

ПРИМЕР Σ^0 -ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Г.Ч. Тюменцева

*Омский государственный университет,
кафедра математической логики и логического программирования
644077, Омск, пр. Мира, 55а¹**Получена 23 марта 2004 г.*

One example of the Σ^0 -definable structures is considered in this work. The author proves that the hereditarily finite set superstructure over an arbitrary algebraic structure $\mathfrak{A}$ is Σ^0 -definable in the hereditarily finite list superstructure $HL(\mathfrak{A})$.

Ю.Л. Ершовым разработана теория Σ -вычислимости и связанное с ней понятие Σ -определимости систем, которое позволяет транслировать классы Σ -определимых функций [4]. Отношение Σ^0 -определимости, введенное в работе [5], является одним вариантом Σ -определимости, сохраняющим классы функций, вычислимых с помощью машин. Пример, приведенный в этой работе, показывает различие между данными интерпретациями.

Напомним определение списочной надстройки, введенной в [3]. Пусть задана система $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma \rangle$.

Для множества X через $F(X)$ будем обозначать множество всех списков (конечных последовательностей) элементов X . Предположим, $L_0 = A$, $L_{n+1} = F(L_n) \cup L_n$, $HL(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. Множество $HL(A)$ называется списочным расширением множества A . Элементы множества A называются праэлементами. Расширим сигнатуру σ до сигнатуры

$$\sigma_{HL} = \sigma \cup \{nil, head^{(1)}, tail^{(1)}, cons^{(2)}\}.$$

Константа nil обозначает пустой список. Операции $head$ и $tail$ есть взятие первого элемента списка и списка оставшихся элементов. Операция $cons(\alpha, \beta)$ добавляет список β в список α в качестве последнего элемента. Сигнатурные операции и предикаты доопределяются на множество $HL(A)$ значением nil и нулем соответственно. Система $HL(\mathfrak{A}) = \langle HL(A), \sigma_{HL} \rangle$ есть списочная надстройка над системой $\mathfrak{A}$.

Понятно, что $HL(\mathfrak{A})$ содержит множество $HL(\emptyset)$ — всевозможные списки, порожденные пу-

стым списком nil . Списками из $HL(\emptyset)$ можно интерпретировать натуральные числа следующим образом: $0 = nil$, $n+1 = \langle 0, 1, \dots, n \rangle = cons(n, n)$. Множество таких списков обозначим $\mathbb{N}_{HL}$. Пусть $\sigma_{HL(\emptyset)} = \{nil, head^{(1)}, tail^{(1)}, cons^{(2)}\}$.

Напомним определение наследственно конечной надстройки. Пусть A — произвольное множество. Определим наследственно конечную надстройку над этим множеством:

$$HF_0(A) = A, \quad HF_{n+1}(A) = \mathcal{P}_\omega(HF_n(A) \cup A) \cup HF_n(A), \quad n \in \omega,$$

где $\mathcal{P}_\omega(S)$ — семейство всех конечных подмножеств множества S . Пусть

$$HF(A) = \bigcup_{n \in \omega} HF_n(A).$$

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma \rangle$ — произвольная модель сигнатуры σ . Определяем модель $HF(\mathfrak{A})$ как модель сигнатуры $\sigma_{HF} = \sigma \cup \{\emptyset, U^1, \in^2\}$ с основным множеством $HF(A)$, где $\emptyset$ есть пустое множество из $HF(A)$, U — множество праэлементов, $\in$ — естественное отношение принадлежности.

Модель $HF(\mathfrak{A})$ назовем HF -надстройкой модели $\mathfrak{A}$.

Известно, что если $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебраическая система сигнатуры σ , то система $HL(\mathfrak{A})$ Σ -определима в системе $HF(\mathfrak{A})$ и наоборот. Покажем, например, что списочная надстройка системы $\mathfrak{A}$ Σ -определима в HF -надстройке $\mathfrak{A}$, написав набор Σ -формул, определяющих первую систему во второй.

При написании формул потребуются Δ -функции $p_l(\langle x, y \rangle) = x$, $p_r(\langle x, y \rangle) = y$ и Δ -предикаты $Nat(x)$ («множество» x является натуральным числом), $card(x) = n$ (мощность «множества» x равна n), введенные в [4] и [6] соответственно.

$$\Phi_0(x) = \forall z \in x \exists v \in z \exists \omega \in z \langle v, \omega \rangle = z \& Nat(v) \&$$

¹ e-mail: mavlika@univer.omsk.su

$$\&\forall v' \leq v \text{Nat}(v') \& \exists z' \in x \exists u' \in z' \langle v', u' \rangle = z' \& \\ \& (\forall z_1 \in x \forall z_2 \in x z_1 \neq z_2 \rightarrow p_l(z_1) \neq p_l(z_2));$$

$$\Psi_1(x, y) = (x = y);$$

$$\Phi_{head}(x, y) = (x = \emptyset \& y = \emptyset) \vee (U(x) \& y = \emptyset) \vee \\ \vee (\exists z \in x z = \langle \emptyset, y \rangle);$$

$$\Phi_{tail}(x, y) = (x = \emptyset \& y = \emptyset) \vee (U(x) \& y = \emptyset) \vee \\ \vee (\forall z \in y \exists v \in z \exists \omega \in z \text{Nat}(v) \& \langle v, \omega \rangle = z \& \\ \& \exists z' \in x \exists v' \in z' \text{Nat}(v') \& \langle v', \omega \rangle = z' \& v' = v + 1 \& \\ \& \forall z \in x \exists v \in z \exists \omega \in z \text{Nat}(v) \& \langle v, \omega \rangle = z \& (v \neq \emptyset \rightarrow \\ \rightarrow \exists z' \in y \exists v' \in z' \langle v', \omega \rangle = z' \& \text{Nat}(v') \& v' + 1 = v));$$

$$\Phi_{cons}(x, y, z) = (U(x) \& z = \emptyset) \vee (\forall u \in x u \in z \& \\ \& \exists n \text{Nat}(n) \& n = \text{card}(x) \& \exists u \in z u = \langle n, y \rangle \& \\ \& \forall u \in z (u \in x \vee \exists n \text{Nat}(n) \& n = \text{card}(x) \& \\ \& u = \langle n, y \rangle));$$

$$\Phi_f(x_1, \dots, x_k, y) = (y = f(x_1, \dots, x_k));$$

$$\Phi_p(x_1, \dots, x_k) = P(x_1, \dots, x_k).$$

Покажем, что Σ^0 -определимость для этих же систем имеет место только в одну сторону.

Ниже потребуются понятия структуры и носителя списка, которые были введены в [2]. Носитель $\text{supp}(\alpha)$ списка α – это все праэлементы, из которых строится α . Структура $\text{struct}(\alpha)$ списка α – это терм сигнатуры $\sigma_{HL}(\emptyset)$, который получается заменой всех праэлементов на переменные. Функция $G : N_{HL} \times N_{HL} \rightarrow T(\sigma_{HL}(\emptyset))$ определяется индукцией по построению списка следующим образом: пусть k – номер структуры $t(x_1, \dots, x_n)$, которая рассматривается как список из $HL(X)$.

Если $j > n$, то $G(k, j) = \text{nil}$, иначе если $t = \text{nil}$, то $G(k, j) = \text{nil}$; если t – переменная, то $G(k, j) = x$; если $t = \langle t_1, \dots, t_m \rangle$, k_i – номер терма t_i , то выберем наименьшее $1 \leq i \leq m$, такое, что терм t_i зависит от переменной x_j , и положим $G(k, j) = c_j^{(m)}(G(k_i, j))$, где

$$c_j^{(m)}(x) = \text{head}(\underbrace{\text{tail}(\dots \text{tail}(x) \dots)}_{i-1})$$

– j -я компонента списка длины m .

Пусть $s_j^{(k)}(x) = G(k, j)$, $j = 1, \dots, n$ – j -я компонента носителя списка со структурой номера k .

Для любого списка α с номером структуры k , $\text{supp}(\alpha) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ имеет место

$$a_j = s_j^{(k)}(\alpha), j = 1, \dots, n.$$

Понятно, что количество переменных в терме $\text{struct}(\alpha)$ равно длине носителя α , то есть длину носителя α можно найти по $\text{struct}(\alpha)$. Занумеровав эффективно все термы сигнатуры $\sigma_{HL}(\emptyset)$, получим эффективную нумерацию всевозможных

структур списков. Таким образом, длину носителя $m(k)$ списка α можно вычислить по номеру k структуры списка.

Определим формулу

$$\text{Len}_n(\alpha) = \bigwedge_{i=1}^{n-1} (\text{tail}^i(\alpha) \neq \text{nil}) \& (\text{tail}^n(\alpha) = \text{nil}),$$

которая истинна, если длина списка α равна n .

Нам потребуется также формула

$\text{Struct}_n(\alpha) \iff \langle \alpha \rangle$ – элемент со структурой номера n , введенная в работе [2].

Теорема. Пусть $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система сигнатуры σ . Тогда $HF(\mathfrak{A}) \leq_{\Sigma^0} HL(\mathfrak{A})$, но $HL(\mathfrak{A}) \not\leq_{\Sigma^0} HF(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Код сигнатуры σ_{HF} в сигнатуре σ_{HL} имеет вид:

$$\Phi_0(x) = (x = x);$$

$$\overline{\Phi}_0(x) = \neg(x = x);$$

$$\Psi_1(x, y) = \bigvee_k (\text{Struct}_k(x) \& \text{Struct}_k(y) \&$$

$$\& \bigwedge_{i=1}^{m(k)} (s_i^k(x) = \bigvee_{j=1}^{m(k)} s_j^k(y)));$$

$$\overline{\Psi}_1(x, y) = \bigvee_k (\text{Struct}_k(x) \& \text{Struct}_k(y) \&$$

$$\& \bigvee_{i=1}^{m(k)} (s_i^k(x) \neq \bigwedge_{j=1}^{m(k)} s_j^k(y))) \vee$$

$$\vee \bigvee_{m \neq k} (\text{Struct}_m(x) \& \text{Struct}_k(y));$$

$$\Phi_\epsilon(x, y) = \bigvee_{m \neq k} (\text{Struct}_m(x) \& \text{Struct}_k(y) \&$$

$$\& \bigvee_{l \in \omega} (\text{Len}_l(y) \& \bigvee_{i=1}^l \Psi_1(x, c_i^l(y))));$$

$$\overline{\Phi}_\epsilon(x, y) = \bigvee_{m \neq k} (\text{Struct}_m(x) \& \text{Struct}_k(y) \&$$

$$\& \bigvee_{l \in \omega} (\text{Len}_l(y) \& \bigwedge_{i=1}^l \overline{\Psi}_1(x, c_i^l(y)))) \vee$$

$$\vee \bigvee_m (\text{Struct}_m(x) \& \text{Struct}_m(y));$$

$$\Phi_p(x_1, \dots, x_k) = P(x_1, \dots, x_k);$$

$$\overline{\Phi}_p(x_1, \dots, x_k) = \neg P(x_1, \dots, x_k);$$

$$\Phi_f(x_1, \dots, x_k, y) = (y = f(x_1, \dots, x_k));$$

$$\overline{\Phi}_f(x_1, \dots, x_k, y) = \neg(y = f(x_1, \dots, x_k)).$$

Константе $\emptyset$ соответствует константа nil .

Остальные константы соответствуют самим себе.

Покажем, что введенное отношение E , определяемое формулой Ψ_1 , является строгой конгруэнцией. Очевидно, что E – отношение эквивалентности. Покажем, что E – конгруэнция, то есть

$$E(x_i, y_i) = 1 \Rightarrow E(f(x_1, \dots, x_k), f(y_1, \dots, y_k)) = 1,$$

где $i = \overline{1, k}$.

Возможны два случая:

1. Пусть $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ – праэлементы. Из истинности формулы $\Psi_1(x_i, y_i)$ следует, что $x_i = y_i$, $i = \overline{1, k}$. Тогда $f(x_1, \dots, x_k) =$

$= f(y_1, \dots, y_k)$. Отсюда получаем

$$HL(\mathfrak{A}) \models \Psi_1(f(x_1, \dots, x_k), f(y_1, \dots, y_k)).$$

2. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k$ не праэлементы. Тогда $f(x_1, \dots, x_k) = \emptyset$, $f(y_1, \dots, y_k) = \emptyset$ и

$$HL(\mathfrak{A}) \models \Psi_1(f(x_1, \dots, x_k), f(y_1, \dots, y_k)).$$

Покажем, что отношение E строгой конгруэнции, то есть если $E(x_i, y_i) = 1$, $i = \overline{1, k}$, то для любого $P \in \sigma_{HL}$

$$P(x_1, \dots, x_k) \iff P(y_1, \dots, y_k). \quad (*)$$

Рассмотрим два случая:

1. Если $P \in \sigma$, то требуемое свойство выполняется.

2. Пусть $P_{\in}$ — это отношение принадлежности и пусть $E(x_i, y_i) = 1$, $i = \overline{1, 2}$. Можем записать, $HL(\mathfrak{A}) \models \bigwedge_{i=1}^2 \Psi_1(x_i, y_i)$. Покажем, что для предиката $P_{\in}$ выполняется свойство (*). Пусть $P_{\in}(x_1, x_2) = 1$ или $HL(\mathfrak{A}) \models \Phi_{\in}(x_1, x_2)$. Это означает, что x_1 и x_2 — списки с разными структурами и

$$HL(\mathfrak{A}) \models \bigvee_{l \in \omega} (Len_l(x_2) \& \bigvee_{i=1}^l \Psi_1(x_1, c_i^l(x_2))).$$

Тогда $\Psi_1(x_1, c_{i_0}^l(x_2)) = 1$ для некоторого $i_0 = \overline{1, l}$. Понятно, если $\Psi_1(x_1, y_1) = 1$, то

$$\forall i \exists k \Psi_1(c_i^l(x_1), c_k^l(y_1)) = 1, \quad (**)$$

где l — длина списков x_1 и y_1 . Так как $\Psi_1(x_2, y_2) = 1$, то, согласно (**), для любого i и, в частности, для i_0 найдется k_0 , такое, что: $\Psi_1(c_{i_0}^l(x_2), c_{k_0}^l(y_2)) = 1$. В силу транзитивности получаем, что $\Psi_1(y_1, c_{k_0}^l(y_2)) = 1$. Из истинности $\Psi_1(x_2, y_2) = 1$ следует, что длины x_2 и y_2 совпадают. Значит, справедливо

$$HL(\mathfrak{A}) \models \bigvee_{l \in \omega} (Len_l(y_2) \& \bigvee_{i=1}^l \Psi_1(y_1, c_i^l(y_2))).$$

Из того, что x_1 и x_2 — списки с разными структурами, следует, что y_1 и y_2 также имеют разные структуры, причем номер структуры списка x_1 совпадает с номером структуры списка y_1 , а номер структуры списка x_2 с номером структуры списка y_2 . Таким образом, получаем $HL(\mathfrak{A}) \models \Phi_{\in}(y_1, y_2)$. В обратную сторону рассуждения аналогичные.

Изоморфизмом между системами $HF(\mathfrak{A})$ и $HL(\mathfrak{A})$ будет отображение, сопоставляющее множеству класс списков, состоящих из его элементов.

Покажем теперь, что $HL(\mathfrak{A}) \not\leq_{\Sigma^0} HF(\mathfrak{A})$. Предположим противное, пусть

$$HL(\mathfrak{A}) \leq_{\Sigma^0} HF(\mathfrak{A}).$$

Попробуем получить противоречие, пользуясь тем, что в $HF(\mathfrak{A})$ нет функций. Из построения кода следует, что для любой операции из σ_{HL} существует пара формул Φ_f и $\overline{\Phi}_f$, причем формула Φ_f функциональная. Возьмем списочную операцию $head$. Тогда $\Phi_{head}(x, y) = \bigvee_i \varphi_i(x) \& y = t_i(x)$.

Пусть x, y — последовательности из $HF(A)$, соответствующие спискам $\langle \langle nil \rangle \rangle$, $\langle nil \rangle$. Выберем $i_0 \in I : HF(\mathfrak{A}) \models \varphi_{i_0} \& y = t_{i_0}(x)$. Рассмотрим три случая:

- 1) $t_{i_0} = f(t_1, \dots, t_n)$, $f \in \sigma$. Тогда $t_{i_0} = \emptyset$. Получили противоречие, так как $y \neq \emptyset$;
- 2) $t_{i_0} = c$, $c \in \sigma_{HF}$. Противоречие, так как $c \neq y$;
- 3) $t_{i_0} = x$. Получаем противоречие, так как $x \neq y$.

Таким образом, $HL(\mathfrak{A}) \not\leq_{\Sigma^0} HF(\mathfrak{A})$.

-
- [1] Ашаев И.В., Беляев В.Я., Мясников А.Г. Подходы к теории обобщенной вычислимости // Алгебра и логика. 32. № 4(1993). С. 349–386.
 - [2] Ашаев И.В. Теорема о разложении в обобщенной вычислимости: Препринт № 96-01. Омск: ОмГУ, 1996. 24 с.
 - [3] Гончаров С.С., Свириденко Д.И. Логико-математические проблемы МОЗ // Вычислительные системы. Новосибирск, 1985. Вып. 107. С. 3–29.
 - [4] Ершов Ю.Л. Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
 - [5] Мавликасова Г.Ч. Σ^0 -определимость кольца многочленов $\mathfrak{F}[x]$ в $HL(\mathfrak{F})$ // Вестн. Ом. ун-та. 2004. № 1. С. 28–30.
 - [6] Пузаренко В.Г. Об алгоритмических и структурных свойствах вычислимости над моделями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук // Новосибирский Государственный университет, 2000. 105 с.