алгоритма выявления точек смены тренда или резких скачков экономических систем. В качестве индикатора экономической стабильности экономической системы выступает временной ряд локальных значений фрактальной размерности, рассчитанный методом скользящего среднего. В работе проанализированы фрактальные характеристики временных рядов дневных цен закрытия акций пяти крупнейших компаний в различные периоды времени. Установлена взаимосвязь между нарушением динамической устойчивости и отклонением фрактальной размерности от оптимального значения. Границы нормального состояния системы построены на основе скользящего среднего локальных значений фрактальной размерности и фрактальной размерности всего временного ряда. Для оценки эффективности предложен метод пороговых значений приращений локальных значений фрактальной размерности для выявления критических точек. Результаты показали, что метод приращений дает более высокую точность в определении критических точек по сравнению с пороговым методом. Однако метод приращений фрактальной размерности не позволяет определить характер критической точки.

Ключевые слова: фрактальная размерность; временные ряды; критические точки системы; пороговые значения; прогноз колебаний.

Forecasting the behavior of financial time series using fractal analysis methods

D.V. Senchenko

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia; Senchenko.DV@rea.ru

Abstract. The research is devoted to the development of an algorithm to identify points of trend change or sharp jumps in economic systems. The time series of local values of fractal dimension, calculated by the moving average method, acts as an indicator of the economic stability of the economic system. The article analyzes the fractal characteristics of time series of daily closing prices

of shares of the five largest companies in different time periods. The relationship between the violation of dynamic stability and the deviation of the fractal dimension from the optimal value has been established. The boundaries of the normal state of the system are based on the moving average of the local values of the fractal dimension and the fractal dimension of the entire time series. To assess the effectiveness, a method of threshold values of increments of local values of fractal dimension is proposed to identify critical points. The results showed that the increment method provides higher accuracy in determining critical points compared to the threshold method. However, the method of fractal dimension increments does not allow us to determine the nature of the critical point.

Keywords: fractal dimension; time series; critical points of the system; threshold values; prediction of fluctuations.

JEL: C65; D58, E37

1. Введение

Финансовые рынки, инвестиционная и кредитная деятельность постоянно нуждаются в новых инструментах для составления корректных прогнозов и получения качественных оценок рисков. На сегодняшний день одним из наиболее популярных методов прогнозирования кризисных явлений является «сигнальный» метод, который заключается в разработке пороговых значений для выбранного показателя или комплекса показателей, пересечение которых с определенной вероятностью сигнализирует об угрозе финансового кризиса [1, 2]. Для разработки кризисных индикаторов для каждой прогнозируемой переменной определяются индивидуальные пороговые значения, характеризующие нормальное состояние.

Классические подходы к оценке рисков в финансовом секторе и экономике, такие как фундаментальный и технический анализы, часто подвергаются критике и обладают рядом ограничений по сравнению друг с другом. Многочисленные исследования показали, что финансовые данные обладают статистикой фракталов. Поэтому применение фрактальной размерности, изменяющаяся со временем, является перспективным направлением для изучения поведения финансовых временных рядов. Современные исследования фрактальных методов направлены на развитие инструментов фрактального анализа и их адаптацию для обработки экономических данных [4, 5, 6, 7, 8].

Одним из методов исследования сложной структуры временных рядов можно считать фрактальный анализ. Фрактальные параметры широко применяются для оценки динамики развития и структуры городов [9, 10, 11]. Большое количество исследований в области химии, биологии и экологии также посвящены оценке фрактальной структуры показателей сложных

систем и динамике их развития [12, 13, 14, 15, 16, 17]. Анализ медицинских снимков при изучении различных заболеваний показывает, что многие изменения границы области поражений имеют фрактальную структуру и величина фрактальной размерности границ этих областей может свидетельствовать о наличии различного рода патологий [18-28].

Целью исследования является разработка алгоритма прогнозирования критических точек экономических систем. Под критической точкой будем понимать момент времени, после которого происходит изменение тренда на противоположный или скачок временного ряда. Эти вопросы представляют особый интерес для инвесторов, а использование методов фрактального и мультифрактального анализа позволяет по-новому взглянуть на природу экономических процессов с точки зрения физики и использовать инструменты, которые ранее не применялись для изучения экономических систем.

2. Материалы и методы

Метрической размерностью называют число, выражающее связь между размером объекта и единицей, используемой при проведении измерения. Пусть $N(\delta)$ – размер объекта, определяемый как количество покрывающих его единичных объектов δ . Зависимость между размером объекта и единицей, применяемой для измерения, имеет вид: $N(\delta) = (1/\delta)^D$, где D – метрическая размерность.

Таким образом в общем виде фрактальная размерность может быть определена из соотношения:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \left(\frac{1}{\delta}\right)}, \quad (1)$$

где N – параметр меры объекта;

δ – параметр масштаба;

D – фрактальная размерность.

Фрактальные характеристики представляют собой численные показатели, рассчитанные на основе различных параметров временных рядов, а именно параметра меры и параметра масштаба. Математически, свойство самоподобия можно записать следующим образом:

$$x(t) \cong \lambda^{-H} x(\lambda t), \quad (2)$$

где $x(t)$ – функция, описывающая временной ряд;

t – индекс времени;

$\lambda > 0$ – коэффициент масштаба;

H – показатель Хёрста.

Сам Хёрст в своих работах показал, что

$$R/S = (\tau/2)^H, \quad (3)$$

где R – размах ряда;

S – среднеквадратическое отклонение;

τ – рассматриваемый временной период;

H – показатель Хёрста.

Алгоритм вычисления показателя Хёрста состоит из следующих шагов:

1. Исходный ряд данных x_t преобразуют согласно формуле:

$$y_t = \ln \frac{x_t}{x_{t-1}}. \quad (4)$$

2. Полученный ряд делится на A смежных периодов длиной n . Обозначим каждый выделенный период как I_a , $a = \overline{1, A}$.

3. Далее вычисляются следующие характеристики на каждом из выделены периодов:

математическое ожидание $M(I_a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{k,I_a}$;

дисперсия $D(I_a) = \sum_{k=1}^n (y_{k,I_a} - M(I_a))^2$;

размах $R(I_a) = \max(y_{k,I_a}) - \min(y_{k,I_a})$;

среднеквадратическое отклонение $S(I_a) = \sqrt{D(I_a)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_{k,I_a} - M(I_a))^2}$

4. Далее рассчитывается показатель $R/S(n)$ определяемый как среднее отношений размаха к среднеквадратичному отклонению, определенных на каждом периоде:

$$\frac{R}{S}(n) = \frac{\sum_{a=1}^A R(I_a)/S(I_a)}{A}. \quad (5)$$

5. Повторяем 2-4 шаги при большем n до тех пор, пока $n \leq \frac{N}{2}$.

6. Строится график зависимости $\ln(R/S(n))$ от $\ln(n)$. Оценивается МНК параметры регрессии вида:

$$\ln\left(\frac{R}{S(n)}\right) = H \cdot \ln(n) + c, \quad (6)$$

где H – показатель Хёрста.

Существуют различные методы вычисления фрактальной размерности сигналов, среди которых клеточный метод, метод минимального покрытия, метод Кац [29], метод Севчика,

метод Хигучи [30], анализ отклоняющихся колебаний (Detrended Fluctuation Analysis, DFA), средний вейвлет-коэффициент (Average Wavelet Coefficient (AWC)). В работе Raghavendra V. S. and Narayana Dutt D. [31] проведено исследование влияния различных параметров на фрактальную размерность. Установлено, что методы Севчика и Хигучи нечувствительны к амплитудам формы волны (дисперсии). Метод Каца показал, что по мере увеличения амплитуды увеличивается фрактальная размерность. Наибольшую эффективность в оценке фрактальной размерности осциллограмм показал метод Хигучи. К одним из наиболее точных методов можно также отнести метод средних вейвлет коэффициентов и метод детерминированного флуктуационного размаха. Поэтому для вычисления фрактальной размерности рядов воспользуемся методом Хигучи.

Метод вычисления фрактальной размерности Хигучи реализуется при помощи следующего алгоритма.

1. Множество значений временного ряда $x_t = \{x_1, x_2 \dots x_T\}$ разбивается на k подмножеств, каждое из которых можно описать следующим образом:

$$x_m^k = \{x(m), x(m+k), (m+2k), \dots, x(m+Mk)\}, \quad m = \overline{1, k}, \quad (7)$$

где m – целое число, определяющее временное начало подмножества;

k – целое число, определяющее временной интеграл между элементами подмножества;

$M = \left\lfloor \frac{T-m}{k} \right\rfloor$ – наибольшее целое число, меньшее или равное $\frac{T-m}{k}$.

2. Для каждого подмножества строится средняя линия, определяемая выражением

$$L_m(k) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{T-1}{Mk} \sum_{i=1}^M (|x(m+ik) - x(m+(i-1)k)|) \right\}. \quad (8)$$

3. Осуществляется переход от $L_m(k)$ к $L(k)$ путем суммирования по $m = \overline{1, k}$:

$$L(k) = \sum_{m=1}^k L_m(k). \quad (9)$$

4. Исходя из $L(k) \sim k^{-D}$, строится график в логарифмических координатах зависимости $\ln(L(k))$ от $\ln\left(\frac{1}{k}\right)$.

5. Оценивается линейная регрессия, найденная МНК-оценка коэффициента регрессии принимается за оценку фрактальной размерности D .

В случае самоподобных (или фрактальных) временных рядов показатель Херста H непосредственно связан с фрактальной размерностью D . Точнее, $D = 2 - H$, где $1 < D < 2$. Значения показателя Херста варьируются от 0 до 1, причем более высокие значения указывают

на мягкий тренд и небольшую волатильность. При $H = 0,5$ показатель Херста относится к полностью случайной системе, а при $H = 1$ – к полностью детерминированной системе.

Значения фрактальных параметров D и H соответствуют сложному аперiodическому поведению реальных временных рядов, когда тренды и флэт сменяют случайное движение хаотическим образом. При $1 < D < 1,5$ временные ряды обладают долгосрочной корреляцией. Близкое к единице значение фрактальной размерности сигнализирует о скором окончании текущего тренда. При $D=1,5\pm 0,05$ система ведет себя случайным образом. При $1,5 < D < 2$ временной ряд становится нелинейным, система становится нестабильной и готова перейти к новому состоянию.

Для изучения динамики фрактальной размерности в долгосрочной перспективе применим метод скользящего среднего с шириной окна n . Для этого выбираем последовательность из $n = 60$ первых элементов временного ряда стоимости акций и определяем фрактальную размерность методом Хигучи. Затем мы перемещаем интервал на одну единицу вдоль временного ряда и снова определяем фрактальную размерность. Этот процесс повторяется для всего исследуемого временного диапазона, в результате чего получается последовательность локальных значений фрактальной размерности.

В работе Гафаровой и Добиковой [31] при анализе динамики фрактальной размерности курсов валют развитых и развивающихся стран показано, что нижняя и верхняя границы фрактальной размерности для бескризисного состояния составляют 1.3 и 1.7 соответственно. Однако эти границы нормального состояния системы не всегда позволяют судить о нарушении стабильности и могут определять достаточно большое количество ложных сигналов.

Для прогнозирования критических состояний системы важно установить границы порога нормального состояния, которые зависят от текущих локальных значений фрактальной размерности и фрактальной размерности всего временного ряда.

Вычисления показывают, что для финансовых рядов верхняя и нижняя границы нормального состояния системы могут меняться. Поэтому необходимо определить границы нормального состояния таким образом, чтобы критические состояния системы можно было выявить как для нестабильного, так и для стабильного промежутка временного ряда. Сигнал будет считаться ложным, если после его появления в дальнейшем не наблюдается точек смены тренда либо резких скачков.

Пороговые значения нормального состояния системы для исходного временного ряда определим на основе скользящих средних и общей фрактальной размерности ряда. В результате проведенных экспериментов границы нормального состояния установлены следующим образом:

$$FD_{up}(t) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{4n} FD(t-k) + \alpha FD ; \quad (10)$$

$$FD_{dn}(t) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{4n} FD(t-k) - \alpha FD , \quad (11)$$

где $FD_{up}(t)$, $FD_{dn}(t)$ – верхняя и нижняя границы нормального состояния системы, n – ширина окна для вычисления локальных значений фрактальной размерности, α – постоянная величина, отражающая коррекцию нормальной зоны, FD – фрактальная размерность временного ряда, вычисленная методом Хигучи.

Сигналом к предстоящему изменению тренда или резкому изменению стоимости акций будем считать точки пересечения кривой локальных значений фрактальной размерности и построенных границ нормального состояния системы. При этом будем учитывать не только значение фрактальной размерности, но и направление пересечения кривой с границами нормы.

3. Результаты и обсуждение

Для тестирования фрактальных методов рассмотрим временные ряды дневных цен закрытия акций пяти компаний: Amazon, Apple, Google, Netflix и Tesla. Статистические данные охватывают период с 02.01.2019 по 29.02.2024 включительно, всего 1298 наблюдений [33].

Проведем анализ динамики доходности временного ряда цен закрытия акций компании Apple. В 2019 и 2020 годах можно наблюдать редкие скачки курса акций компании. Максимальное изменение дневной доходности в 2019 году произошло 3 января и составило - 9,96%. Следующие резкие изменения произошли уже 30 января, когда увеличение дневной доходности составило 6,83%. Очередные потрясения наступили 13 мая и 5 августа, когда доходность упала на 5,81% и 5,23% по сравнению с предыдущими днями. В остальные дни 2019 года дневная доходность акций компании Apple менялась в пределах 0,26%. Следующий 2020 год отличается нестабильностью. Весной, летом и начале осени 2020 года для ряда цен закрытия акций компании можно наблюдать многократные дневные скачки курса акций от - 12,86% до максимального в 2020 году 11,98%. В среднем же доходность акций Apple в 2020 году составила 0,28%.

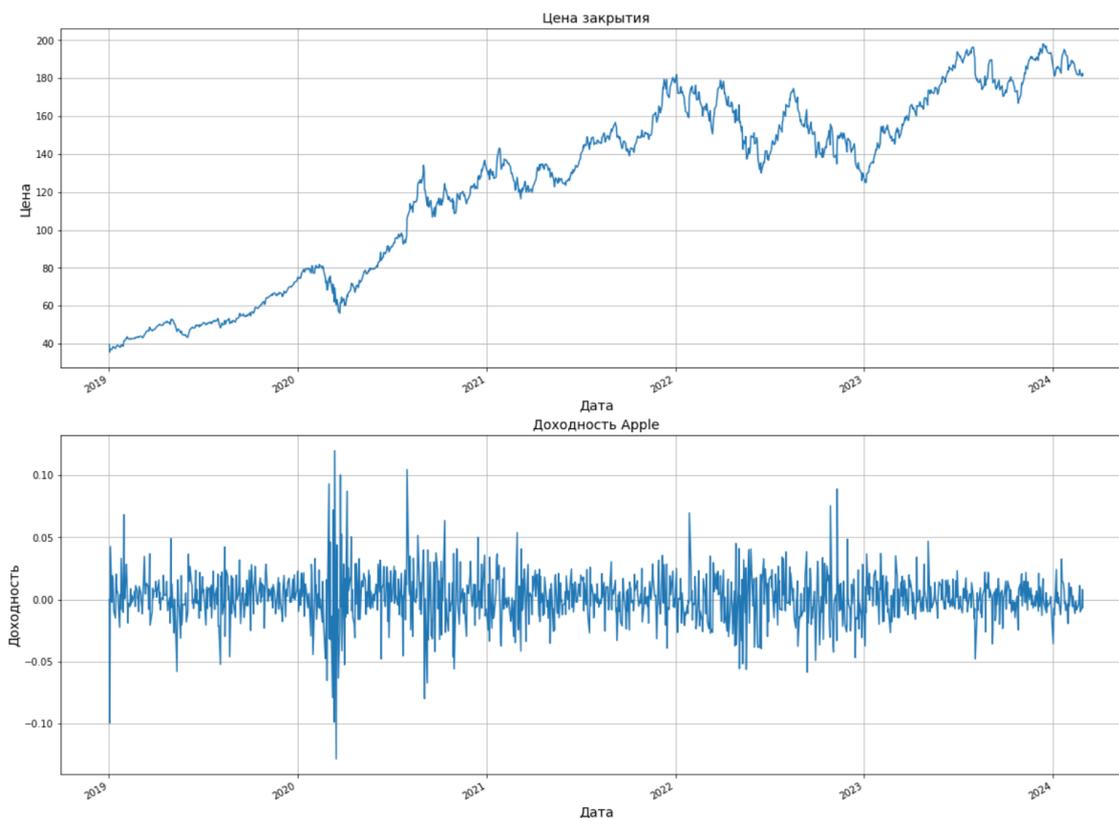


Рисунок 1. Динамика цен закрытия акций Apple и их доходности

Figure 1. Dynamics of Apple stock quotes and their profitability

Выясним, насколько различны рассматриваемые временные ряды. Вычислим значения и построим графики мультифрактальных спектров рассматриваемых сигналов. Мультифрактальный спектр эффективно показывает распределение масштабирующих показателей для сигнала, т. е. обеспечивает меру того, насколько локальная регулярность сигнала изменяется во времени. Сигнал, который является монофрактальным, демонстрирует практически одинаковую регулярность повсеместно во времени и поэтому имеет мультифрактальный спектр с узкой поддержкой. И наоборот, мультифрактальный сигнал демонстрирует изменения регулярности сигнала во времени и имеет мультифрактальный спектр с более широкой поддержкой.

Определим спектры сингулярности $D(h)$ и показатели Гёльдера h для рассматриваемых сигналов и построим их графики. Графики построенных мультифрактальных спектров изображены на рисунке 2. Они позволяют предположить, что рассматриваемые ряды акций компаний являются мультифрактальными сигналами.

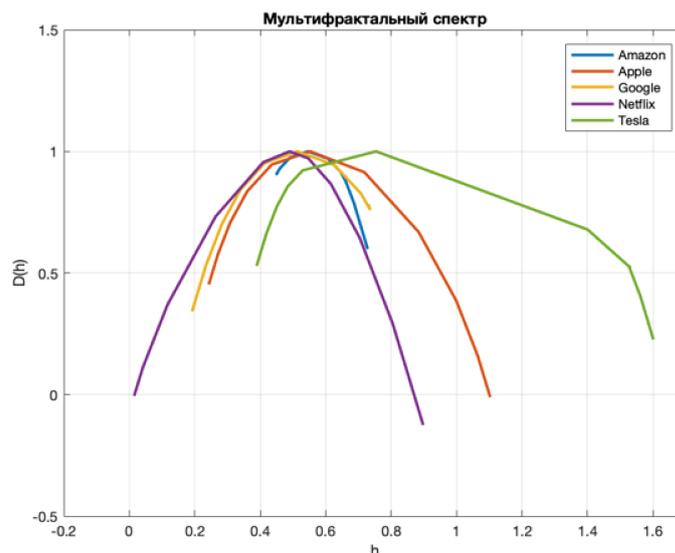


Рисунок 2. Графики мультифрактальных спектров (спектров сингулярности) временных рядов

Figure 2. Graphs of multi-fractal spectra (singularity spectra) of time series

Общий диапазон показателей масштабирования (h) составляет

1. 0,2771 для ряда Amazon ($h \in [0,4510; 0,7281]$),
2. 0,8599 для ряда Apple ($h \in [0,2427; 1,1026]$),
3. 0,5388 для ряда Google ($h \in [0,1916; 0,7304]$),
4. 0,8828 для ряда Netflix ($h \in [0,0147; 0,8975]$),
5. 1,2121 для ряда Tesla ($h \in [0,3889; 1,6010]$).

Вычислим основные мультифрактальные характеристики исходных временных рядов на основе полученных значений показателя степени α функции спектральной плотности мощности, $D = 3 - \alpha$. Значения мультифрактальных характеристик, вычисленные для рассматриваемых временных рядов, представлены в таблице 1.

Анализ показателей свидетельствует о персистентности рассматриваемых временных рядов цен закрытия акций. Как видно из таблицы 1 значения показателя Херста находятся в диапазоне, характеризующем персистентность рассматриваемых временных рядов. Значения фрактальной размерности свидетельствуют об устойчивом состоянии, долговременной корреляции и возможности прогнозирования текущей экономической обстановки.

Таблица 1. Значения основных фрактальных характеристик временных рядов за весь рассматриваемый период

Table 1. Values of the time series main fractal characteristics for the entire period under consideration

Компания	Показатель функции спектральной плотности мощности, α	Экспонента Хёрста, $H \in [0; 1]$	Фрактальная размерность, $D = 2 - H \in [1; 2]$	Спектральная размерность, $\beta \in (-\infty; +\infty)$	Порядок интегрируемости, $d = \beta/2 \in (-\infty; +\infty)$	Индекс фрактальности, $\mu = D - 1 \in [0; 1]$	Фрактальная размерность, метод Хигучи
Amazon	1,8224	0,4799	1,5201	1,9598	0,9799	0,5201	1,3987
Apple	1,7300	0,4563	1,5437	1,9126	0,9563	0,5437	1,4147
Google	1,7984	0,4120	1,5880	1,8240	0,9120	0,5880	1,3627
Netflix	1,6781	0,5661	1,4339	2,1322	1,0661	0,4339	1,3999
Tesla	1,8443	0,5307	1,4693	2,0614	1,0307	0,4693	1,4435

Результаты расчетов фрактальной размерности для исследуемых временных рядов свидетельствуют об устойчивости экономических систем, так как фрактальные размерности имеют близкие к 1.5 значения.

Определим значения фрактальной размерности методом Хигучи исследуемых временных рядов в различные годы с 02.01.2019 по 29.02.2024. Результаты вычислений представлены в таблице 2.

Таблица 2. Значения фрактальной размерности временных рядов цен закрытия акций компаний в разные периоды

Table 2. The values of the fractal dimension of the time series of closing prices of shares of companies in different periods

Компания	Значения фрактальной размерности					
	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Amazon	1,5577	1,3460	1,7837	1,5373	1,4033	1,3612
Apple	1,3887	1,3494	1,5410	1,6897	1,4318	1,6226
Google	1,5682	1,5453	1,2991	1,5131	1,4181	1,6284
Netflix	1,4893	1,5138	1,5241	1,3422	1,5287	1,2648
Tesla	1,4435	1,3223	1,5257	1,6241	1,5264	1,2199

Проанализируем значения фрактальной размерности рядов в различные периоды на примере ряда цен закрытия акций компании Apple. Значение фрактальной размерности временного ряда в 2019 году составляет 1.3887. Этот год отличается небольшим количеством нестабильных периодов и изменением доходностей от -9,96% до 6,83%. 2020 год отличается большей нестабильностью уровня доходности акций компании. Максимальное изменение в котировках акций произошло 16.03.2020 и составило -12.86%. Значение фрактальной размерности, вычисленное по временному ряду цен закрытия 2020 года, составляет 1.3494, что немногим ниже его значения в 2019 году. Таким образом, проследив изменение динамики

фрактальной размерности временного ряда цен закрытия акций компании Apple, можно заметить увеличение фрактальной размерности как непосредственно в периоды резких изменений курса акций, так и в предшествующий период. При этом после существенного снижения фрактальной размерности следует период изменения тренда, что можно наблюдать в 2023 году. Этот результат хорошо заметен на рисунке 2, на котором изображена динамика цен закрытия акций и схема изменения фрактальной размерности временного ряда цен закрытия акций компании Apple.

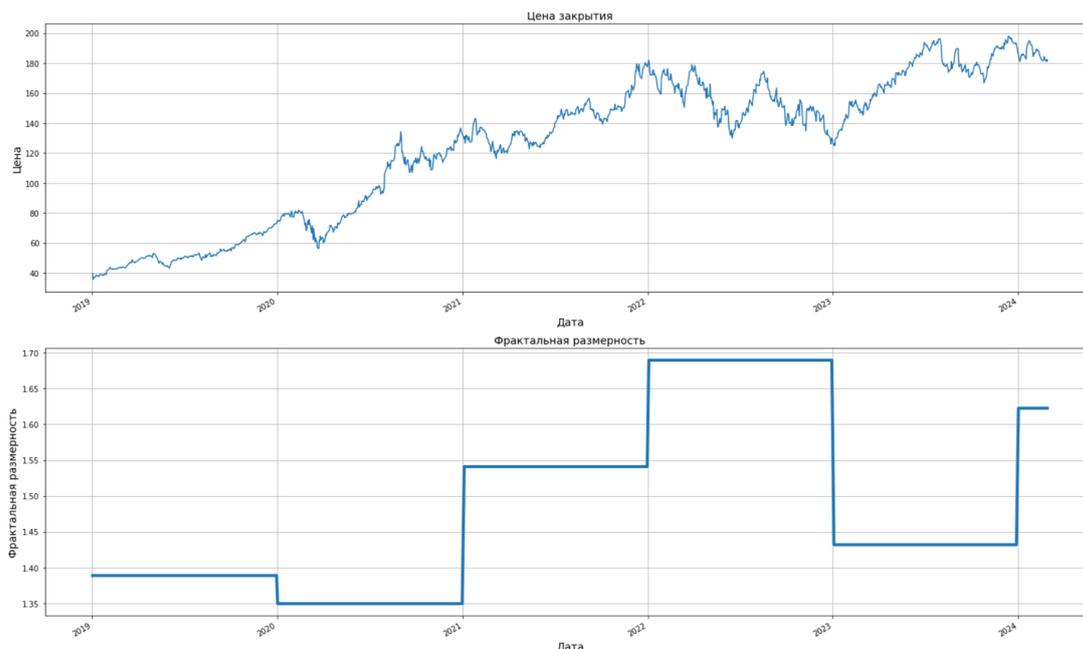


Рисунок 3. Динамика цен закрытия акций Apple и диаграмма изменений фрактальной размерности

Figure 3. Dynamics of Apple stock quotes and a diagram of the fractal dimension changes

Для компании Tesla ситуация с оценкой изменений фрактальной размерности не отличается от всех рассматриваемых временных рядов. В период с 2019 до конца 2021 гг. в динамике цен акций имеется явная тенденция к росту стоимости акций. Изменения максимальных значений дневных доходностей в этот период составляют от -13,61% до 17,67% в 2019 году, от -21,06% до 19,89% в 2020 году, от -11,99% до 19,64% в 2021 году. Значения фрактальной размерности также не отличаются стабильностью и в 2019, 2020 и 2021 годах свидетельствуют о неустойчивости и готовности перейти в новое состояние. 03 января 2022 года можно наблюдать резкий скачок, изменивший дневную доходность на 13,53% и последовавший после этого нисходящий тренд. При этом значение фрактальной размерности увеличилось в 2022 году до 1.6241, что свидетельствует о нестабильности компании. Таким образом, для временного ряда цен закрытия акций компании Tesla низкое значение

фрактальной размерности в 2021 году свидетельствует о будущих изменениях тренда. Заметим, что для временного ряда цен закрытия акций компании Apple период изменения тренда также последовал после существенного снижения значения фрактальной размерности. На рисунке 4 изображена динамика цен закрытия акций Tesla и схема изменения фрактальной размерности.

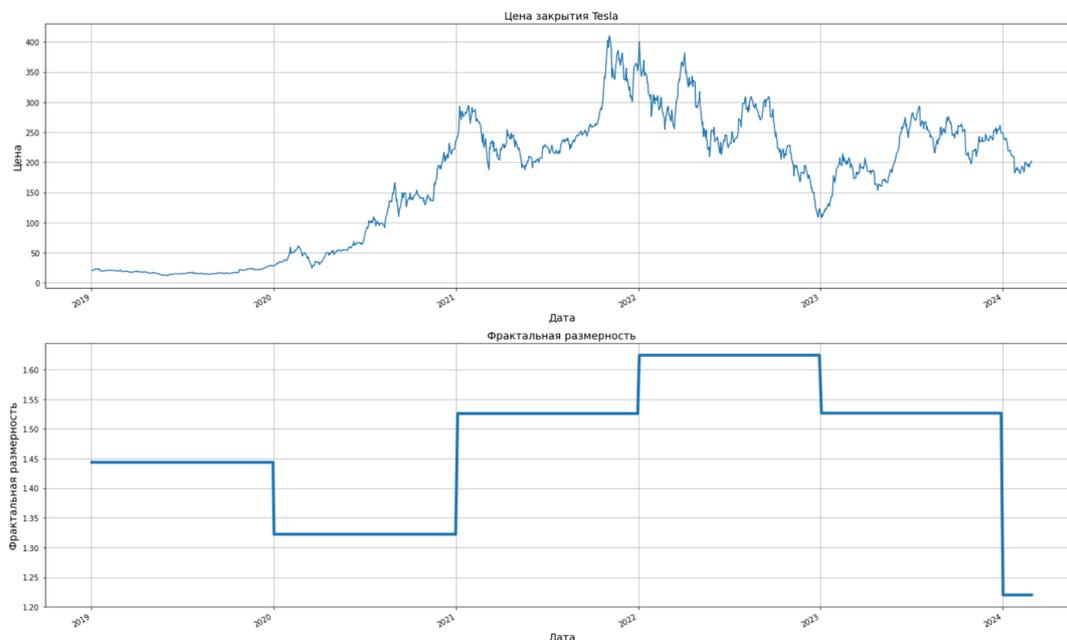


Рисунок 4. Динамика цен закрытия акций Tesla и диаграмма изменений фрактальной размерности

Figure 4. Dynamics of Tesla stock quotes and a diagram of the fractal dimension changes

Фрактальная размерность определенного показателя может служить сигналом о приближении кризиса или предвещать катастрофу. В контексте прогнозирования экономических кризисов важно также учесть и предыдущие этапы, которые могут быть индикаторами будущих кризисных явлений. График локальной фрактальной размерности, построенной методом скользящего среднего при ширине окна $n = 60$ представлены на рисунке 5.

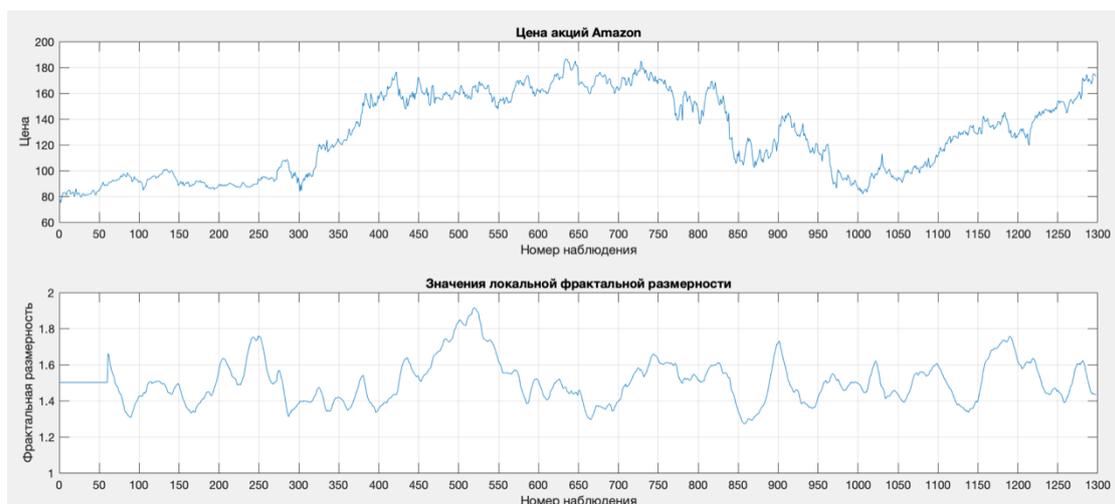


Рисунок 5. Динамика цен закрытия акций Amazon и локальных значений фрактальной размерности

Figure 5. Dynamics of Amazon stock quotes and local values of the fractal dimension

На протяжении достаточно продолжительного промежутка времени до января 2022 года во временном ряде цен закрытия акций компании можно наблюдать восходящий тренд, сопровождающийся изменениями дневной доходности в пределах 5%. Локальные значения фрактальной размерности в этот период остаются в пределах нормального состояния от 1,3 до 1,7. В период от 479 до 545 дни видим резкое увеличение значений фрактальной размерности до максимального 1,9141 на 519 день. На 664 день значение фрактальной размерности вновь снижается до значения 1,299, и мы видим начало изменения направления тренда, начавшееся на 677 день. Этот нисходящий тренд продлился до конца 2022 года, после чего направление линии тренда вновь изменилось и сохраняется до конца рассматриваемого периода. При этом перед в период, предшествующий смене тренда на восходящий, значения фрактальной размерности превысили 1,5. Таким образом, высокие значения фрактальной размерности предупреждают о предстоящей смене тренда до наступления этого момента.

На рисунке 6 отражены границы нормального состояния динамики фрактальной размерности временных рядов цен закрытия акций компании Amazon, предложенным в работе [31].

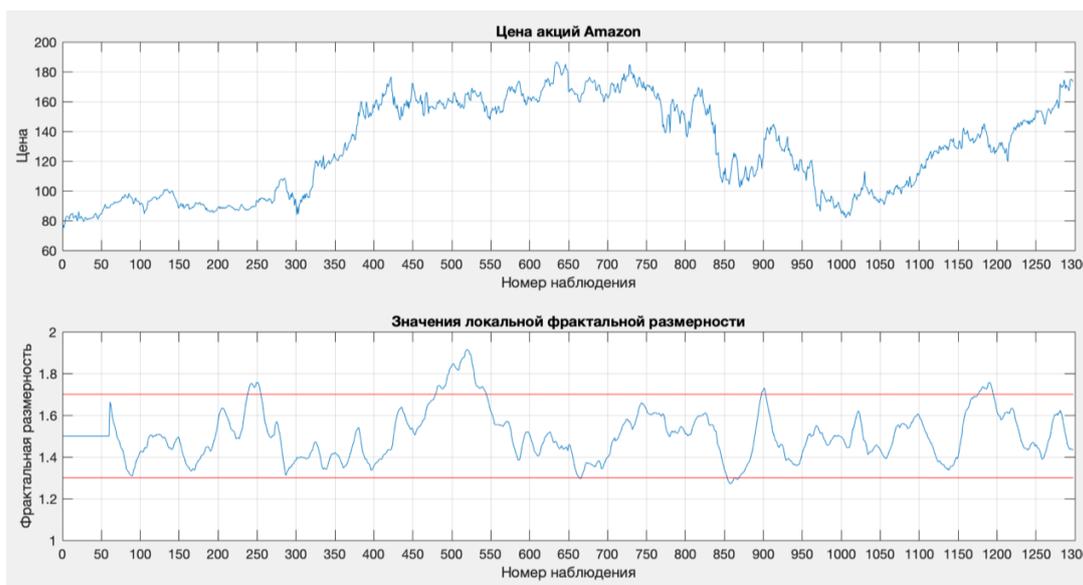


Рисунок 6. Динамика цен закрытия акций Amazon, локальные значения фрактальной размерности и границы нормального состояния

Figure 6. Dynamics of Amazon stock quotes, local values of the fractal dimension and the normal state boundary

Для формирования зоны нормального состояния системы и определения верхней и нижней границ экспериментально подберем универсальное значение константы $\alpha = 0,1$ и ширину окна $n = 60$. Таким образом, формулы (9), (10) примут вид:

$$FD_{up}(t) = \frac{1}{240} \sum_{k=1}^{240} FD(t-k) + 0,1FD;$$

$$FD_{dn}(t) = \frac{1}{240} \sum_{k=1}^{240} FD(t-k) - 0,1FD.$$

На рисунке 7 изображен график цен закрытия акций компании Amazon и ряд локальных значений фрактальной размерности с установленными границами нормального состояния.

Проанализируем критические точки и критические области временного ряда цен закрытия акций компании Amazon. Пересечение ряда локальных значений фрактальной размерности верхней границы нормального состояния на 61-64 дни можно расценить как скорое падение курса акций, которое произошло на 81-ый день и составило 3,56%. Следующий одиночный сигнал возникает на 83-ий день и сигнализирует о предстоящем небольшом росте цен закрытия. Следующий одиночный сигнал возникает на 158-ий день и свидетельствует о предстоящем снижении цен закрытия на 3,12%. Затем сигнал появляется в области 234-го дня сначала на верхнем, а затем и на нижнем пороге нормального состояния. За этим следует активное изменение направления тренда, сопровождающееся еще одной критической точкой

на нижнем пороге нормального состояния, которое свидетельствует о замедлении роста без смены тренда.

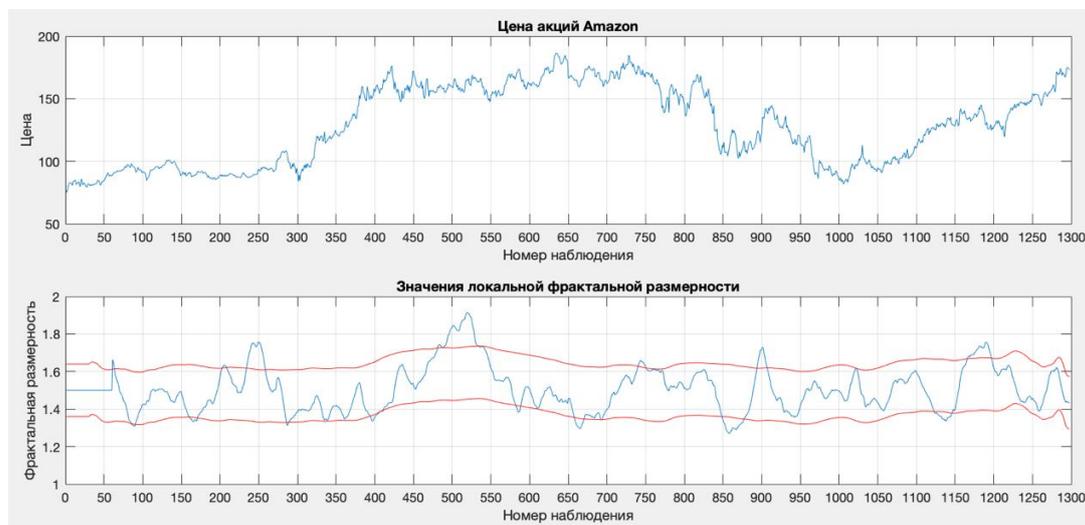


Рисунок 7. Динамика цен закрытия акций Amazon, локальные значения фрактальной размерности и границы нормального состояния

Figure 7. Dynamics of Amazon stock quotes, local values of the fractal dimension and the normal state boundary

Затем в области 483-го дня появляется критическая точка на верхней границе и значение фрактальной размерности продолжает долгое время оставаться выше нормы до 528 дня. Затем следуют два одиночных сигнала на нижней границе, предупреждающие о резком изменении доходностей. Аномально низкие значения фрактальной размерности свидетельствуют о смене тренда и после возвращения значений фрактальной размерности в зону нормального состояния можем наблюдать продолжительный период снижения стоимости акций компании. Следующие сигнал возникает сначала на нижней, а затем и на верхней границе нормального состояния, что свидетельствует о предстоящей смене тренда, что и произошло непосредственно после 1000-го дня.

Таким образом, единичные сигналы на верхней или нижней границе нормального состояния свидетельствуют о скачке цен в ближайшие 15-25 дней. Если пересечение наблюдается как на верхней, так и нижней границе, то следует ожидать смены тренда.

Результаты проведенного анализа показывают, что кризисные периоды характеризуются резкими скачками локальных значений фрактальной размерности. Поэтому необходимо рассмотреть возможность применения приращений фрактальной размерности для выявления критических точек.

Приращения в текущий момент времени будем находить как разность между текущим и предыдущим значениями фрактальной размерности. Для выявления порога нормального

состояния необходимо определить нормативное значение, превышение которого будет служить индикатором критического состояния. Зафиксируем нормальное состояние системы при значении приращений фрактальной размерности, не превышающих $0.022FD$, где FD – фрактальная размерность временного ряда цен закрытия акций компании.

Для временного ряда цен акций компании Amazon количество предсказанных критических точек оказалось на две точки больше, чем было выявлено при помощи пороговых значений нормального состояния фрактальной размерности (рисунок 8). То есть анализ приращений локальных значений фрактальной размерности является более чувствительным к изменениям структуры исходного временного ряда.

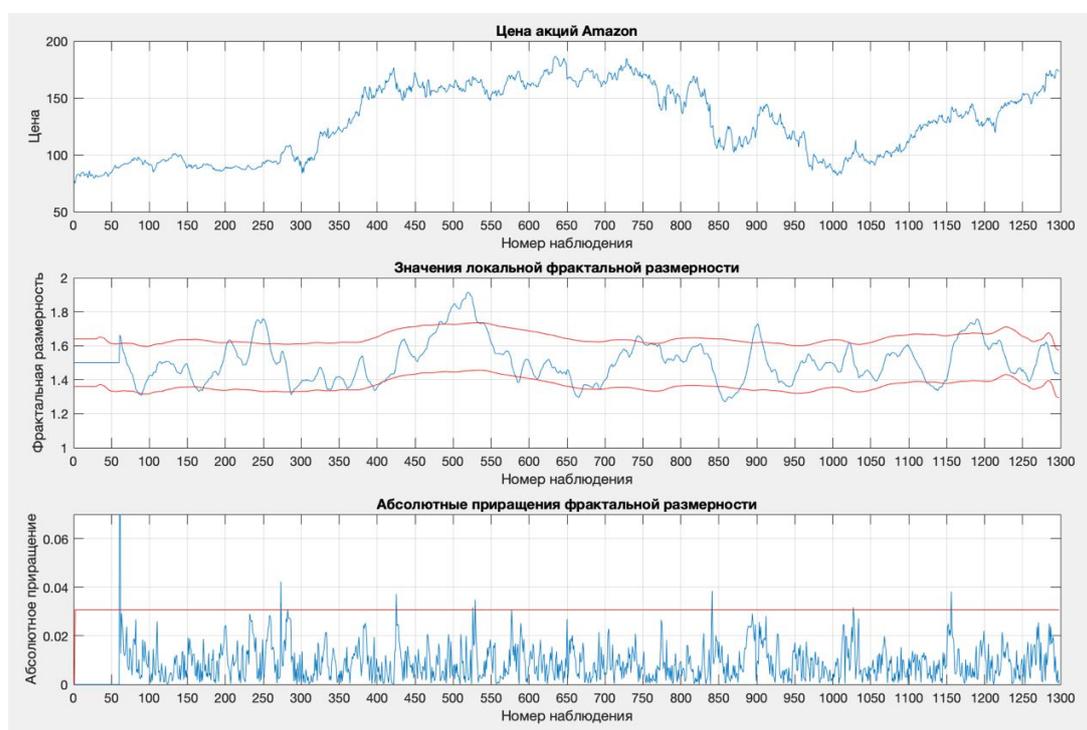


Рисунок 8. Динамика цен закрытия акций Amazon, локальные значения фрактальной размерности и границы нормального состояния, а также график приращений значений локальной фрактальной размерности

Figure 8. Dynamics of Amazon stock quotes, local values of fractal dimension and normal state boundaries, and a graph of increments of local fractal dimension values

Результаты сравнительного анализа методов выявления критических точек представлены в таблице 3.

Таблица 3. Сравнительные характеристики методов обнаружения критических точек
Table 3. Comparative characteristics of methods for the detection of critical points

Компания	Количество критических точек	Метод порогового значения нормального состояния			Способ приращения значений локальной фрактальной размерности		
		Количество прогнозируемых критических точек	Количество ложных сигналов	Доля правильно предсказанных критических точек	Количество прогнозируемых критических точек	Количество ложных сигналов	Доля правильно предсказанных критических точек
Amazon	27	24	2	0.81	22	0	0.81
Apple	23	21	1	0.87	23	0	1.0
Google	14	13	2	0.81	14	2	0.88
Netflix	25	22	0	0.88	22	0	0.88
Tesla	26	25	0	0.94	26	0	1.0

Проведенное исследование показывает, что метод приращений локальных значений фрактальной размерности является более чувствительным к изменениям структуры исследуемого временного ряда и позволяет выявить большее количество критических точек системы по сравнению с методом пороговых значений нормального состояния. Следует отметить, что метод приращений фрактальной размерности выявляет критические точки, но не позволяет определить тип критической точки.

4. Заключение

В работе проанализированы фрактальные характеристики временных рядов цен закрытия акций пяти компаний в различные периоды времени. Установлена взаимосвязь между фрактальной размерностью динамики курсов акций и их трендом. В качестве индикатора экономической стабильности экономической системы выступает временной ряд локальных значений фрактальной размерности, полученный методом скользящего окна. Установлены границы нормального состояния экономических систем, зависящие от текущего состояния системы. Проведен анализ пороговых величин приращений местных значений фрактальной размерности для выявления критические точки, т.е. точек смены тренда или скачков цен. В качестве альтернативного подхода выявления моментов кризиса системы рассмотрен метод абсолютных приращений значений локальной фрактальной размерности. Результаты показали, что метод приращений дает более высокую точность в определении критических точек по сравнению с пороговым методом. Однако метод приращений фрактальной размерности не позволяет определить характер критической точки.

Предложенный алгоритм выявления критических точек смены тренда или скачков цен закрытия акций помогает заблаговременно выявить предстоящее изменение направления линии тренда временного ряда, тем самым помогая инвесторам принять управленческое решение о дальнейших действиях в отношении данной экономической системы. Такой подход обращает внимание на систематический сбой или прогресс системы, что помогает нивелировать нефундаментальные краткосрочные волнения на финансовых рынках и уменьшить вероятность инвестиционного риска для экономического субъекта в условиях беспокойства, которое может быть вызвано необоснованным влиянием со стороны спекулянтов. Разработанный алгоритм можно использовать в качестве вспомогательного инструмента инвестора для выработки оптимальной торговой стратегии и снижении инвестиционных рисков.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Kaminsky, G. and Lizondo, S and Reinhart, C. M. Leading Indicators of Currency Crisis. IMF Staff Papers. 1998, 45(1).
2. Kaminsky, G. Currency and banking crises: the early warning of distress. IMF Working Paper, 1999, 99, 178.
3. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-Трейдинг, 2004. 304 с.
4. Kantelhardt J.W. Fractal and Multifractal Time Series. In: Meyers R. (eds) Mathematics of Complexity and Dynamical Systems. Springer, New York, NY. 2012. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_30
5. Kumar, S. and Deo, N. Analysing correlations after the financial crisis of 2008 and multifractality in global financial time series. PRAMANA. Journal of Physics. 2015, 84(2), 317–325.
6. Schmitt, F., Schertzer, D. and Lovejoy, S. Multifractal fluctuations in finance. Int. J. Theor. Appl. Fin. 2001, 3(3), 361–364. [Online], [01.03.2024] <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0102369v1.pdf>
7. Mulligan, R.F. A fractal analysis of foreign exchange markets. International Advances in Economic Research. 2000, 6, 33–49. <https://doi.org/10.1007/BF02295750>
8. Paun M-A, Paun V-A, Paun V-P. Monetary Datum Fractal Analysis Using the Time Series Theory. Symmetry. 2023; 15(10):1896. <https://doi.org/10.3390/sym15101896>

9. Zhang, S. Computing Local Fractal Dimension Using Geographical Weighting Scheme. Doctoral Dissertations, 2018. Available online: <https://opencommons.uconn.edu/dissertations/1829> (accessed on 02 March 2021).
10. Chen, Y. Fractal Modeling and Fractal Dimension Description of Urban Morphology. *Entropy*. 2020, 22, 961. <https://doi.org/10.3390/e22090961>
11. Man, X.; Chen, Y. Fractal-Based Modeling and Spatial Analysis of Urban Form and Growth: A Case Study of Shenzhen in China. *ISPRS Int. J. Geo-Inf.* 2020, 9(11), 672. <https://doi.org/10.3390/ijgi9110672>
12. Imre, A.; Bogaert, J. The Fractal Dimension as a Measure of the Quality of Habitats. *Acta Biotheoretica*. 2004, 52, 41–56. doi: <https://doi.org/10.1023/B:ACBI.0000015911.56850.0f>
13. Tripathi, S.K.; Kushwaha, C.P.; Arijit Roy; Basu, S.K. Measuring ecosystem patterns and processes through fractals. *Current Scienc.* 2015, 109(8). DOI: 10.18520/v109/i8/1418-1426
14. Schmid, P.E. Fractal Properties of Habitat and Patch Structure in Benthic Ecosystems. *Advances in Ecological Research*. 1999, 30, 339-401. doi: [https://doi.org/10.1016/S0065-2504\(08\)60021-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2504(08)60021-5)
15. Reichert, J.; Backes, A.R.; Schubert, P.; Wilke, T. The power of 3D fractal dimensions for comparative shape and structural complexity analyses of irregularly shaped organisms. *Methods in Ecology and Evolution*. 2017, 8(12), 1650-1658. <https://doi.org/10.1111/2041-210X.12829>
16. Zeide, B. Fractal geometry in forestry applications. *Forest Ecology and Management*. 1991, 46, 179-188. doi: [https://doi.org/10.1016/0378-1127\(91\)90230-S](https://doi.org/10.1016/0378-1127(91)90230-S)
17. Smith, T.G.; Lange, G.D. Biological Cellular Morphometry-Fractal Dimensions, Lacunarity and Multifractals. In: Losa G.A., Merlini D., Nonnenmacher T.F., Weibel E.R. (eds) *Fractals in Biology and Medicine. Mathematics and Biosciences in Interaction*. Birkhäuser, Basel. 1998. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8936-0_3
18. Lemmens, S.; Devulder, A.; Van Keer, K.; Bierkens, J.; De Boever, P.; Stalmans, I. Systematic Review on Fractal Dimension of the Retinal Vasculature in Neurodegeneration and Stroke: Assessment of a Potential Biomarker. *Frontier in Neuroscience*. 2020, 14:16. doi: 10.3389/fnins.2020.00016.
19. Gómez, C.; Mediavilla, Á.; Hornero, R.; Abásolo, D.; Fernández, A. Use of the Higuchi's fractal dimension for the analysis of MEG recordings from Alzheimer's disease patients. *Medical Engineering & Physics*. 2009, 31(3), 306-313. doi: <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2008.06.010>.
20. Liu, J.Z.; Zhang, L.D.; Yue, G.H. Fractal dimension in human cerebellum measured by magnetic resonance imaging. *Biophysical Journal*. 2003, 85(6), 4041–4046. [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(03\)74817-6](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(03)74817-6)

21. Di Ieva, A.; Grizzi, F.; Jelinek, H.; Pellionisz, A.J.; Losa G.A. Fractals in the Neurosciences, Part I: General Principles and Basic Neurosciences. *The Neuroscientist*. 2014, 20(4), 403-417. doi:10.1177/1073858413513927
22. Di Ieva, A.; Esteban, F.J.; Grizzi, F.; Klonowski, W.; Martín-Landrove, M. Fractals in the Neurosciences, Part II: Clinical Applications and Future Perspectives. *The Neuroscientist*. 2015, 21(1), 30-43. doi:10.1177/1073858413513928
23. Oczeretko, E.; Borowska, M.; Kitlas, A.; Borusiewicz A.; Sobolewska-Siemieniuk, M. Fractal analysis of medical images in the irregular regions of interest. 2008 8th IEEE International Conference on BioInformatics and BioEngineering, Athens, Greece. 2008, 1-6, doi:10.1109/BIBE.2008.4696830
24. Uahabi, K.L.; Mohamed, Atounti. Applications of fractals in medicine. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*. 2015, 42 (1), 167-174.
25. da Silva Júnior JG, Santos do Nascimento ID, Araújo SRR, Nascimento CGS, Barbosa de Moraes ME, et al. Fractal dimension as tool for vascular diagnosis in health. *Hematology and Medical Oncology*. 2019, 4. DOI: 10.15761/HMO.1000187.
26. Penn, A.; Loew, M. Estimating fractal dimension of medical images. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*. 1996, 2710. doi: 2710. 10.1117/12.237990.
27. Tayurskii, D.; Rusanova, I. The Fractal Analysis of the Images and Signals in Medical Diagnostics, Chapters, in: Fernando Brambila (ed.), *Fractal Analysis – Applications in Health Sciences and Social Sciences*, IntechOpen. 2017. doi: 10.5772/intechopen.68167.
28. Sumitra, K.; Sarojananda, M.; Subhendu, R. Fractal Dimension in Medical Imaging: A Review. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*. 2017, 4(5).
29. Katz, M.J.; George, E.B. Fractals and the analysis of growth paths. *Bulletin of Mathematical Biology*. 1985, 47(2), 273-286. [https://doi.org/10.1016/S0092-8240\(85\)90053-9](https://doi.org/10.1016/S0092-8240(85)90053-9)
30. Higuchi T. Approach to an Irregular Time Series on the Basis of the Fractal Theory / T. Higuchi // *Physica D* 31. 1988, 277-283.
31. Raghavendra B. S. and Narayana Dutt D. Computing Fractal Dimension of Signals using Multiresolution Box-counting Method. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2010, 37, 1266-1281.
32. Гафарова Е.А., Добикова Д. В. Фрактальный подход к прогнозированию экономических кризисов. *Научный журнал НИУ ИТМО. Экономический и экологический менеджмент*. 2012, 1, 110-121.
33. Котировки акций компаний. Режим доступа: <https://finance.yahoo.com/> (дата обращения 01.03.2024)

REFERENCES

1. Kaminsky, G. and Lizondo, S and Reinhart, C. M. Leading Indicators of Currency Crisis. IMF Staff Papers. 1998, 45(1).
2. Kaminsky, G. Currency and banking crises: the early warning of distress. IMF Working Paper, 1999, 99, 178.
3. Peters, E.E. Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. Wiley Finance, 1994.
4. Kantelhardt J.W. Fractal and Multifractal Time Series. In: Meyers R. (eds) Mathematics of Complexity and Dynamical Systems. Springer, New York, NY. 2012. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_30
5. Kumar, S. and Deo, N. Analysing correlations after the financial crisis of 2008 and multifractality in global financial time series. PRAMANA. Journal of Physics. 2015, 84(2), 317–325.
6. Schmitt, F., Schertzer, D. and Lovejoy, S. Multifractal fluctuations in finance. Int. J. Theor. Appl. Fin. 2001, 3(3), 361–364. Available online: <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0102369v1.pdf> (accessed on 01.03.2024)
7. Mulligan, R.F. A fractal analysis of foreign exchange markets. International Advances in Economic Research. 2000, 6, 33–49. <https://doi.org/10.1007/BF02295750>
8. Paun M-A, Paun V-A, Paun V-P. Monetary Datum Fractal Analysis Using the Time Series Theory. Symmetry. 2023; 15(10):1896. <https://doi.org/10.3390/sym15101896>
9. Zhang, S. Computing Local Fractal Dimension Using Geographical Weighting Scheme. Doctoral Dissertations, 2018. Available online: <https://opencommons.uconn.edu/dissertations/1829> (accessed on 01.03.2024).
10. Chen, Y. Fractal Modeling and Fractal Dimension Description of Urban Morphology. Entropy. 2020, 22, 961. <https://doi.org/10.3390/e22090961>
11. Man, X.; Chen, Y. Fractal-Based Modeling and Spatial Analysis of Urban Form and Growth: A Case Study of Shenzhen in China. ISPRS Int. J. Geo-Inf. 2020, 9(11), 672. <https://doi.org/10.3390/ijgi9110672>
12. Imre, A.; Bogaert, J. The Fractal Dimension as a Measure of the Quality of Habitats. Acta Biotheoretica. 2004, 52, 41–56. doi: <https://doi.org/10.1023/B:ACBI.0000015911.56850.0f>
13. Tripathi, S.K.; Kushwaha, C.P.; Arijit Roy; Basu, S.K. Measuring ecosystem patterns and processes through fractals. Current Scienc. 2015, 109(8). DOI: 10.18520/v109/i8/1418-1426
14. Schmid, P.E. Fractal Properties of Habitat and Patch Structure in Benthic Ecosystems. Advances in Ecological Research. 1999, 30, 339-401. doi: [https://doi.org/10.1016/S0065-2504\(08\)60021-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2504(08)60021-5)

15. Reichert, J.; Backes, A.R.; Schubert, P.; Wilke, T. The power of 3D fractal dimensions for comparative shape and structural complexity analyses of irregularly shaped organisms. *Methods in Ecology and Evolution*. 2017, 8(12), 1650-1658. <https://doi.org/10.1111/2041-210X.12829>
16. Zeide, B. Fractal geometry in forestry applications. *Forest Ecology and Management*. 1991, 46, 179-188. doi: [https://doi.org/10.1016/0378-1127\(91\)90230-S](https://doi.org/10.1016/0378-1127(91)90230-S)
17. Smith, T.G.; Lange, G.D. Biological Cellular Morphometry-Fractal Dimensions, Lacunarity and Multifractals. In: Losa G.A., Merlini D., Nonnenmacher T.F., Weibel E.R. (eds) *Fractals in Biology and Medicine. Mathematics and Biosciences in Interaction*. Birkhäuser, Basel. 1998. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8936-0_3
18. Lemmens, S.; Devulder, A.; Van Keer, K.; Bierkens, J.; De Boever, P.; Stalmans, I. Systematic Review on Fractal Dimension of the Retinal Vasculature in Neurodegeneration and Stroke: Assessment of a Potential Biomarker. *Frontier in Neuroscience*. 2020, 14:16. doi: 10.3389/fnins.2020.00016.
19. Gómez, C.; Mediavilla, Á.; Hornero, R.; Abásolo, D.; Fernández, A. Use of the Higuchi's fractal dimension for the analysis of MEG recordings from Alzheimer's disease patients. *Medical Engineering & Physics*. 2009, 31(3), 306-313. doi: <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2008.06.010>.
20. Liu, J.Z.; Zhang, L.D.; Yue, G.H. Fractal dimension in human cerebellum measured by magnetic resonance imaging. *Biophysical Journal*. 2003, 85(6), 4041-4046. [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(03\)74817-6](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(03)74817-6)
21. Di Ieva, A.; Grizzi, F.; Jelinek, H.; Pellionisz, A.J.; Losa G.A. Fractals in the Neurosciences, Part I: General Principles and Basic Neurosciences. *The Neuroscientist*. 2014, 20(4), 403-417. doi:10.1177/1073858413513927
22. Di Ieva, A.; Esteban, F.J.; Grizzi, F.; Klonowski, W.; Martín-Landrove, M. Fractals in the Neurosciences, Part II: Clinical Applications and Future Perspectives. *The Neuroscientist*. 2015, 21(1), 30-43. doi:10.1177/1073858413513928
23. Oczeretko, E.; Borowska, M.; Kitlas, A.; Borusiewicz A.; Sobolewska-Siemieniuk, M. Fractal analysis of medical images in the irregular regions of interest. 2008 8th IEEE International Conference on BioInformatics and BioEngineering, Athens, Greece. 2008, 1-6, doi:10.1109/BIBE.2008.4696830
24. Uahabi, K.L.; Mohamed, Atounti. Applications of fractals in medicine. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*. 2015, 42 (1), 167-174.

25. da Silva Júnior JG, Santos do Nascimento ID, Araújo SRR, Nascimento CGS, Barbosa de Moraes ME, et al. Fractal dimension as tool for vascular diagnosis in health. Hematology and Medical Oncology. 2019, 4. DOI: 10.15761/HMO.1000187.
26. Penn, A.; Loew, M. Estimating fractal dimension of medical images. Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering. 1996, 2710. doi: 2710. 10.1117/12.237990.
27. Tayurskii, D.; Rusanova, I. The Fractal Analysis of the Images and Signals in Medical Diagnostics, Chapters, in: Fernando Brambila (ed.), Fractal Analysis – Applications in Health Sciences and Social Sciences, IntechOpen. 2017. doi: 10.5772/intechopen.68167.
28. Sumitra, K.; Sarojananda, M.; Subhendu, R. Fractal Dimension in Medical Imaging: A Review. International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET). 2017, 4(5).
29. Katz, M.J.; George, E.B. Fractals and the analysis of growth paths. Bulletin of Mathematical Biology. 1985, 47(2), 273-286. [https://doi.org/10.1016/S0092-8240\(85\)90053-9](https://doi.org/10.1016/S0092-8240(85)90053-9)
30. Higuchi T. Approach to an Irregular Time Series on the Basis of the Fractal Theory / T. Higuchi // Physica D 31. 1988, 277-283.
31. Raghavendra B. S. and Narayana Dutt D. Computing Fractal Dimension of Signals using Multiresolution Box-counting Method. World Academy of Science, Engineering and Technology. 2010, 37, 1266-1281.
32. Gafarova, E.A. and Dobikova, D.V. Fractal Approach to Exchange Crisis Forecasting. Scientific journal NRU ITMO. Economics and Environmental Management. 2012, 1, 110-121. (In Russ)
33. Company stock quotes. Available online: <https://finance.yahoo.com/> (accessed on 01.03.2024)

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Сенченко Дарья Владимировна, магистрант,
РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия.
e-mail: Senchenko.DV@rea.ru

Daria Vladimirovna Senchenko, Graduate student,
Plekhanov Russian University of Economics,
Moscow, Russia.

*Статья поступила в редакцию 15.03.2024; одобрена после рецензирования 21.03.2024;
принята к публикации 21.03.2024.*

*The article was submitted 15.03.2024; approved after reviewing 21.03.2024;
accepted for publication 21.03.2024.*