ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 9 Выпуск 1 (2008)

УДК 511.336

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА-ГОЛЬДБАХА

Е. А. Бурлакова (г. Орел)

К числу центральных задач современной аддитивной теории чисел относятся, как известно проблемы Варинга и Гольдбаха. Проблема Гольдбаха была впервые сформулирована в 1742 году в письме Гольдбаха к Эйлеру. В этом письме Гольдбах высказал гипотезу о том, что всякое нечетное число большее или равное 9 есть сумма трех нечетных простых. Теорема И. М. Виноградова, доказанная в 1937 году, установила существование такого представления для всех достаточно больших натуральных чисел [1].

Проблема Варинга впервые сформулирована в работе [2]. В ней утверждается, что всякое натуральное число является суммой четырех квадратов, девяти кубов, девятнадцати четвертых степеней и т. д., или в более общем виде, для фиксированного числа $k \geqslant 2$ существует целое $g(k)$, зависящее только от k,такое, что всякое натуральное число является суммой g неотрицательных k-ых степеней. Существование величины $g(k)$ для любого натурального $k \geqslant 2$ было доказано Д. Гильбертом [3]. Позднее Г. Харди и Дж. Литтлвуд разбили эту проблему на два существенно разных случая, выделив в качестве более важного тот из них, в котором представляемое число N неограниченно возрастает. Количество слагаемых вида x^n, достаточных для существования таких представлений, в этом случае они обозначили через $G(n)$. Дальнейшие исследования в данной теме были направлены на получение новых верхних оценок функции $G(n)$.

Результат, полученный Г. Харди и Дж. Литтлвудом с помощью их кругового метода и оценок тригонометрических сумм по методу Г. Вейля, состоял в оценке вида $G(n) << n2^n$. Принципиальные улучшения в этом направлении были сделаны И.М.Виноградовым на основе его метода, опубликованного в 1934 году. Последняя из полученных им оценок величины $G(n)$ имеет вид

$$G(n) \leqslant 2n(1 + o(1)) \ln n.$$

Данная оценка приведена в монографии [4].

В 1937 году в работе *«Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел»* [5] И. М. Виноградов рассмотрел задачу о представлении растущего натурального числа N фиксированным количеством k слагаемых вида p^n, где p-простое число. При этом еще предполагалось, что для числа представлений $I(n, k, N)$ имеет место асимптотическая формула вида

$$I(n, k, N) \approx N^{\frac{k}{n}-1} (\ln n)^{-k} K(n)(\sigma + o(1)),$$

$$K(n) = \Gamma(1 + \frac{k}{n})^k \Gamma^{-1}(\frac{k}{n}),$$

где $\Gamma(s)$ - есть гамма-функция Эйлера, а величина $\sigma = \sigma(n, k, N)$ есть «особый ряд» данной аддитивной задачи.

Данный результат соединил в себе проблему Варинга и проблему Гольдбаха. Его доказательство стало возможным после получения И. М. Виноградовым оценок тригонометрических сумм Вейля с степенным понижением.

Дальнейшее направление исследований по данной тематике связано с улучшением верхних оценок величины $r(n)$. Здесь наилучший на сегодняшний день результат принадлежит И. М. Виноградову и формулируется в виде оценки

$$r(n) \leqslant 2n^2(2\ln n + \ln\ln n + 5).$$

Его вывод содержится в главе 9 [4].

Следует сказать, что при фиксированном значении параметра k приведенная выше асимптотическая формула для $I(n, k, N)$ не всегда обеспечивает существование представлений N в виде сумм слагаемых вида p^n в количестве k поскольку для этого необходимо чтобы особый ряд σ был отличен от нуля, а для чего требуется выполнение дополнительных арифметических условий разрешимости указанных в частности в [8]. В то же время существование для этой аддитивной проблемы функции $V(n)$, аналогичной функции $G(n)$ в проблеме Варинга, до сих пор не установлено.

Данная статья посвящена доказательству утверждения о том, что для любого натурального n всякое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде слагаемых вида p^n, где p - простое число, взятых в количестве k и при этом выполняется оценка сверху типа

$$k \leqslant V(n),$$

где функция $V(n)$ зависит только от показателя степени n.

Теорема. *Для каждого натурального n существует число $V(n)$ со свойствами: существует $c = c(n)$ с условием, что всякое целое $N \geqslant c$ представляется в форме*

$$N = p_1^n + ... + p_r^n, \tag{1}$$

где $p_1, ..., p_r$- простые числа, причем число слагаемых r удовлетворяет неравенству $r \leqslant V(n)$.

Схема доказательства теоремы в основном соответствует рассуждениям И. М. Виноградова при оценке функции $G(n)$ в проблеме Варинга в главе 4 книги *«Избранные труды»*[6] с. 278. Кроме того, используются условия разрешимости для системы уравнений варинговского типа в простых числах, указанные в докторской диссертации В. Н. Чубарикова [7] лемма 21 с.98.

Дальнейшие рассуждения, касающиеся вывода теоремы разобьем на несколько шагов.

1. Числа вида u. Обозначим через k величину

$$k = \left[\frac{\ln 20n^2(2\ln n + \ln\ln n + 5)}{-\ln(1-\nu)} + 1\right],$$

$$\nu = \frac{1}{n}, P = N^{\nu}.$$

Положим

$$P_1 = [0,25P], P_2 = [0,5P_1^{1-\gamma}], ..., P_k = [0,5P_{k-1}^{1-\gamma}].$$

Пусть величины p_s пробегают значения простых чисел лежащих соответственно в промежутках $[P_s, 2P_s - 1]$. Взяв какое-либо $s = 1, 2, ..., k$, положим

$$u_s = p_1^n + ... + p_s^n.$$

И рассмотрим совокупность (u_s'), состоящую из всех u_s.

Методом индукции нетрудно показать, что числа совокупности (u_s') не выходят из пределов P_1^n и $(2P_1)^n$ и не равны между собой, причем разность между большим и меньшим из соседних по величине чисел больше nP_s^{n-1}. Действительно, наше утверждение верно для совокупности (u_1'), так как она состоит из чисел

$$P_1^n, ..., (2P_1 - 1)^n, (2P_1)^n.$$

Пусть теперь наше утверждение верно для совокупности (u_s') и пусть u' и u'' - два соседних по величине числа этой совокупности. Рассмотрим числа

$$u', u' + P_{s+1}^n, ..., u' + (2P_{s+1} - 1)^n, u''. \tag{2}$$

Здесь имеем

$$(u' + P_{s+1}^n) - u' = P_{s+1}^n > nP_{s+1}^{n-1},$$

$$(u' + (p_{s+1} + 1)^n) - (u' + P_{s+1}^n) > nP_{s+1}^{n-1},$$

$$(p_{s+1} = P_{s+1}, ..., 2P_{s+1} - 2),$$

$$u'' - (u' + (2P_{s+1} - 1)^n) > nP_s^{n-1} - (2P_{s+1})^n > nP_{s+1}^{n-1}.$$

Значит числа (2) не выходят из пределов u' , u'' и не равны между собой, причем разность между большим и меньшим из соседних по величине чисел больше nP_{s+1}^{n-1}. Поэтому наше утверждение верно и для совокупности (u_{s+1}').

Заметим, что число различных значений, которые принимает величина p_s с помощью асимптотического закона в арифметических прогрессиях, оценивается снизу величиной порядка

$$\frac{P^{(1-\nu)^{s-1}}}{\ln P} >> \frac{P^{(1-\nu)^{s-1}}}{n \ln P}.$$

Поэтому число различных значений u_k оценивается снизу величиной порядка T, где

$$T >> \frac{P^{1+(1-\nu)+\ldots+(1-\nu)^{k-1}}}{\ln^k P} = \frac{P^{n-n(1-\nu)^k}}{\ln^k P} >> P^{n-\frac{1}{20n}\frac{1}{\ln n}}(n\ln P)^{-k} >> P^{n-\frac{1}{20n}\frac{1}{\ln n}-\epsilon},$$

где ϵ - сколь угодно мало, а константа в знаке $<<$ зависит от n и ϵ. Точно такой же порядок имеет оценка величины T сверху.

Положим далее

$$Q_\alpha = \sum_u e^{2\pi i\alpha u},$$

$$S_\alpha = \sum_{0,25P<p\leq P} e^{2\pi i\alpha p^n}.$$

Обозначим через m некоторое фиксированное натуральное число, удовлетворяющее условию $m \geq 6n$. Тогда количество $I(N)$ представлений растущего натурального N в виде

$$N = p_1^n + \ldots + p_m^n + d_1 + d_2,$$

где числа d_1 и d_2 принимают те же значения, что и определенные выше числа u_k, может быть записано в виде интеграла

$$I(N) = \int_0^1 S_\alpha^m Q_\alpha^2 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha = \int_{-\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1} S_\alpha^m Q_\alpha^2 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha,$$

где $\tau = P^{n-\nu}$.

Промежуток интегрирования разобьем на интервалы трех классов следующим образом.

Представим каждое число α в виде

$$\alpha = \left(\frac{a}{Q}\right) + z, z = \delta P^{-n},$$

$$(a, Q) = 1, 0 \leq a < Q, Q \leq P^{n-\nu}.$$

Пусть ϵ- любое число из промежутка $0 < \epsilon \leq 0,001, l = \ln P$. Точку α отнесем к классу $1a$, если выполнено условие $Q \leq e^{l^\epsilon}, |\delta| \leq e^{l^\epsilon}$.

К классу $1b$ отнесем точки, не являющиеся точками класса 1 и удовлетворяющие условиям

$$Q \leq P^{0,2\nu}, |\delta| \leq P^\nu.$$

Наконец, к классу 2 отнесем все оставшиеся точки.

Дальнейший ход рассуждений сводится к выделению главного члена асимптотической формулы для величины $I(N)$ из части интеграла распространенного на точки класса 1 и оценкой модуля части этого интеграла примененного на точки класса 2 и $1b$.

Нам потребуется следующая лемма И. М. Виноградова в оценке тригонометрических сумм S_α.

Лемма 1. *В принятых выше обозначениях положим для точек класса* $1a$

$$\triangle = l^{9\epsilon}Q^{-0,5\nu+\epsilon},$$

или также

$$\triangle = l^{9\epsilon}|\delta|^{-0,5\nu},$$

если $|\delta| \geq 1$.

Для точек класса $1b$*, взяв* $\epsilon_3 = 2\epsilon$*, положим*

$$\triangle = Q^{-0,5\nu+\epsilon_3},$$

если $Q > e^{l^\epsilon}$,

$$\triangle = Q^{-0,5\nu+\epsilon_3}|\delta|^{-0,5\nu+\epsilon_3},$$

если $|\delta| > e^{l^\epsilon}$.

Наконец для точек класса 2 *пусть*

$$\triangle = P^{-\rho_1}, \rho_1 = \frac{1}{20n^2(2\ln n + \ln\ln n + 5)}.$$

Тогда имеем

$$S_\alpha << \frac{P}{l}\triangle.$$

Константа в знаке $<<$ *зависит от* ϵ.

Доказательство этой леммы есть прямое следствие теоремы 2 [4] с. 132. Проведем разбиение промежутка интегрирования по α в интеграле $I(N)$ на три подмножества. К первому множеству Ω_{11} отнесем все точки α промежутка $[-P^{-n+\nu}, 1-P^{-n+\nu}]$, которые могут быть представлены в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + z,$$

где $(a,q) = 1, 0 \leq a < q, q \leq \ln n^A,\ < 100$ - некоторое фиксированное число.

К второму подмножеству отнесем точки классов $1a$ и $1b$ леммы 1, которые не входят в Ω_{11}.

К третьему подмножеству Ω_2 отнесем точки класса 2 леммы 1.

В соответствии с этим разбиением величину $I(N)$ можно представить в виде

$$I(N) = I_{11} + I_{12} + I_2.$$

Здесь величина I_{11} представляет собой часть интеграла I распространенного на точки α класса Ω_{11}, I_{12} - на точки α класса Ω_{12}, а I_2 - на точки α класса Ω_2 .

2. Оценка величины I_2. Имеем

$$|I^2| = \left|\int_{\Omega_2} S_\alpha^m Q_\alpha^2 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha\right| \leq \max_{\Omega_2}|S_\alpha|^m \int_0^1 |Q_\alpha^2| d\alpha = T\max_{\Omega_2}|S_\alpha|^m.$$

Далее для оценки величины S_α воспользуемся леммой 1, а для величины T полученной раньше оценкой. Учитывая, что $P^{-n}N << 1$, будем иметь

$$|I_2| << TP^{(1-\rho_1)m}l^{-m} = T^2N^{-1}l^{-m}T^{-1}P^{-\rho_1 m}N <<$$

$$<< T^2N^{-1}l^{-m}T^{-1}P^mP^{-n+\frac{1}{20n^2(2\ln n+\ln\ln n+5)}+\epsilon}NP^{-\frac{6}{20n^2(2\ln n+\ln\ln n+5)}} =$$

$$= KP^{-n}N^{-\frac{1}{4n^2(2\ln n+\ln\ln n+5)}+\epsilon} << KP^{-\delta(n)},$$

при условии, что

$$K = T^2N^{-1}l^{-m}T^{-1}P^m,$$

$$\delta = (5n^2(2\ln n + \ln\ln n + 5))^{-1}$$

и

$$\epsilon < 0,1\delta.$$

Требуемая оценка величины $|I_2|$ получена.

3. Оценка величины I_{12}**.** Подмножество Ω_{12} состоит из окрестностей $U\left(\frac{a}{q}\right)$ рациональных точек вида $\frac{a}{q}$ с условиями $0 \le a < q, (a,q) = 1, \ln^A N < q < P^{-0,2\nu}$. При этом окрестности $U\left(\frac{a}{q}\right)$ имеют постоянный радиус $\delta_0 = P^{-n+\nu}$.

Из леммы 1 вытекает, что в точках α из данного подмножества выполняется единообразная оценка вида

$$|S_\alpha| << q^{-0,4\nu}P(1+Nz)^{-0,4\nu}(\ln P)^{-1},$$

где $z = \left|\frac{a}{q} - \alpha\right|$. Константа в знаке « зависит от ϵ.

Очевидно, для величины I_{12}справедлива оценка вида

$$|I_{12}| \le \int_{\Omega_2} |S_\alpha^m||Q_\alpha^2|d\alpha =$$

$$= \sum_{\ln^A N<q\le P^{-0,2\nu}} \sum_{0<a<q,(a,q)=1} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} |S_\alpha^m||Q_\alpha^2|dz.$$

В последнем интеграле используется обозначение $\alpha = \frac{a}{q} + z$.

Далее имеем $|Q_\alpha^2| \le T^2$, поэтому из леммы 1 вытекает, что

$$|I_{12}| << \sum_{\ln^A N<q\le P^{-0,2\nu}} \sum_{0<a<q,(a,q)=1} T^2\left(\frac{P}{\ln P}\right)^m q^{-0,4\nu m}\int_0^{\delta_0}(1+Nz)^{0,4\nu m}dz.$$

Но так как $m \ge 6n$, то $\nu m = \frac{m}{n} \ge 6$. Следовательно, $1 - 0,4\nu m \le -1,4$ и

$$|I_{12}| << T^2N^{-1}\left(\frac{P}{\ln P}\right)^m \sum_{\ln^A N<q\le P^{-0,2\nu}} q^{-1,4} <<$$

$$<< T^2N^{-1}\left(\frac{P}{\ln P}\right)^m (\ln N)^{-0,4} <<$$
$$<< K(\ln N)^{-0,4}.$$

4. Выделение главного члена из интеграла I_{11}**.** Подмножество Ω_{11}, по которому проводится интегрирование в I_{11}, состоит из окрестностей $U\left(\frac{a}{q}\right)$ радиуса $\delta_0 = P^{-n+\nu}$ при условии, что q пробегает все натуральные числа, не превосходящие значения $\ln^A N$ и при фиксированном q числитель a меняется в пределах $0 < a < q$, причем $(a, q) = 1$.

Известно, что в этом случае для суммы S_α имеет место асимптотическая формула вида
$$S_\alpha = F(a,q)D(z) + O(Pe^{-c\sqrt{l}}).$$

Здесь
$$\alpha = \frac{a}{q} + z,$$
$$F(a,q) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{0<x<q,(x,q)=1} e^{2\pi i \frac{a}{q} x^n},$$
$$D(z) = \int_2^P \frac{e^{2\pi i z x^n}}{\ln x} dx,$$
$l = \ln P$, $c > 0$ - некоторая постоянная.

Доказательство этого утверждения содержится в диссертации [7] лемма 16 с.87.

Заметим также, что если $|z| \geq z_0 = N^{-1}(\ln N)^{5A}$, то из леммы 1 вытекает справедливость оценки вида
$$|S_\alpha| << \frac{P}{\ln P}(1 + zN)^{-0,4\nu}.$$

Поэтому, полагая $S_\alpha = S(\alpha), Q_\alpha = Q(\alpha)$, будем иметь
$$\int_{U\left(\frac{a}{q}\right)} S_\alpha^m Q_\alpha^2 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha =$$
$$= \int_{-z_0}^{z_0} S^m_{\frac{a}{q}+z} Q^2_{\frac{a}{q}+z} e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N} dz +$$
$$+ O\left(\int_{z_0}^{\delta_0} \left(\frac{P}{\ln P}\right)^m z^{-0,4\nu m} T^2 dz\right) =$$
$$= \int_{-z_0}^{z_0} F^m(a,q) D^m(z) e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)} Q^2\left(\frac{a}{q}+z\right) dz +$$
$$+ O(P^m e^{-cm\sqrt{l}} T^2 z_0) +$$

$$+O\left(\left(\frac{P}{\ln P}\right)^m T^2 z_0^{1-0,4\nu m}\right) =$$

$$= F^m(a,q)\sum_{u_1,u_2} e^{2\pi i \frac{a}{q}(u_1+u_2-N)} \int_{-z_0}^{z_0} D^m(z) e^{2\pi i z(u_1+u_2-N)} dz + R_1,$$

где

$$R_1 << \left(\frac{P}{\ln P}\right)^m T^2 \int_{z_0}^{\delta} (zN)^{-0,4\nu m} dz <<$$

$$<< \left(\frac{P}{\ln P}\right)^m T^2 N^{-1} (z_0 N)^{-0,4\nu m} <<$$

$$<< \left(\frac{P}{\ln P}\right)^m T^2 N^{-1} (\ln N)^{-7A} = K(\ln N)^{-7A},$$

так как $1-0,4\nu m \leq -1,4$.

Суммируя по всем точкам $\frac{a}{q}$ указанного выше вида, приходим к равенству

$$I_{11} = \sum_{u_1,u_2} \sum_{q\leq \ln^A N} \sum_{0<a<q,(a,q)=1} F^m(a,q) e^{2\pi i \frac{a}{q}(u_1+u_2-N)}.$$

$$\cdot \int_{-z_0}^{z_0} D^m(z) e^{2\pi i z(u_1+u_2-N)} dz + R_2 = I_3 + R_2,$$

где величины I_3, R_2 очевидным образом определяются последним равенством, причем

$$R_2 << K(\ln N)^{-7A} \sum_{q\leq \ln^A N} \sum_{0<a<q,(a,q)=1} 1 << K(\ln N)^{-5A}.$$

Таким образом, имеем

$$I(N) = I_3 + R_2 + O(K(\ln N)^{-0,4}) + O(KP^{-\delta(n)}) = I_3 + O(K(\ln N)^{-0,4}).$$

В силу определения величин u_1 и u_2 при любых их фиксированных значениях разность $N-u_1-u_2$ имеет тот же порядок, что и параметр N. Поэтому для суммы по параметрам a, q , а так же для интеграла по dz в определение величины I_3 можно воспользоваться известными асимптотическими формулами из главы 9 [4] или [7] с. 89–94. Тогда получим

$$I_3(N) = \sum_{u_1,u_2} \sigma(N_1) H(N_1) + O(K(\ln N)^{-0,4}).$$

Здесь $N_1 = N - u_1 - u_2$, а величины $\sigma(N_1)$ и $H(N_1)$ представляют собой сингулярный ряд и сингулярный интеграл, удовлетворяющие равенству

$$H(N_1) = \left(\frac{(\Gamma(1+\nu))^m}{\Gamma(m\nu)} + O\left(\frac{\ln\ln N}{\ln N}\right)\right) \frac{N_1^{m\nu-1}}{(\ln N_1^{1/n})^m},$$

$$\sigma(N_1) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{0<a<q,(a,q)=1} F^m(a,q) e^{-2\pi i \frac{a}{q} N_1}.$$

5. Исследование особого ряда. Справедливо следующее утверждение

$$\sigma(N_1) = \sigma = \prod_p \sigma_p,$$

где $\sigma_p = \lim_{\alpha \to +\infty} p^{\alpha} \phi^{-m}(p^{\alpha}) W(p^{\alpha}, m)$.

Здесь параметр p пробегает множество всех простых чисел, а через $W(p^{\alpha}, m)$ обозначено число решений сравнения

$$x_1^n + ... + x_m^n \equiv N_1 (\mathrm{mod} p^{\alpha}), \tag{3}$$

$$1 \le x_k < p^{\alpha}, (x_k, p) = 1, 1 \le k \le m.$$

Доказательство см. [7] с.96 лемма 19.

Далее нам потребуется еще одно утверждение, касающиеся оценки снизу произведения Π_1 вида $\Pi_1 = \prod_{p>2n} \sigma_p(N_1)$.

Лемма 2. *Существует абсолютная постоянная* $c_0 > 0$*, такая, что* $\Pi_1 \ge c_0$ *для всех чисел* N_1 *вида*

$$N_1 = N - u_1 - u_2.$$

Доказательство аналогично выводу теоремы 6 [7] с. 109.

Оценим теперь снизу величину σ_p в случае когда $p \le 2n$. Докажем, что для таких p при любом натуральном α найдется постоянная $c_p > 0$, для которой выполняется оценка вида

$$W(p^{\alpha}, m) \ge c_p p^{\alpha(m-1)}.$$

Для этого рассмотрим сначала случай когда $N_1 \equiv m(\mathrm{mod} p^{\alpha_0})$, где α_0- произвольное фиксированное натуральное число. Если $\alpha \le \alpha_0$, то в качестве решения системы (3) выберем набор чисел $x_1 = 1, ..., x_m = 1$.

Если же $\alpha > \alpha_0$, то будем искать решение системы (3) в виде

$$x_k = 1 + y_k p^{\eta},$$

где величина $\eta = \eta(p, n)$определяется из условия $p^{\eta} \le n < p^{\eta+1}$, переменные y_k при $k = 2, ..., m$ могут принимать произвольные целые значения, а неизвестная y_1 определяется таким образом, чтобы набор $x_1, ..., x_k$ был решением сравнения (3).

Его можно переписать в виде

$$(1 + y_1 p^{\eta})^n \equiv N_1 - (1 + y_2 p^{\eta})^n - ... - (1 + y_m p^{\eta})^n (\mathrm{mod} p^{\alpha}).$$

Раскрывая скобки и выполняя очевидные преобразования, будем иметь

$$1 + ny_1p^{\eta} + \frac{n(n-1)}{2}y_1^2p^{2\eta} + \ldots \equiv$$

$$\equiv N_1 - (1 + ny_2p^{\eta} + \frac{n(n-1)}{2}y_2^2p^{2\eta} + \ldots)(\mathrm{mod}\, p^{\alpha}). \tag{4}$$

Определим параметр ω как точную степень числа p, делящего n.

Заметим, что степень простого p, на которую делится число $c_n^r p^m$ при $r \geq 2$ всегда превосходит значение $\eta{+}\omega$. Кроме того, имеем сравнение $N_1{\equiv}m(\mathrm{mod}\, p^{\alpha})$. Поэтому при $\alpha_0 > \eta + \omega$сравнение (4) является следствием сравнения

$$y_1 \equiv (n_2(N_1 - 1 - ((1+y_2p^{\eta})^n - \ldots - (1+y_mp^{\eta})^n - \frac{n(n-1)}{2}y_1^2p^{2\eta})))(\mathrm{mod}\, p^{\alpha-\eta-\omega}).$$

Здесь число n_2 определяется из условий $n = n_1p^{\omega}$ и $n_2n_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\, p^{\alpha-\eta-\omega})$.

Приведенные выше рассуждения показывают, что если придавать значения переменным y_k с условием $(y_k, p) = 1$ при всех $k = 2, \ldots, m$, то будут получаться различные решения системы (3), если только вычеты y_kp^{η} будут различаться по модулю p^{α}.

Таким образом при $\alpha{>}\alpha_0{=}\eta{+}\omega$ будет получено не менее $(p{-}1)^{m-1}p^{(\alpha-\eta-1)(m-1)}$ различных решений сравнения (3). Другими словами имеет место оценка

$$W(p^{\alpha}, m) \geq \left(1 - \frac{1}{p}\right)p^{(\alpha-\eta-1)(m-1)} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)p^{-m(\eta+1)}p^{\alpha(m-1)} = c_pp^{\alpha(m-1)},$$

при $c_p = \left(1 - \frac{1}{p}\right)p^{-m(\eta+1)}$ и всех $\alpha \geq \eta + \omega + 1$.

Отсюда имеем

$$\sigma_p = \lim_{\alpha\to+\infty} p^{\alpha}\phi^{-m}(p^{\alpha})W(p^{\alpha}, m) \geq \lim_{\alpha\to+\infty} p^{\alpha}p^{-(\alpha-1)m}(p-1)^{-m}c_pp^{\alpha(m-1)} =$$

$$= c_p\left(\frac{p}{p-1}\right)^m \geq c_p.$$

Если переменная σ_p по всем $p \leq 2n$, то получим

$$\Pi_0 = \prod_{p\leq 2n} \sigma - p \geq \prod_{p\leq 2n} c_p > 0.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\sigma(N_1) = \prod_{p} \sigma - p = \prod_{p\leq 2n} \sigma - p \prod_{p>2n} \sigma - p = \Pi_0\Pi_1 \geq \Pi_0c_0 = c_1 > 0.$$

Заметим, что полученное значение c_1 не зависит от порядка величины N_1 и найдено при единственном условии, что $N_1 \equiv m(\mathrm{mod}\, p^{\alpha_0})$, где p пробегает все значения простых чисел и $\alpha_0 = \eta + \omega + 1$.

Если обозначить через B произведение всех простых чисел не превосходящих $2n$, то последнее условие, очевидно, является следствием сравнения $N_1 \equiv m(\mathrm{mod} B_0)$, где $B_0 = B^{2n}$.

Разобьем теперь все значения, которые принимают числа $N_1 = N - u_1 - u_2$ на различные прогрессии по модулю B_0, и выделим ту из них, которая содержит больше всего членов. Ясно, что в ней будет не меньше чем $T^2 B_0^{-1}$ членов и для каждого из них будет выполняться сравнение $N_1 \equiv m_0(\mathrm{mod} B_0)$, m_0 - некоторое фиксированное натуральное число. Накладывая на указанное выше значение параметра $m \geq 6n$ дополнительное условие $m \equiv m_{0(\mathrm{mod} B_0)}$, мы приходим к неравенству $c_1 > 0$, откуда следует, что $\sigma > 0$, что и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Виноградов И. М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. № 6–7. С. 291–294.

[2] Waring E. Meditationes algebraicae. Cambridge. 1770. P. 204–205. Ср. Dickson L. E. History of the theory of numbers. V. 2. New York, 1934. P. 717–729.

[3] Hilbert D. Beweis fьr die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen. Math. Ann. 67. 1909. P. 281–300.

[4] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1971.

[5] Виноградов И. М. Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел // Труды Тбилисского математического ин-та. Т. 3. 1937.

[6] Виноградов И. М. Избранные труды. М., Изд-во АН СССР. 1952. С. 428–433.

[7] Чубариков В. Н. Многомерные проблемы теории простых чисел. Дисс. на соискание ученой степени д. физ.-мат. наук. МГУ им. Ломоносова, М. 1985.

[8] Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О числе слагаемых в аддитивной проблеме Виноградова и ее обобщениях // IV Международная конференция "Современные проблемы теории чисел и ее приложения". Тула, 10-15 сентября, 2002, с.5–38.

Орловский Государственный Университет.
Получено 10.09.2008.