ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 2 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

ПРОБЛЕМЫ ФИГУРНЫХ ЧИСЕЛ

Э. Т. Аванесов, В. А. Гусев (г. Пятигорск, г. Иваново)

Фигурные числа составляют одну из интересных глав диофантова анализа. Известные проблемы фигурных чисел касаются квадратов, треугольных, тетраэдальных и пирамидальных чисел [1].

Определение 1. *Числа вида*

$$t_x = \frac{1}{2}x(x+1),$$

где x – натуральное число, называются треугольными.

Определение 2. *Тетраэдальными числами называются числа вида*

$$T_y = \frac{1}{6}y(y+1)(y+2)$$

при натуральном y.

Определение 3. *Пирамидальными числами называются числа вида*

$$P_z = \frac{1}{6}z(z+1)(2z+1)$$

при натуральном z.

Попарное приравнивание таких чисел приводит к серии проблем ([2], проблема Д3, стр. 82) решение которых привлекает особое внимание.

Имеют место следующие результаты:

1. кроме чисел 1 и 4900, не существует других квадратов, являющихся одновременно пирамидальными числами ([3], [4] и [5]); этот результат следует из решения диофантова уравнения $y^2 = \frac{1}{6}x\,(x+1)\,(2x+1)$.

   Морделл в [5] указал на необходимость построения элементарного решения.

Элементарное решение [10] основывается на последовательной замене переменных, которая приводит к решению уравнения вида $m^2 = n^3 - 36n$.

Из теоремы В. А. Демьяненко получается оценка для $n \le 24(4 \cdot 36^3)^{13/6}$, откуда $x < 526574186144$. Компьютерный поиск даёт решение диофантова уравнения $(x = 1, y = 1)$ и $(x = 24, y = 70)$.

2. Кроме чисел $1, 55, 91$ и 208335, не существует других треугольных чисел, являющихся одновременно пирамидальными числами ([6] и [7]).

   Из определения треугольных и пирамидальных чисел следует уравнение $3y(y+1) = x(x+1)(2x+1)$.

   Заменой переменных $2x + 1 = M$ и $2y + 1 = N$ исходное уравнение приводим к виду $3N^2 = M^3 - M + 3$, которое подстановкой $u = 9N, v = 3M$ приводится к $u^2 = v^3 - 9v + 81$.

   Оценка Демьяненко даёт ограничение $|x| < 940697295604$. Компьютерный расчёт даёт приведенный результат.

3. Кроме чисел $1, 10, 120, 1540$ и 7140, не существует других тетраэдальных чисел, являющихся одновременно треугольными числами (проблема Эскота-Серпинского [8]). Для установления этого факта решается диофантово уравнение $3y(y+1) = x(x+1)(x+2)$.

4. Число Фибоначчи F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ будет треугольным тогда и только тогда, когда ([9]) $n = 1, 2, 4, 8$ и 10.

5. Числа Фибоначчи F_n с номерами $n = 1, 2, 12$ являются квадратами целых чисел. Для $n > 12$ диофантово уравнение $F_n = x^2$ решений не имеет [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Sierpinski W. Elementary Theory of Numbers, Warszawa, 1987.

[2] Guy R. Unsolved problems in number theory // Springer – Verl, New York, 1981.

[3] Watson Y.N. The problem of a square pyramid // Messenger of Math. 1918, 48, 3-6.

[4] Lunggren W. New solution of a problem proposed by E.Lucas // Norsk Mat. Tidskr, 1952, 34, 65-72.

[5] Mordell L.Y. Diophantine Equations // Academic Press, London and New York, 1969.

[6] Uchiyama S. Solution of a Diophantine Problem // Tsukuba Yourn. Math, 1984, 8, № 1, 131-157.

[7] Аванесов Э.Т. Диофантово уравнение $3y(y+1)x(x+1)(2x+1)$ // Волжский математический сборник, 1971, № 8, 3-6.

[8] Аванесов Э.Т. Решение одной проблемы фигурных чисел // Acta Arithmetica, 1967, т. 12, № 4, 409-420.

[9] Luo Ming. On Triangular Fibonacci Numbers // The Fibonacci Quarterly, 1989, 2, 98-108.

[10] Аванесов Э.Т., Гусев В.А. О проблемах фигурных чисел //Евразийский математический журнал, 2007, № 3, 9-12.

[11] Аванесов Э.Т., Гусев В.А., Борженская А.Л. Компьютеры в теории чисел. Пятигорск: РИА-КМВ, 2008. – 92 с.

Пятигорский государственный технологический университет
Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина
Получено 28.03.2012