

9. Полат Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования. – М., 2000.

10. Полат Е.С. Типология телекоммуникационных проектов // Наука и школа. – 1997. – № 4.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

© Толстошеин А.О.*

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

В данной статье рассматривается понятие комплексных чисел, их применение в электротехнике и механике. Рассмотрена теоретическая часть, приведен и разобран пример.

Ключевые слова: комплексные числа, применение, электротехника, закон Ома, закон Кирхгофа, механика.

Во время прохождения курса высшей математики мы часто сталкиваемся с таким понятием как комплексные числа. Но что же это такое и где они применяются? В данной статье попробуем найти ответ на этот вопрос.

В давние времена ученые столкнулись с такой вещью как мнимая единица $i = \sqrt{-1}$, это случилось когда стало недоставать действительного числа, при решении, казалось бы, простого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, где «р» и «q» являются числами действительными. На первый взгляд это уравнение довольно таки простое, но при его решении, т.е. вычислении его корней по всем известным в те времена формулам, ученые до века XVI сталкивались с проблемой отрицательного корня. При всем этом, не кому не удавалось объяснить есть ли смысл придавать значение данному выражению, и поэтому решили, что корень из числа отрицательного смысла не имеет. И по сей день при прохождении школьной программы, которая не дает представление о комплексных числах, принято говорить, что при отрицательном корне, решением является ни положительное, ни отрицательное числа и даже ни ноль.

Но вскоре, уже при решении кубического уравнения отказываться от отрицательного значения корня было нельзя. Более 400 лет тому назад несколько итальянских математиков все таки нашли способ как можно решить уравнения третьей степени. Одним из тех математиков был Джироламо Кардано, в его честь и назван этот способ, изложил способ в 1543 году в своем учебнике. Этот способ сводится к тому, что корни уравнения $x^3 + px + q = 0$

* Кафедра Электроэнергетики и электротехники. Научный руководитель: Дмух Г.Ю., доцент кафедры Алгебры, геометрии и анализа, к.п.н.

могут быть вычислены по формуле, так же названной в его честь *формулой Кардано*:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{D}},$$

$$\text{где } D = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{P}{2}\right)^3.$$

Все было довольно просто, если бы не одно «но», а именно, что при наличии в решении трех различных действительных корней формула не может дать желаемого результата. Это можно доказать на простом примере: корнями уравнения $x^3 - x = 0$ являются числа 0, 1, -1, но если попытаться решить данное уравнение вышеизложенным методом, то мы получим следующую:

шее: $x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}$, но же нужно сделать, чтобы извлечь из этого выражения три необходимых нам корня?

После этого математики взялись за данную проблему и приступили к изучению так называемых мнимых чисел. После их изучения было обнаружен весьма приятный факт: многие сложные задачи математик решаются в разы проще, если при их решении применять мнимые числа. Впоследствии К.Ф.Гаусс внес предложение называть мнимые числа комплексными, что впоследствии стало привычным делом.

Даже Ф. Энгельс говорил: «И все же $\sqrt{-1}$ является во многих случаях необходимым результатом правильных математических операций, более того, что было бы с математикой, как низшей, так и высшей, если бы ей было запрещено оперировать с $\sqrt{-1}$ ».

Теперь, когда мы знаем что такое комплексные числа, мы можем разобрат их применение в различных дисциплинах.

Начнем с того как применяются комплексные числа в электротехнике.

Описание электромагнитных процессов в цепях переменного тока сводится к решению множества интегралов, а решение их становится столь сложным, что взять их не под силу даже опытным математикам. При расчете простых цепей, которые содержат достаточно небольшое число источников, контуров, индуктивных связей, чаще всего используется тригонометрический метод решения, но с усложнением электрической цепи данная форма расчета является весьма сложной для нахождения результата. В этой ситуации на помощь приходят комплексные числа.

Комплексное число – это число вида $\hat{Z} = x + iy$, где x, y – действительные числа, i – мнимая единица. Изображается на комплексной плоскости точкой, где ось абсцисс – действительная, ось ординат – мнимая.

Комплексные числа могут быть записаны в двух формах: алгебраической и показательной – $\dot{Z} = x + jy$ и $\dot{Z} = ze^{j\varphi}$ соответственно. Для перехода из одной формы в другую пользуются формулами: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, где z – модуль комплексного числа, φ – аргумент.

Рассмотрим на примере применение комплексного метода в электротехнике. Для этого решим задачу по нахождению тока, в цепи с последовательным соединением, в общем виде.

Последовательное соединение элементов R, L, C .

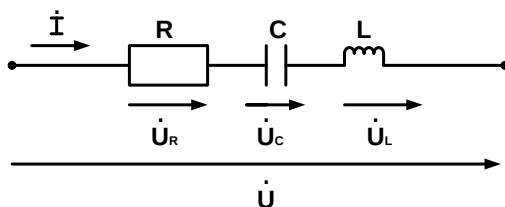


Рис. 1. Схема последовательного соединения элементов электрической цепи

В данной ситуации заданными для нас параметрами являются R, L, C и синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ на цепи, искомой величиной является ток $i = I_m \sin(\omega t + \varphi - \psi)$.

Пусть наше синусоидальное напряжение символизируется комплексной функцией $\dot{U}e^{j\omega t}$, а синусоидальный ток, который нам необходимо найти, комплексной функцией $\dot{I}e^{j\omega t}$; комплексные амплитуды напряжения и тока равны, соответственно $\dot{U} = U_m e^{j\varphi}$, $\dot{I} = I_m e^{j(\varphi - \psi)}$. Записав уравнение Кирхгофа для нашей цепи, мы получим: $u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$.

Сложение, дифференцирование и интегрирование функций в уравнении заменяются теми же математическими операциями над мнимыми частями комплексных функций:

$$\operatorname{Im}(U_m e^{j\omega t}) = R \operatorname{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) + L \frac{d}{dt} \operatorname{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) + \frac{1}{C} \int (\dot{I}_m e^{j\omega t}) dt.$$

Операции над мнимыми частями комплексных функций могут быть заменены операциями над самими комплексными функциями с последующим выделением мнимой части полученного результата. Тогда, исходя из этого, мы получим:

$$\operatorname{Im}(U_m e^{j\omega t}) = \operatorname{Im} \left(R \dot{I}_m e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt} \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{C} \int \dot{I}_m e^{j\omega t} dt \right).$$

Полученное уравнение удовлетворяется для любого момента времени. Отсюда, произведя дифференцирование и интегрирование получим:

$$U_m = RI_m + j\omega LI_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m.$$

Вынесем ток $\dot{I}$ за скобки и введем условное обозначение полного комплексного сопротивления цепи:

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

и получим выражение:

$$U_m = Z\dot{I}_m,$$

которое излагает закон Ома для комплексных амплитуд.

Разделив обе части на этого уравнения $\sqrt{2}$, мы получим закон Ома для комплексных действующих значений: $\dot{U} = Z\dot{I}$. Из этого выражения следует, что значение комплексного сопротивления есть $Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$.

Запишем комплексное сопротивление Z в тригонометрической и показательной формах: $Z = z \cos\varphi + jz \sin\varphi$ и $Z = ze^{j\varphi}$ соответственно, где z – модуль комплексного числа Z – представляет собой полное сопротивление цепи, а φ – аргумент комплексного числа Z . Найдем z и φ по формулам: $z = \sqrt{R^2 + X^2}$ и $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$.

На основании закона Ома для комплексных амплитуд комплексная амплитуда тока:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z} = \frac{\dot{U}_m}{Z} e^{j(\varphi - \psi)}$$

где $\varphi - \psi$ – начальная фаза тока.

Из этого следует, что искомый ток будет иметь вид:

$$i = \text{Im}\left(\dot{I}_m e^{j\omega t}\right) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \varphi - \psi).$$

Вот мы и рассмотрели один из способов применения комплексных чисел. Но так же они применяются не только в электротехнике.

Разберем применение комплексных чисел в механике. Для этого решим задачу, в которой нужно найти величину и направление результирующей силы.

Условие: Сила A , $f_a = 15 \angle 45^\circ$, сила B , $f_b = 10 \angle 60^\circ$, сила C , $f_c = 15 \angle 120^\circ$.

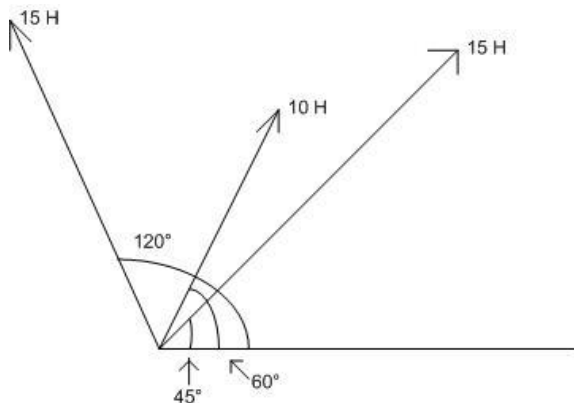


Рис. 2. Направление векторов сил

Для начала найдем величину результирующей силы с помощью комплексного метода:

$f_a + f_b + f_c = 15 \angle 45^\circ + 10 \angle 60^\circ + 15 \angle 120^\circ$ – это одна из форм записи комплексных чисел.

Отсюда результирующая сила равна:

$$15(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) + 10(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) + 15(\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = (10.606 + j10.606) + (5 + j8.66) + (-7.5 + j12.99) = 8.106 + j32.256$$

Величина результирующей силы есть $\sqrt{(8,106)^2 + (32,256)^2} = 33,26 \text{ Н}$.

Направление результирующей силы будет $\arctg\left(\frac{32,256}{8,106}\right) = 75,9^\circ$.

Таким образом, на простейшем примере, мы увидели, как помогают комплексные числа при решении задач в механике.

В заключение хотелось бы сказать, что комплексные числа в настоящее время используют для решения задач, связанных с самолетостроением и аэромеханикой, а также используются для расчета различных конструкций на прочность. Это говорит о том, что актуальность их с каждым годом возрастает. Также, с помощью комплексных чисел можно решать на первый взгляд нерешаемые задачи, что мы и рассмотрели в ходе работы.

Список литературы:

1. Атабеков Г.И. Линейные электрические цепи [Текст] / М-во высш. образования СССР. Моск. ордена Ленина авиац. ин-т им. Серго Орджоникидзе. – М.: Оборонгиз, 1957. – С. 80-84: черт.; 23 см. – 20000 экз.

2. Балк М.Б., Балк Г.Д., Полухин А.А. «Реальные применения мнимых чисел». – Изд. «Радянська школа», 1988. – С. 5-16.

3. Берд Дж. Инженерная математика. Карманный справочник. – М.: Додэка-XXI, 2008. – С. 266-269.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

© Чернолих А.Р.*

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

В данной статье рассматриваются гиперболические функции, их некоторые свойства, приведены примеры вычисления и разложения в ряд, решения уравнений, содержащих гиперболические функции.

Ключевые слова: гиперболические функции, гиперболические тождества, графики гиперболических функций, уравнения, содержащие гиперболические функции.

Функции, связанные с коническими сечениями – гиперболами, называются гиперболическими функциями. Область применения гиперболических функций включает теорию линий передач и цепных подвесок [1, с. 76].

По определению:

Гиперболический синус x :

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Гиперболический косинус x :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Гиперболический тангенс x :

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Гиперболический косеканс x :

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Гиперболический секанс x :

* Кафедра Электроэнергетики и электротехники. Научный руководитель: Дмух Г.Ю., доцент кафедры Алгебры, геометрии и анализа, к.п.н.