

ПРИВЕДЕННЫЙ МОДУЛЬ НА ПОВЕРХНОСТИ

Коллеге, учителю и другу –
Игорю Александровичу Александрову

Рассматриваются двумерные, односвязные, локально липшицевы поверхности в $\mathbb{R}^m$. Вводится и исследуется понятие приведенного модуля односвязной области относительно «граничной точки» на поверхности, применявшееся в случае плоских областей к изучению граничного поведения конформных отображений [1].

1. Конформное отображение поверхности

Понятие конформного отображения поверхности подробно рассмотрено в монографии [2]. Ниже мы будем использовать определения и результаты четвертой главы монографии. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$ – поверхность, определяемая локально билипшицевой вектор-функцией

$$y = f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), \dots, f_m(x_1, x_2)) : D \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

В общем случае поверхность Ω может иметь самопересечения. Говорят, что поверхность Ω *вложена* в $\mathbb{R}^m$, если вектор-функция f реализует гомеоморфное отображение области D на множество $f(D)$ с метрикой (и, тем самым, топологией!), индуцированной из $\mathbb{R}^m$. Поверхность Ω *погружена* в $\mathbb{R}^m$, если вектор-функция f обладает описанным свойством локально в D . Ясно, что Ω является вложенной, если она билипшицева, и погруженной, если она локально билипшицева. Так как вектор-функция f локально липшицева, то по теореме Радемахера почти всюду в D существует полный дифференциал $df(x)$. Пусть $(x_1, x_2) \in D$ – точка, где f имеет дифференциал. Символом

$$f' = \begin{pmatrix} f'_{1x_1} & f'_{2x_1} & \dots & f'_{mx_1} \\ f'_{1x_2} & f'_{2x_2} & \dots & f'_{mx_2} \end{pmatrix}$$

мы обозначаем производную f в точке $x = (x_1, x_2)$, где такая производная существует. Пользуясь стандартными обозначениями

$$g_{11} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2, \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle, \quad g_{22} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|^2,$$

определяем первую квадратичную форму поверхности Ω в области D :

$$ds_\Omega^2 = g_{11} dx_1^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2^2.$$

Элемент площади поверхности Ω имеет вид

$$d\Omega = \sqrt{g(x)} dx_1 dx_2,$$

где

$$g(x) = g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}^2(x).$$

Пусть Γ – семейство локально спрямляемых дуг или кривых на поверхности Ω . Будем говорить, что неотрицательная, локально ограниченная, измеримая по Лебегу функция $\rho \geq 0$ *допустима* для семейства Γ дуг γ , если ρ измерима вдоль каждой из дуг $\gamma \in \Gamma$ и

$$\int_\gamma \rho(x) ds_\Omega \geq 1 \quad \text{для всех } \gamma \in \Gamma. \quad (2)$$

Величина

$$\text{mod}_\Omega(\Gamma) = \inf_\rho \int_D \rho^2 d\Omega, \quad (3)$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым для Γ функциям ρ , называется *модулем семейства* Γ .

В случае, когда метрика $ds_\Omega = |dx|$ – евклидова и элемент площади $d\Omega = dx_1 dx_2$, используется упрощенное обозначение $\text{mod}(\Gamma)$. Предположим, что имеются две локально билипшицевы поверхности Ω' и Ω'' вида (1). Гомеоморфное отображение $T : \Omega' \rightarrow \Omega''$ называется *конформным*, если для любого семейства Γ локально спрямляемых дуг $\gamma \subset \Omega'$ выполнено

$$\text{mod}_{\Omega'} \Gamma = \text{mod}_{\Omega''} T(\Gamma). \quad (4)$$

Говорят, что отображение $T : \Omega' \rightarrow \Omega''$ является *изометрическим*, если оно сохраняет длины дуг, т.е.

$$\text{length}(\gamma) = \text{length} T(\gamma)$$

для любой локально спрямляемой дуги $\gamma \subset \Omega'$. Нетрудно видеть, что всякое изометрическое отображение T локально билипшицевой поверхности Ω' на локально билипшицеву поверхность Ω'' является конформным.

Пусть Ω – поверхность, образованная парой полуплоскостей, склеенных вдоль общего края под углом $0 < \alpha < \pi$. Развернем Ω на плоскость $\mathbb{R}^2$ посредством отображения T . Отображение T изометрично и, следовательно, конформно.

Рассмотрим общий случай локально билипшицевой поверхности (1). Переменные $x = (x_1, x_2)$ называются

изотермическими координатами на поверхности Ω , если

$$g_{11}(x) = g_{22}(x), \quad g_{12}(x) = 0 \quad \text{почти всюду в } D. \quad (5)$$

В каждой точке $x \in D$, где вектор-функция f дифференцируема и одновременно выполняются соотношения (5) и $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$, отображение $f : D \rightarrow \Omega$ сохраняет углы между кривыми и является конформным в традиционном смысле. Выполнение условия $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ в точке равносильно предположению, что в этой точке выполнено

$$\text{rank}(df) = 2. \quad (6)$$

Пусть D – односвязная область в $\mathbb{R}^2$ и Ω – поверхность, заданная над D посредством вектор-функции (1), удовлетворяющей условию (6). Пусть $x = (x_1, x_2) \in D$ – точка, где вектор-функция f имеет полный дифференциал и выполняется (6). Предположение (6) влечет, что $df \neq 0$ в этой точке, метрика ds_Ω невырождена и бесконечно малый круг в метрике ds_Ω с центром в x является бесконечно малым эллипсом в евклидовой метрике. Обозначим через $p(x) > 1$ и $0 \leq \theta(x) < \pi$ характеристики этого эллипса, т.е. отношение p большей оси эллипса к меньшей и угол θ между большей осью и направлением $\overrightarrow{Ox_1}$.

Легко видеть, что

$$p(x) = \frac{g_{11}(x) + g_{22}(x)}{2\sqrt{g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}^2(x)}} + \left(\frac{(g_{11}(x) + g_{22}(x))^2}{4(g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}^2(x))} - 1 \right)^{1/2}.$$

Характеристика θ определена в каждой точке, где $p > 1$.

Гомеоморфное отображение $u: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса $W_{loc}^{1,2}$ в области $D \subset \mathbb{R}^2$ называется квазиконформным с характеристиками М.А. Лаврентьева $(p(x), \theta(x))$, если почти всюду в D оно переводит бесконечно малые эллипсы с характеристиками $(p(x), \theta(x))$ в бесконечно малые круги [3]. Отображение $u: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется q -квазиконформным, если $\text{ess sup } p(x) < q$. Вопрос о существовании и единственности отображения u с заданными характеристиками p и θ решен при весьма общих предположениях [2. Гл. 3]. В частности, это имеет место, если величина

$$P(x) = \frac{(g_{11}(x) + g_{22}(x))}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \quad (7)$$

локально ограничена в области D .

Отображение $T = u \circ f^{-1}$ однолистно, принадлежит классу $W_{loc}^{1,2}$ и переводит поверхность Ω в некоторую область плоскости $\mathbb{R}^2$. В силу определения u оно конформно.

2. Приведенный модуль односвязной области относительно «граничной точки» на поверхности

Понятие приведенного модуля плоской односвязной области относительно внутренней точки, введенное О. Тейхмюллером [4], использовалось многими авторами для изучения свойств конформных отображений и получило разнообразные обобщения и применения [5–8]. Понятие приведенного модуля плоской области относительно граничного элемента, введенное в [1], можно распространить на случай областей на поверхности, используя развитую для этого случая в [2] теорию простых концов Каратеодори.

В дальнейшем $\Omega \in \mathbb{R}^m$ – локально билипшицева поверхность, заданная над некоторой односвязной областью $D \subset \mathbb{R}^2$ с непустой границей, $(0,0) \in D$, по-

средством вектор-функции (1). Пусть $G \subset \Omega$ – односвязная область с непустой границей. Область G с присоединенными к ней простыми концами будем обозначать через $\tilde{G}$. Предположим, что у каждого простого конца $e \in \partial \tilde{G}$ найдется главная точка y_0 , в которой поверхность Ω удовлетворяет предположению (4.4.18) [4]. Согласно теореме 4.4.1 [4] это означает, что над каждым простым концом $e \in \partial \tilde{G}$ расположен единственный простой конец поверхности Ω . Естественным образом определяются понятия простой жордановой дуги (открытой либо замкнутой) и простой жордановой кривой в $\tilde{G}$ и $\tilde{\Omega}$. В частности, множество простых концов $\partial \tilde{G}$ есть простая жорданова кривая в $\tilde{G}$. Пусть $E_1, E_2 \subset \tilde{G}$ – произвольные множества и $\gamma \subset \tilde{G}$ – простая замкнута жорданова кривая в E . Будем говорить, что γ разделяет множества E_1, E_2 в G , если для любого связного, замкнутого в $\tilde{G}$ множества K такого, что $K \cap E_i \neq \emptyset (i=1,2)$, выполнено $K \cap \gamma \neq \emptyset$. Пусть G' – подобласть области G и $e' \in \partial \tilde{G}$ – простой конец. Говорим, что подобласть G' примыкает к простому концу e' , если для любой последовательности $\{\xi_n\}$ точек G , сходящейся к e' , существует номер N такой, что при всех $n > N$ точки ξ_n принадлежат подобласти G' .

Пусть A и B – произвольные односвязные подобласти D , содержащие точку $(0,0)$. Пусть $K_1, K_2, \dots$ – последовательность континуумов, содержащих точку $(0,0)$ и содержащихся как в области, так и в области B . Предположим, что все континуумы K_n таковы, что $A_n = A \setminus K_n, B_n = B \setminus K_n$ суть двусвязные области.

Лемма 1. Если диаметры континуумов K_n стремятся к 0, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{mod}_\Omega(A_n) - \text{mod}_\Omega(B_n)). \quad (8)$$

Этот предел не зависит от выбора последовательности континуумов $\{K_n\}$, $\text{diam} K_n \rightarrow 0$. В частности, если $\Omega = \mathbb{R}^2$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{mod}(A_n) - \text{mod}(B_n)) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{R_A}{R_B} \right), \quad (9)$$

где R_A, R_B – внутренние конформные радиусы областей A, B относительно точки $(0,0)$.

Доказательство. Начнем с утверждения (9). Пусть $\tilde{x} = F_n(x)$ – однолистные конформные отображения двусвязных областей $A_n = A \setminus K_n$ на двусвязные области $\tilde{A}_n = \{\tilde{x} \in A : |\tilde{x}| > \rho_n\}$, где числа $\rho_n > 0$ определяются из соотношений

$$\text{mod}(A_n) = \text{mod}(\tilde{A}_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

При этом мы будем предполагать, что все $F_n(x)$ составляют неподвижным некоторый фиксированный простой конец e , входящий в область A . Поскольку диаметры континуумов K_n стремятся к 0, модули двусвязных областей $\text{mod}(A_n)$ и $\text{mod}(\tilde{A}_n)$ стремятся к ∞ , а числа ρ_n – к 0. Отсюда заключаем, что последова-

тельность отображений $F_1(x), F_2(x), \dots$ сходится к тождественному отображению области A на себя и притом равномерно на всяком компактном подмножестве области $A \setminus \{0\}$. Действительно, пусть $\omega = \varphi(\tilde{x})$ – однолистное конформное отображение области A на единичный круг $|\omega| < 1$ такое, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(e) = 1$. Положим $\varphi_n = \varphi \circ F_n \circ \varphi^{-1}$ и обозначим через $\psi_n(\omega)$ отображение, полученное продолжением по симметрии относительно единичной окружности отображения $\varphi_n(\omega)$. Поскольку однолистные отображения $\psi_n(\omega)$ оставляют неподвижной точку $\omega = 1$ и не принимают значений $0, \infty$, то последовательность $\psi_1(\omega), \psi_2(\omega), \dots$ представляет собой нормальное семейство. Пусть $\psi_{k_1}(\omega), \psi_{k_2}(\omega), \dots$ – произвольная ее подпоследовательность, равномерно сходящаяся внутри $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ к отображению $\varphi_0(\omega)$. Так как $|\psi_n(e^{i\theta})| = 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, а сходимость равномерна на окружности $|\omega| = 1$, то $\varphi_0(\omega) \neq \text{const}$. Поэтому отображение $\varphi_0(\omega)$ однолистно в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и в силу нормировки

$$\psi_0(1) = 1, \quad \psi_0(0) = 0, \quad \psi_0(\infty) = \infty$$

совпадает с тождественным. Отсюда заключаем, что отображения $\varphi_n(\omega)$ сходятся равномерно к тождественному внутри кольца $0 < |\omega| < 1$, а отображения $F_n(x)$ – внутри области $A \setminus \{0\}$. Зафиксируем произвольно круг $B(0, d) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < d\}$, содержащийся строго внутри каждой из областей A и B . Для достаточно больших n множества $D_n = D \setminus K_n$ суть двусвязные области, и для доказательства соотношения (9) достаточно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{mod}(A_n) - \text{mod}(D_n)) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{R_A}{R_D} \right). \quad (10)$$

Обозначим через p_n образ окружности $|x| = d$ при отображении $\tilde{x} = F_n(x)$, через $\tilde{D}_n$ – двусвязную область, заключенную между p_n и окружностью $|\tilde{x}| = \rho_n$. Заметим, что $\tilde{D}_n = F_n(D_n)$. Из равномерной сходимости отображений $F_n(x)$ к тождественному следует, что кривые p_n равномерно сходятся к окружности $|\tilde{x}| = d$. Поэтому мы можем утверждать существование последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ положительных чисел, стремящейся к 0 и такой, что каждая из областей $\tilde{D}_n$ содержится в кольце $\rho_n < |\tilde{x}| < d + \varepsilon_n$ и содержит внутри себя кольцо $\rho_n < |\tilde{x}| < d - \varepsilon_n$. Сравнивая модули этих круговых колец с модулем двусвязной области $\tilde{D}_n$, приходим к неравенству

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{d - \varepsilon_n}{\rho_n} \leq \text{mod}(\tilde{D}_n) \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{d + \varepsilon_n}{\rho_n}.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{mod}(\tilde{D}_n) + \frac{1}{2\pi} \log \rho_n) = \frac{1}{2\pi} \log d. \quad (11)$$

С другой стороны [5],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{mod}(\tilde{A}_n) + \frac{1}{2\pi} \log \rho_n) = \frac{1}{2\pi} \log R_A. \quad (12)$$

Объединяя (11), (12) и учитывая, что

$$d = R_D, \quad \text{mod}(A_n) = \text{mod}(\tilde{A}_n), \quad \text{mod}(D_n) = \text{mod}(\tilde{D}_n),$$

приходим к (9).

Доказательство первого из утверждений леммы следует из теоремы 3.7.1 [4] и доказанного выше. По поверхности Ω находим распределение характеристик $(p(x), \theta(x))$ в области D . Посредством вспомогательного квазиконформного отображения $\xi = \omega(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ вводим в Ω изотермические координаты. Тем самым находим односвязную область $\tilde{D} = \omega(D)$ и метрику

$$\lambda \xi |d\xi|^2, \quad \xi \in \tilde{D} \quad (13)$$

такие, что для произвольного семейства дуг (или кривых) Γ , лежащих в D , выполнено

$$\text{mod}_{\Omega} \Gamma = \text{mod}_{\lambda} \Gamma^*,$$

где $\Gamma^* = \omega(\Gamma)$ и $\text{mod}_{\lambda} \Gamma^*$ означает модуль Γ^* в метрике (13). Но метрика (13) конформна и потому

$$\text{mod}_{\lambda} \Gamma^* = \text{mod} \Gamma^*. \quad (14)$$

Таким образом, мы имеем

$$\text{mod}_{\Omega}(A_n) - \text{mod}_{\Omega}(B_n) = \text{mod}(\omega(A_n)) - \text{mod}(\omega(B_n)). \quad (15)$$

Проблема существования предела (8) равносильна вопросу о существовании предела в левой части соотношения (15) и сводится к уже доказанному утверждению.

Фиксируем произвольно три простых конца $e', e_0, e'' \in \tilde{D} \setminus D$, расположенных в порядке положительного обхода границы $\tilde{D} \setminus D$. Пусть $l \subset D$ – жорданова дуга, отделяющая в D конец e' от e_0 и e'' . Выберем локально липшицеву функцию $h : D \rightarrow (0, 1)$, такую что

$$\lim_{(x,y) \rightarrow e'} h(x,y) = 0, \quad h|_l = 1, \quad (16)$$

и для любого компакта $A \subset \{(x,y) \in D : 0 < h(x,y) < 1\}$ выполнено

$$\text{ess inf}_A |\nabla h(x,y)| > 0. \quad (17)$$

Обозначим через $E_h(t)$ компоненту связности множества

$$\{(x,y) \in D : h(x,y) = t\},$$

отделяющую простой конец e' от e_0 и e'' . Положим

$$\lambda_h(t) = \int_{E_h(t)} (g^{11} h_x^2 + 2g^{12} h_x h_y + g^{22} h_y^2) \frac{\sqrt{g}}{|\nabla h|} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

где $g^{ij}(i, j = 1, 2)$ – элементы обратной матрицы $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Имеет место утверждение.

Лемма 2 [2. Лемма 7.2.2.]. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ – однолистное, конформное в метрике ds_{Ω}^2 отображение. Тогда если

$$\int_0^{\lambda_h(t)} \frac{dt}{\lambda_h(t)} = \infty, \quad (18)$$

то образом простого конца e' является некоторый простой конец области $f(D)$.

Всюду ниже до конца главы мы предполагаем, что поверхность $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – локально билипшицева и задана посредством вектор-функции (1) над некоторой односвязной областью $D \subset \mathbb{R}^2$ с непустой границей. Пусть, далее, $G \subset D$ – односвязная область, $(0,0) \in G$ и Ω удовлетворяет условию (18) в каждой «граничной точке» $e \in \partial G$, а функция $\Lambda(x)/\lambda(x)$ является суммируемой по области G . Зафиксируем три различных простых конца e' , e_0 , e'' , входящих в область G и расположенных в порядке положительного обхода множества $\tilde{G} \setminus G$. Рассмотрим произвольную односвязную подобласть G' , примыкающую к простому концу e' , непримыкающую к e'' и имеющую связную границу $\partial_G G'$ относительно области G . Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ – произвольная цепь сечений, определяющая простой конец e' и являющаяся одновременно цепью сечений подобласти G' . Пусть Γ'_n – множество всех локально спрямляемых дуг $\gamma \subset G$, замыкания которых $[\gamma]_{\tilde{G}}$ представляют собой простые жордановы дуги в $\tilde{G}$, разделяющие в G сечение $[\gamma_n]_{\tilde{G}}$ замкнутую дугу $\widetilde{e_0 e''} \subset \tilde{G} \setminus G$, не содержащую на себе простого конца e' . Пусть Δ'_n – множество всех локально спрямляемых дуг $\gamma \subset G'$, замыкания которых $[\gamma]_{\tilde{G}}$ являются простыми жордановыми дугами в $\tilde{G}$ и разделяют в $\tilde{G}$ множества $[\gamma_n]_{\tilde{G}}$ и $[\partial_G G']_{\tilde{G}}$. Так как подобласть G' примыкает к простому концу e' , то для достаточно больших n множества Γ'_n и Δ'_n не пусты.

Теорема 1. Существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{mod}_{\Omega}(\Gamma'_n) - \text{mod}_{\Omega}(\Delta'_n)), \quad (19)$$

не зависящий от выбора цепи сечений $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$, определяющей простой конец e' .

Доказательство. В силу предположения (14) и гипотезы о суммируемости функции $\Lambda(x)/\lambda(x)$ по области G отображение (1) продолжимо по непрерывности до гомеоморфного отображения $\tilde{\partial}D$ на $\tilde{\partial}\Omega$. Таким образом, как и при доказательстве Леммы 1, достаточно проверить справедливость (19) лишь в случае евклидовой метрики $ds_{\Omega} = |dx|$. Пусть $w = f(x)$ – однолистное конформное отображение области G на верхнюю полуплоскость H_w^+ с граничным соответствием

$$f(e') = 0, \quad f(e_0) = \alpha, \quad f(e'') = \infty, \quad (\alpha > 0). \quad (20)$$

Так как модуль семейства кривых есть конформный инвариант, то $\text{mod}(\Gamma'_n) = \text{mod}(f(\Gamma'_n))$ и в силу принципа симметрии для модуля семейства кривых в евклидовой метрике (см. лемму 1.5.2 [2]) имеем

$$\text{mod}(\Gamma'_n) = 2 \text{mod}(f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}). \quad (21)$$

Замкнем каждую кривую семейства $\{f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}\}$, присоединив к ней ее предельные точки на горизонтальной оси $\text{Im } w = 0$. Множество всех кривых, полученных посредством такой процедуры из семейства $\{f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}\}$, будем обозначать символом $[\Gamma'_n]$. Нетрудно видеть, что модуль семейства при этом не изменится и равенство (21) остается справедливым, т.е.

$$\text{mod}(\Gamma'_n) = 2 \text{mod}[\Gamma'_n]. \quad (22)$$

Фиксируем произвольно сечение γ_n из цепи сечений, определяющей простой конец e' , и обозначим через $[\gamma_n]$ кривую, полученную из кривой $f(\gamma_n) + \overline{f(\gamma_n)}$ посредством ее замыкания. Пусть A_n – двусвязная область, заключенная между кривой $[\gamma_n]$ и лучом $L = \{w \in C_w : \text{Im } w = 0, \text{ Re } w \geq \alpha\}$. Покажем, что

$$\text{mod}([\Gamma'_n]) = \text{mod}(A_n). \quad (23)$$

Действительно, каждая кривая $\gamma \in [\Gamma'_n]$ содержится в области A_n и разделяет граничные компоненты A_n . Поэтому на основании свойства монотонности модуля имеем

$$\text{mod}([\Gamma'_n]) \leq \text{mod}(A_n). \quad (24)$$

С другой стороны, поскольку семейство $f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}$ состоит из кривых, симметричных относительно вещественной прямой, то при вычислении его модуля достаточно ограничиться допустимыми функциями $\rho(x)$, такими что $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_1 - x_2)$. Пусть $\rho(x)$ – произвольная допустимая для $f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}$ функция с указанным свойством и пусть γ – произвольная кривая, разделяющая граничные компоненты области A_n . Обозначим через γ^+ связную компоненту γ , лежащую в верхней полуплоскости H_w^+ и разделяющую в H_w^+ граничные компоненты A_n через $\gamma^- \subset \gamma$ – дугу с аналогичным свойством, лежащую в нижней полуплоскости. Так как область A_n симметрична относительно вещественной прямой, то кривые $\gamma^+ + \gamma^+$, $\gamma^- + \gamma^-$ содержатся в семействе $f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}$. Отсюда, в силу симметрии функции $\rho(x)$ получаем

$$\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq \int_{\gamma^+} + \int_{\gamma^-} = \frac{1}{2} \int_{\gamma^+ + \gamma^+} + \frac{1}{2} \int_{\gamma^- + \gamma^-} \geq 1.$$

Итак, функция $\rho(x)$ оказывается допустимой для семейства кривых, разделяющих граничные компоненты A_n . Поэтому $\text{mod}(f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}) \geq \text{mod}(A_n)$ и

$$\text{mod}([\Gamma'_n]) \geq \text{mod}(A_n). \quad (25)$$

Объединяя (24), (25), приходим к (22), откуда, учитывая равенство (23), получаем окончательно

$$\text{mod}([\Gamma'_n]) = 2 \text{mod}(A_n). \quad (26)$$

Обозначим теперь через P_n наибольшую из двусвязных областей в C_ω , симметричных относительно вещественной прямой, совпадающих в H_w^+ с областью $f(G'_n)$ и имеющих в качестве одной из граничных компонент кривую $[\gamma_n]$ – т.к. подобласть G' не примыкает к простому концу e'' и имеет связную границу $\partial_G G'$, то множество кривых $[\Delta_n]$, полученных из семейства $f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}$ посредством замыкания, состоит из тех и только тех кривых, которые содержатся в области P_n , симметричны относительно прямой $\text{Im } w = 0$ и разделяют граничные компоненты P_n . Как и выше, устанавливается, что

$$\text{mod}(\Delta'_n) = 2 \text{mod}(P_n). \quad (27)$$

Равенства (26), (27) и известная связь между приведенным модулем и внутренним радиусом плоской односвязной области (см. [5]) позволяют заключить о существовании предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{mod}(\Gamma'_n) - \text{mod}(\Delta'_n)) = \frac{1}{\pi} \log \frac{R_A}{R_p}, \quad (28)$$

где R_A – внутренний конформный радиус относительно точки $w = 0$ плоскости C_w с разрезом по лучу L ; R_p – внутренний конформный радиус области $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \cup \{0\}$. Теорема доказана.

Анализ установленных соотношений приводит к мысли о существовании определенной аналогии между пределом (19) и приведенным модулем односвязной области относительно внутренней точки. В соответствии с этим мы назовем предел (19) *приведенным модулем* подобласти G' относительно простого конца e' и области G с отмеченными простыми концами e_0, e'' . В дальнейшем будем обозначать этот предел символом $k_\Omega(G', e'/e_0, e'')$ или, в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям, символом $k_\Omega(G')$. Для $\Omega = \mathbb{R}^n$ индекс Ω в обозначениях $k_\Omega(G', e'/e_0, e'')$ и $k_\Omega(G')$ будем опускать.

Равенство (28) содержит в себе существенно больше информации, нежели это было необходимо при доказательстве теоремы. Приведем два полезных для дальнейшего следствия теоремы 1.

Пусть $G \subset G_x$ – односвязная область с непустой границей и фиксированными простыми концами e', e_0 и e'' . Пусть G' – односвязная подобласть G , примыкающая к e' и не примыкающая к e'' . Пусть $\omega = f(x)$ – однолиственное конформное отображение области G на верхнюю полуплоскость H_ω^+ с нормировкой (20). Обозначим через P наибольшую из односвязных областей в C_ω , содержащих точку $\omega = 0$, симметричных относительно вещественной прямой и совпадающих в H_ω^+ с областью $f(G')$, через R_p – ее внутренний радиус относительно точки $\omega = 0$.

Следствие 1. Справедливо равенство

$$k(G', e'/e_0, e'') = \pi^{-1} \log \frac{4\alpha}{R_p}. \quad (29)$$

Доказательство следует из (28), если заметить, что $R_A = 4\alpha$.

Нетрудно проверить, что введенная величина является конформным инвариантом. Предположим теперь, что G' и G'' – произвольные односвязные подобласти односвязной области $G \subset \Omega$, примыкающие к простым концам e' и e'' соответственно. Предположим, что подобласти G' и G'' не налегают, т.е. $G' \cap G'' = \emptyset$, и имеют связные границы $\partial_G G'$ и $\partial_G G''$. Если зафиксирован некоторый простой конец e_0 , входящий в G , то имеет смысл говорить о приведенных модулях $k_\Omega(G', e'/e_0, e'')$ и $k_\Omega(G'', e'/e_0, e'')$. Применяя известное неравенство для конформных радиусов неналегающих областей, получаем

Следствие 1. Справедливо неравенство

$$k_\Omega(G') + k_\Omega(G'') \geq \frac{1}{\pi} \log 16. \quad (30)$$

Введенная величина позволяет решить некоторые граничные задачи теории конформных отображений поверхностей, используя методы, хорошо разработанные для внутренних задач теории конформных отображений плоских областей [1, 9–11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Миклюков В.М. О некоторых граничных задачах теории конформных отображений // Сибирский математический журнал. 1977. Т. XVIII, № 5. С. 1111–1124.
2. Миклюков В.М. Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005.
3. Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.
4. Teichmüller O. Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung // Dtsch. Math. 1938. № 3. S. 621–678.
5. Митюк И.П. Обобщенный приведенный модуль и некоторые его применения // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 110–119.
6. Митюк И.П. Приведенный модуль в случае пространства // ДАН УССР. 1964. № 5. С. 563–566.
7. Левицкий Б.Е. Приведенный p -модуль и внутренний p -гармонический радиус // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316, № 4. С. 812–815.
8. Дубинин В.Н. Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 4. С. 774–792.
9. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. Томск: ТГУ, 2002.
10. Warschawski S.E. On the boundary behavior of conformal mappings // Nagoya Math. J. 1967. Vol. 30. P. 83–100.
11. Rodin B., Warschawski S.E. Estimates for conformal maps of strip domains without boundary regularity // Proc. London Math. Soc. 1979. Vol. 39. P. 356–384.

Статья поступила в редакцию журнала 4 декабря 2006 г., принята к печати 11 декабря 2006 г.