4. Зеленов Л.А. Диалектический метод // Философия и общество. 2007. № 1(45). С. 5-14.
5. Петина Н. Процессный подход: инструкция по применению. [Электронный ресурс]. Дата обновления: 27.09.2016. URL: http://www.rusconsult.ru/common/stati-nashih-ekspertov/stati-nashih-ekspertov_66.html (дата обращения: 27.09.2016).
6. Сахаров Д. Е. Принцип самоорганизации как основа построения «идеальной» системы управления // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2011. № 8. С. 60-63.
7. Федотов В.Х. О целесообразном поведении в искусственных системах // Вестник Чувашского университета. 2009. № 1. С. 10-17.
8. Эскиндаров М. А. Экономическая политика россии в условиях глобальной турбулентности // Вестник Финансового университета. 2014. № 6. С. 6-9.

Гильманова Г.Р.
студент 3 курса, очное отделение
факультет «Математики и естественных наук»
Елабужский институт
Казанский федеральный университет
Россия, г. Елабуга

ПРИЛОЖЕНИЕ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Статья посвящена приложению двойных интегралов. В статье рассматриваются их геометрические и физические приложения. Представлены формулы для решения двойных интегралов с разными способами, а также решены некоторые задачи.

Ключевые слова: Двойные интегралы, Геометрические приложения, Физические приложения, Площадь, Объем.

Gilmanova G.R.
Student
Elabuga Institute of Kazan Federal Institute
Russia, Elabuga
3 course, full-time office
faculty of Mathematics and natural Sciences

APPLICATION OF DOUBLE INTEGRALS

The article is devoted to application of double integrals. The article discusses their geometric and physical applications. Presents formulas for the solution of double integrals with different methods and also solved some tasks.

Keywords: Double integrals, Geometrical applications, Physical applications, Area, Volume.

Геометрические приложения двойных интегралов

Площадь плоской фигуры

Если f (x,y) = 1 в интеграле $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$, то двойной интеграл равен площади области интегрирования R.

Площадь области типа I (элементарной относительно оси Oy) (рисунок 1) выражается через повторный интеграл в виде

$$A = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{f(x)} dydx.$$

Аналогично, площадь области типа II (элементарной относительно оси Ox) (рисунок 2) описывается формулой

$$A = \int\limits_c^d \int\limits_{p(y)}^{q(y)} dxdy.$$

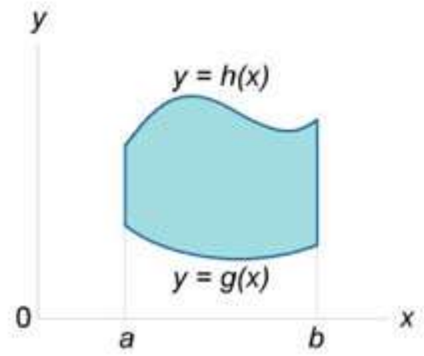

Рис.1

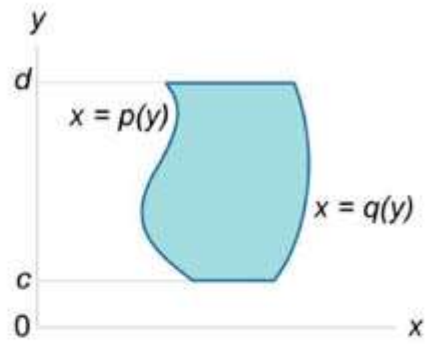

Рис.2

Объем тела

Если f (x,y) > 0 в области интегрирования R, то объем цилиндрического тела с основанием R, ограниченного сверху поверхностью z = f (x,y), выражается формулой

$$V = \iint\limits_R f(x,y)dA.$$

В случае, когда R является областью типа I, ограниченной линиями $x = a,\ x = b,\ y = h(x),\ y = g(x)$, объем тела равен

$$V = \iint\limits_R f(x,y)dA = \int\limits_a^b \int\limits_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dydx.$$

Для области R типа II, ограниченной графиками функций $y = c,\ y = d,\ x = q(y),\ x = p(y)$, объем соответственно равен

$$V = \iint\limits_R f(x,y)dA = \int\limits_c^d \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dxdy.$$

Если в области R выполняется неравенство $f(x,y) \ge g(x,y)$, то объем цилиндрического тела между поверхностями z1 = f (x,y) и z2 = g (x,y) с основанием R равен

$$V = \iint_R \left[f(x,y) - g(x,y) \right] dA.$$

<u>Площадь поверхности</u>

Предположим, что поверхность задана функцией z = f (x,y), имеющей область определения R. Тогда площадь такой поверхности над областью z определяется формулой

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}\, dxdy$$

при условии, что частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны всюду в области R.

<u>Площадь и объем в полярных координатах</u>

Пусть S является областью, ограниченной линиями $\theta = \alpha,\ \theta = \beta,\ r = h(\theta),\ r = g(\theta)$ (рисунок 3). Тогда площадь этой области определяется формулой

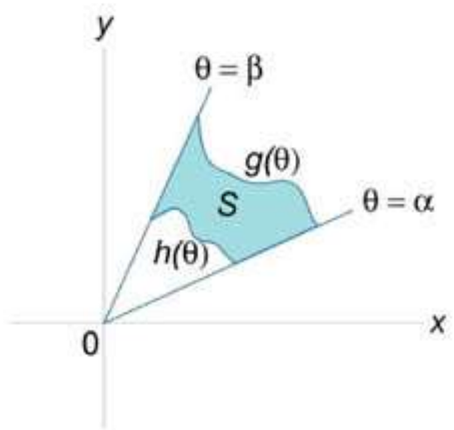

Рис. 3

$$A = \iint_S dA = \int_\alpha^\beta \int_{h(\theta)}^{g(\theta)} r dr d\theta.$$

Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(r,\theta)$ с основанием S, выражается в полярных координатах в виде

$$V = \iint_S f(r,\theta) r dr d\theta.$$

Пример

Вычислить площадь области R, ограниченной линиями $y^2 = a^2 - ax,\ y = a + x$.

Решение.

Сначала определим точки пересечения двух заданных линий.

$$\begin{cases} y^2 = a^2 - ax \\ y = a + x \end{cases},$$

$$(a+x)^2 = a^2 - ax,$$

$$a^2 + 2ax + x^2 = a^2 - ax,$$

$$x^2 + 3ax = 0,$$

$$x(x+3a) = 0,$$

$$x_{1,2} = 0,\ -3a.$$

Следовательно, координаты точек пересечения равны

$$x_1 = 0,\quad y_1 = a + 0 = a,$$

$$x_2 = -3a,\ y_2 = a - 3a = -2a.$$

Область R представлена на рисунке 5 выше. Будем рассматривать ее как область типа II. Для вычисления площади преобразуем уравнения границ:

$$y^2 = a^2 - ax \ \Rightarrow\ ax = a^2 - y^2 \quad \text{или} \quad x = a - \frac{y^2}{a},$$

$$y = a + x \quad \Rightarrow\ x = y - a.$$

Получаем

$$A = \iint\limits_R dxdy = \int\limits_{-2a}^{a}\left[\int\limits_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}} dx\right]dy = \int\limits_{-2a}^{a}\left[x\Big|_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}}\right]dy = \int\limits_{-2a}^{a}\left[a - \frac{y^2}{a} - (y-a)\right]dy = \int\limits_{-2a}^{a}\left(2a - \frac{y^2}{a} - y\right)dy =$$

$$= \left[2ay - \frac{y^3}{3a} - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{-2a}^{a} = \left(2a^2 - \frac{a^3}{3a} - \frac{a^2}{2}\right) - \left(-4a^2 + \frac{8a^3}{3a} - \frac{4a^2}{2}\right) = \frac{9a^2}{2}.$$

Физические приложения двойных интегралов

Масса и статические моменты пластины

Предположим, что плоская пластина изготовлена из неоднородного материала и занимает область R в плоскости Oxy. Пусть плотность пластины в точке (x, y) в области R равна $\rho(x,y)$. Тогда масса пластины выражается через двойной интеграл в виде

$$m = \iint\limits_R \rho(x,y)\,dA.$$

Статический момент пластины относительно оси Ox определяется формулой

$$M_x = \iint\limits_R y\rho(x,y)\,dA$$

Аналогично находится статический момент пластины относительно оси Oy :

$$M_y = \iint_R x\rho(x,y)\,dA.$$

Координаты центра масс пластины, занимающей область R в плоскости Oxy с плотностью, распределенной по закону $\rho(x,y)$, описываются формулами

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_R x\rho(x,y)\,dA = \frac{\iint_R x\rho(x,y)\,dA}{\iint_R \rho(x,y)\,dA},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_R y\rho(x,y)\,dA = \frac{\iint_R y\rho(x,y)\,dA}{\iint_R \rho(x,y)\,dA}.$$

Для однородной пластины с плотностью $\rho(x,y)=1$ для всех (x, y) в области R центр масс определяется только формой области и называется центроидом.

<u>Моменты инерции пластины</u>

Момент инерции пластины относительно оси Ox выражается формулой

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x,y)\,dA$$

Аналогично вычисляется момент инерции пластины относительно оси Oy :

$$I_y = \iint_R x^2\rho(x,y)\,dA.$$

Полярный момент инерции пластины равен

$$I_0 = \iint_R \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)\,dA.$$

Заряд пластины

Предположим, что электрический заряд распределен по области R в плоскости Oxy и его плотность распределения задана функцией $\sigma(x,y)$. Тогда полный заряд пластины Q определяется выражением

$$Q = \iint_R \sigma(x,y)\,dA.$$

<u>Среднее значение функции</u>

Приведем также формулу для расчета среднего значения некоторой распределенной величины. Пусть f (x,y) является непрерывной функцией в замкнутой области R в плоскости Oxy. Среднее значение функции μ функции f (x,y) в области R определяется формулой

$$\mu = \frac{1}{S}\iint_R f(x,y)\,dA,$$

где $S = \iint_R dA$ – площадь области интегрирования R.

Пример

Вычислить моменты инерции треугольника, ограниченного прямыми $x+y=1,\ x=0,\ y=0$ (рисунок 2) и имеющего плотность $\rho(x,y)=xy$.

Решение.

Найдем момент инерции пластины относительно оси Ox.

$$I_x=\iint_R y^2\rho(x,y)\,dxdy=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}y^2xy\,dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}y^3dy\right]xdx=\int_0^1\left[\left(\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{1-x}\right]xdx=\frac{1}{4}\int_0^1(1-x)^4\,xdx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(1-4x+6x^2-4x^3+x^4\right)xdx=\frac{1}{4}\int_0^1\left(x-4x^2+6x^3-4x^4+x^5\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+\frac{6x^4}{4}-\frac{4x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{49}{120}.$$

Аналогично вычислим момент инерции относительно оси Oy.

$$I_y=\iint_R x^2\rho(x,y)\,dxdy=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}x^2xy\,dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}y\,dy\right]x^3dx=\int_0^1\left[\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}\right]x^3dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2\,x^3dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-2x+x^2\right)x^3dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^3-2x^4+x^5\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{120}.$$

Использованные источники:

1. Фихтенгольц Г.М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления» (II том) – Москва, 2013.
2. Пискунов Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления» (I том) - Москва, 2015.
3. Эрмит Ш. «Курс анализа» - Москва, 2014

Грязнова Е.Р., к.с.н.

доцент

Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина

Россия, г. Саратов

МАРКЕТИНГ ПЕРСОНАЛА В РЕШЕНИИ АКТУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ КАДРОВОГО МЕНЕДЖМЕНТА

Краткая аннотация: *Статья посвящена маркетингу персонала как современному направлению повышения эффективности кадрового менеджмента предприятий. Рассмотрены подходы к определению маркетинга персонала и принципам его реализации.*

Ключевые слова: *человеческие ресурсы, маркетинг персонала, базовые и частные принципы маркетинга персонала.*