ПРИБЛИЖЕНИЕ КРИВЫХ ЛОМАНЫМИ

М. Ш. Шабозов[1], *А. А. Шабозова*[2]

1. Институт математики АН Республики Таджикистан,
д-р физ.-мат. наук, профессор, shabozov@mail.ru

2. Таджикский национальный университет,
аспирант, adolat@mail.ru

1. В работе рассматривается вопрос о точной оценке погрешности приближения гладких кривых Г, заданных параметрическими уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots, \quad x_m = \varphi_m(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant L, \tag{1}$$

в пространстве R^m вписанными в них ломаными, в случаях, когда функции $\varphi_i(t),\ i = \overline{1,m}$, являются непрерывными и дифференцируемыми на отрезке $[0, L]$. Для параметрически заданных кривых экстремальные задачи аппроксимационного характера исследованы значительно меньше, чем для явно задаваемых функций. Некоторые вопросы, связанные с приближением параметрически заданных кривых вписанными в них ломаными и сплайн-кривыми, рассматривались в работах [1–9] и монографиях [10], [11].

Обозначим через $H^\omega[0, L]$ множество функций $f(t) \in C[0, L]$ для любых двух точек $t', t'' \in [0, L]$, удовлетворяющих условию

$$|f(t') - f(t'')| \leqslant \omega(|t' - t''|),$$

где $\omega(t)$ — заданный на отрезке $[0, L]$ модуль непрерывности, т. е. непрерывная, неубывающая и полуаддитивная на $[0, L]$ функция, в нуле равная нулю. Аналогичным образом через $W^{(1)}H^\omega[0, L]$ обозначим класс функций $f(t) \in C^{(1)}[0, L]$, у которых $f'(t) \in H^\omega[0, L]$.

Известно [12, с. 276–279], что интерполяционные ломаные в ряде случаев представляют собой наилучший аппарат приближения. Точные оценки приближения функций $f \in H^\omega[a, b]$ и $f \in W^{(1)}H^\omega[a, b]$ интерполяционными ломаными были найдены еще в 1966 г. В. Н. Малоземовым [13]. Для классов функций двух переменных, задаваемых модулями непрерывности в прямоугольных областях, точные оценки погрешности одновременного приближения функций и их частных производных билинейными сплайнами и их соответствующими производными найдены в работах [14–17]. Отметим также работу [18], где решена более общая задача отыскания верхних граней наилучших приближений классов $H^\omega[a, b]$ и $W^{(1)}H^\omega[a, b]$ интерполяционными ломаными.

2. Всюду далее через $\bar{H}^{\omega_1, \cdots, \omega_m} = \bar{H}^{\omega_1, \cdots, \omega_m}[0, L]$ обозначим класс кривых Г, определенных параметрическими уравнениями (1), и таких, у которых $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$, а через $W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1, \ldots, \omega_m} := W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1, \ldots, \omega_m}[0, L]$ — класс гладких параметрически заданных кривых (1), у которых $\varphi_i(t) \in W^{(1)}H^{\omega_i}[0, L]$. В случае $\omega_i(t) = \omega(t), i = \overline{1,m}$, соответствующие классы функций обозначим через $\bar{H}^\omega_m$ и $W^{(1)}\bar{H}^\omega_m$.

© М. Ш. Шабозов, А. А. Шабозова, 2013

Рассмотрим вопрос о точной оценке величины погрешности, возникающей при приближении кривых, принадлежащих классу $\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$, вписанными в них ломаными. Если $\rho(P,Q)$ — некоторое расстояние между точками $P,Q\in R^m$, то расстояние между кривыми

$$\Gamma : x_i = \varphi_i(t),\ i = \overline{1,m}, \quad \text{и} \quad G : y_i = \psi_i(t),\ i = \overline{1,m},\ 0 \leqslant t \leqslant L, \tag{2}$$

определим следующим образом:

$$\rho(\Gamma, G) = \sup_{0\leqslant t\leqslant L} \left\{\rho\left(P(t), Q(t)\right) : P(t) \in \Gamma,\ Q(t) \in G\right\}, \tag{3}$$

где $P(t) := P(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_m(t)),\ Q(t) := Q(\psi_1(t), \cdots, \psi_m(t))$ соответствуют одному и тому же значению параметра t $(0 \leqslant t \leqslant L)$. С геометрической точки зрения расстояние (3) не всегда точно характеризует внутреннюю структуру кривых, поскольку оно в общем зависит от способа параметризации и не всегда полностью отражает степень геометрической близости кривых. Поэтому вводят в рассмотрение хаусдорфово расстояние [10], которое свободно от этого недостатка. Если

$$\rho_1(P(t), Q(t)) = \left\{\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^2\right\}^{1/2} \tag{4}$$

— евклидово расстояние между точками $P, Q \in R^m$, то под хаусдорфовым расстоянием между двумя замкнутыми множествами $A \subset R^m$ и $B \subset R^m$ понимают величину (см., напр. [10, с. 20–21])

$$\rho_{H,1}(A, B) = \max\left\{\sup_{P\in A} \inf_{Q\in B} \rho_1(P, Q), \sup_{P\in B} \inf_{Q\in A} \rho_1(P, Q)\right\}. \tag{5}$$

Из определений (4) и (5) следует, что для кривых Γ и G, определенных равенствами (2), при любом способе параметризации выполняется неравенство

$$\rho_{H,1}(\Gamma, G) \leqslant \rho_1(\Gamma, G).$$

В некоторых вопросах приближения кривых, наряду с евклидовым и хаусдорфовым расстоянием, рассматривают также расстояние Минковского, определяемое для кривых $\Gamma, G \in R^m$ равенством

$$\rho_2(\Gamma, G) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sup_{0\leqslant t\leqslant L} \left\{|\varphi_i(t) - \psi_i(t)| : \varphi_i \in \Gamma, \psi_i \in G\right\}, \tag{6}$$

и хеммингово расстояние

$$\rho_3(\Gamma, G) = \sup_{0\leqslant t\leqslant L} \left\{\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|,\ \varphi_i \in \Gamma, \psi_i \in G\right\}. \tag{7}$$

Для введенных расстояний (6) и (7), аналогично (5), вводим следующие расстояния Хаусдорфа:

$$\rho_{H,2}(A, B) = \max\left\{\sup_{P\in A} \inf_{Q\in B} \rho_2(P, Q), \sup_{P\in B} \inf_{Q\in A} \rho_2(P, Q)\right\}, \tag{8}$$

$$\rho_{H,3}(A,B)=\max\left\{\sup_{P\in A}\inf_{Q\in B}\rho_3(P,Q),\sup_{P\in B}\inf_{Q\in A}\rho_3(P,Q)\right\}. \tag{9}$$

Пусть $\Delta_N : 0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_N \leqslant L$ — произвольные разбиения $[0,L]$, и для координатных функций кривых $\Gamma, G \in \bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$ выполнены равенства

$$\varphi_i(t_k)=\psi_i(t_k),\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,N}. \tag{10}$$

Если $P(t)=P(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t))\in\Gamma$, $Q(t)=Q(\psi_1(t),\cdots,\psi_m(t))\in G$ — точки, определяемые одними и теми же значениями параметра t, то точки

$$P(t_k)=P\left(\varphi_1(t_k),\cdots,\varphi_m(t_k)\right),\quad Q(t_k)=Q\left(\psi_1(t_k),\cdots,\psi_m(t_k)\right),\ k=\overline{1,N},$$

совпадают. Очевидно, что в этом случае любое из перечисленных выше расстояний между кривыми зависит от разбиения Δ_N. Если $\rho(\Gamma,G;\Delta_N)$ — какое-нибудь расстояние между заданными кривыми $\Gamma, G\in\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$, для которых выполняются равенства (10), то требуется найти величину

$$\inf_{\Delta_N}\rho\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\Delta_N\right)=\inf_{\Delta_N}\sup\left\{\rho(\Gamma,G;\Delta_N):\Gamma,G\in\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}\right\}.$$

Полагаем также $\bar{\Delta}_N : t_k := t_k^0=(2k-1)L/(2N), k=\overline{1,N}$.

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1. *Каковы бы ни были модули непрерывности $\omega_i(t)$ ($i=\overline{1,m}$, $0\leqslant t\leqslant L$), справедливы равенства*

$$\begin{aligned}\inf_{\Delta_N}\rho_1\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\Delta_N\right)&=\rho_1\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\bar{\Delta}_N\right)=\\&=2\rho_{H,1}\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\bar{\Delta}_N\right)=2\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^2\left(L/(2N)\right)\right\}^{1/2},\\\inf_{\Delta_N}\rho_2\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\Delta_N\right)&=\rho_2\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\bar{\Delta}_N\right)=\\&=2\rho_{H,2}\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\bar{\Delta}_N\right)=2\max_{1\leqslant i\leqslant m}\omega_i\left(L/(2N)\right),\\\inf_{\Delta_N}\rho_3\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\Delta_N\right)&=\rho_3\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\bar{\Delta}_N\right)=\\&=2\rho_{H,3}\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\bar{\Delta}_N\right)=2\sum_{i=1}^m\omega_i\left(L/(2N)\right).\end{aligned}$$

Доказательство. Не умаляя общности, докажем, например, первое равенство теоремы. В самом деле, если для координатных функций кривых $\Gamma, G\in H^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$ выполняются равенства (10), то, пользуясь совпадением точек $P(t_k)$ и $Q(t_k)$, $k=\overline{1,N}$, для любых двух точек $P(t)\in\Gamma$ и $Q(t)\in G$ запишем

$$\begin{aligned}&\rho_1\left(P(t),Q(t);\Delta_N\right)\leqslant\rho_1\left(P(t),P(t_k);\Delta_N\right)+\rho_1\left(Q(t),Q(t_k);\Delta_N\right)=\\&=\left\{\sum_{i=1}^m\left[\varphi_i(t)-\varphi_i(t_k)\right]^2\right\}^{1/2}+\left\{\sum_{i=1}^m\left[\psi_i(t)-\psi_i(t_k)\right]^2\right\}^{1/2}\leqslant2\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^2(|t-t_k|)\right\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{11}$$

Оценка (11) точна для кривых $\Gamma_0, G_0 \in \bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$, координатные функции которых определяются равенствами

$$\varphi_i(t) = -\psi_i(t) = \omega_i(|t - t_k|), \quad i = \overline{1,m}, \quad 0 \leqslant t \leqslant L, \tag{12}$$

а потому из (11) следует, что

$$\inf_{\Delta_N} \rho_1\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}; \Delta_N\right) = \inf_{\Delta_N} \rho_1(\Gamma_0, G_0; \Delta_N) =$$
$$= 2 \inf_{t_k} \sup_{0\leqslant t\leqslant L} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^2(|t - t_k|)\right\}^{1/2}. \tag{13}$$

В работе [7] доказано, что стоящая в правой части (13) величина имеет минимальное значение при узлах $t_k := t_k^0 = (2k-1)L/(2N),\ k = \overline{1,N}$, равное

$$\inf_{\Delta_N} \rho_1\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}; \Delta_N\right) = \rho_1\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}; \bar{\Delta}_N\right) = 2\left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^2(L/(2N))\right\}^{1/2}. \tag{14}$$

В случае хаусдорфового расстояния оценка (14) вдвое меньше. Действительно, если для кривых Γ и G из $\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$ соотношения (10) выполняются при $t_k = t_k^0$, то для любой точки $P(t_k^0) := P\left(\varphi_1(t_k^0), \cdots, \varphi_m(t_k^0)\right)$ будем иметь $|t - t_k^0| \leqslant L/(2N)$, а так как $P(t_k^0)$ принадлежит также кривой $G \subset \bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$, мы имеем

$$\inf\left\{\rho_1\left(P(t), Q(t); \Delta_N\right) : Q(t) \in G\right\} \leqslant \rho_1\left(P(t), P(t_k); \Delta_N\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\sum_{i=1}^{m} \left[\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k^0)\right]^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^2(L/(2N))\right\}^{1/2}. \tag{15}$$

Аналогичным образом получим

$$\inf\left\{\rho_1\left(P(t), Q(t); \Delta_N\right) : P(t) \in \Gamma\right\} \leqslant \rho_1\left(Q(t), Q(t_k); \Delta_N\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\sum_{i=1}^{m} \left[\psi_i(t) - \psi_i(t_k^0)\right]^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^2(L/(2N))\right\}^{1/2}, \tag{15$'$}$$

причем знак равенства в неравенствах (15) и (15′) будет иметь место для тех же кривых $\Gamma_0, G_0 \in \bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$ с координатными функциями (12), а это означает, что

$$\inf_{\Delta_N} \rho_{H,1}\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}; \Delta_N\right) = \rho_{H,1}\left(\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}; \bar{\Delta}_N\right) = \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^2(L/(2N))\right\}^{1/2}.$$

Этим же методом доказываются два других равенства в утверждении теоремы 1.1, чем и завершаем доказательство.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 справедливы равенства*

$$\inf_{\Delta_N} \rho_1\left(\bar{H}_m^{\omega}; \Delta_N\right) = \rho_1\left(\bar{H}_m^{\omega}; \bar{\Delta}_N\right) = 2\rho_{H,1}\left(\bar{H}_m^{\omega}; \bar{\Delta}_N\right) = 2\sqrt{m}\omega\left(L/(2N)\right),$$

$$\inf_{\Delta_N} \rho_2\left(\bar{H}_m^{\omega}; \Delta_N\right) = \rho_2\left(\bar{H}_m^{\omega}; \bar{\Delta}_N\right) = 2\rho_{H,2}\left(\bar{H}_m^{\omega}; \bar{\Delta}_N\right) = 2\omega\left(L/(2N)\right),$$

$$\inf_{\Delta_N} \rho_3\left(\bar{H}_m^\omega; \Delta_N\right) = \rho_3\left(\bar{H}_m^\omega; \bar{\Delta}_N\right) = 2\rho_{H,3}\left(\bar{H}_m^\omega; \bar{\Delta}_N\right) = 2m\omega\left(L/(2N)\right).$$

Теорема 2. *Пусть* Γ_N — *вписанная в кривой* Γ *ломаная с вершинами в точках* $P_k^* := P\left(\varphi_1(kh), \cdots, \varphi_m(kh)\right)$, $k = \overline{0,N}$, $h = L/N$. *В предположении, что* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m};\ 0 \leqslant t \leqslant L)$ — *выпуклые модули непрерывности, справедливы равенства*

$$\sup\left\{\rho_1(\Gamma, \Gamma_N) : \Gamma \in \bar{H}^{\omega_1, \cdots, \omega_m}\right\} = \left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^2\left(L/(2N)\right)\right\}^{1/2}, \tag{16}$$

$$\sup\left\{\rho_2(\Gamma, \Gamma_N) : \Gamma \in \bar{H}^{\omega_1, \cdots, \omega_m}\right\} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \omega_i\left(L/(2N)\right), \tag{17}$$

$$\sup\left\{\rho_3(\Gamma, \Gamma_N) : \Gamma \in \bar{H}^{\omega_1, \cdots, \omega_m}\right\} = \sum_{i=1}^m \omega_i\left(L/(2N)\right). \tag{18}$$

Доказательство. Заметим, что в случае приближения ломаными оценку погрешности можно локализовать на частичном промежутке разбиения, что позволяет точно оценить ее для всех вышеназванных расстояний. Не умаляя общности, докажем соотношение (18) для хеммингова расстояния $\rho_3(\Gamma, \Gamma_N)$, поскольку доказательства равенств (16) и (17) основаны на практически аналогичных соображениях. С этой целью зафиксируем разбиение отрезка $[0, L] : t_k = kh, k = \overline{0,N},\ h = L/N$. Пусть Γ_N — ломанная с вершинами в точках $P_k^* = P\left(\varphi_1(kh), \cdots, \varphi_m(kh)\right),\ k = \overline{0,N}$. Параметрические уравнения звена ломаной Γ_N, стягивающей дугу $\overset{\smile}{P_k P_{k+1}}$, имеют вид

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \varphi_i(t_k) + (t - t_k)h^{-2} \cdot \left[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)\right],\ i = \overline{1,m}, \tag{19}$$

где $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}, k = \overline{0, N-1}$. Используя равенство (19), запишем

$$\varphi_i(t) - \tilde{\varphi}_i(t) = (t_{k+1} - t)h^{-1} \cdot \left[\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)\right] + (t - t_k)h^{-1} \cdot \left[\varphi_i(t) - \varphi(t_{k+1})\right],$$

откуда, оценивая по абсолютной величине полученное равенство, находим

$$|\varphi_i(t) - \tilde{\varphi}_i(t)| \leqslant (t_{k+1} - t)h^{-1}\omega_i(t - t_k) + (t - t_k)h^{-1}\omega_i(t_{k+1} - t). \tag{20}$$

Полагая $t = t_k + \tau h,\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1$, и учитывая выпуклость $\omega_i(t) (i = \overline{1,m})$, из (20) получаем

$$\begin{aligned}(t_{k+1} - t)h^{-1}\omega_i(t - t_k) + (t - t_k)h^{-1} \cdot \omega_i(t_{k+1} - t) &= \\ = (1 - \tau)\omega_i(\tau h) + \tau\omega_i((1 - \tau)h) &\leqslant \\ \leqslant \omega_i[2\tau(1 - \tau)h] \leqslant \omega_i(h/2) &= \omega\left(L/(2N)\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Из неравенств (20) и (21) сразу следует, что

$$\rho_3(\Gamma, \Gamma_N) = \sum_{i=1}^m \|\varphi_i - \tilde{\varphi}_i\|_{C[0,L]} \leqslant \sum_{i=1}^m \omega_i\left(L/(2N)\right). \tag{22}$$

Построим теперь экстремальную кривую $\Gamma^0 \in \bar{H}^{\omega_1, \cdots, \omega_m}$, для которой неравенство (22) обращается в равенство. Для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ $(k = \overline{0, N-1})$ и $i = \overline{1,m}$ параметрические уравнения кривой Γ^0 определим равенствами

$$\varphi_i^0(t) = \begin{cases} \omega_i(t - t_k), & t_k \leqslant t \leqslant t_k + L/(2N) \\ \\ \omega_i(t_{k+1} - t), & t_k + L/(2N) \leqslant t \leqslant t_{k+1}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi_i^0 \in H^{\omega_i}$, а значит $\Gamma^0 \in \bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$. Далее, так как $\varphi_i^0(t_k) \equiv 0$, $k = \overline{0,N}$, из (19) следует, что $\tilde{\varphi}_i^0(t) \equiv 0$, а потому мы имеем

$$\rho_3(\Gamma^0,\Gamma_N^0) = \sum_{i=1}^m \|\varphi_i^0 - \tilde{\varphi}_i^0\|_{C[0,L]} = \sum_{i=1}^m \|\varphi_i^0\|_{C[0,L]} = \tag{23}$$

$$= \sum_{i=1}^m \varphi_i^0\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) = \sum_{i=1}^m \omega_i\left(L/(2N)\right).$$

Таким образом, в соответствии с равенством (23) запишем

$$\sup\left\{\rho_3(\Gamma,\Gamma_N) : \Gamma \in \bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}\right\} = \rho_3(\Gamma^0,\Gamma_N^0) = \sum_{i=1}^m \omega_i\left(L/(2N)\right),$$

откуда и следует равенство (18). Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Справедливы равенства*

$$\sup\left\{\rho_1(\Gamma,\Gamma_N) : \Gamma \in \bar{H}_m^{\omega}\right\} = \sqrt{m}\omega\left(L/(2N)\right),$$

$$\sup\left\{\rho_2(\Gamma,\Gamma_N) : \Gamma \in \bar{H}_m^{\omega}\right\} = \omega\left(L/(2N)\right),$$

$$\sup\left\{\rho_1(\Gamma,\Gamma_N) : \Gamma \in \bar{H}_m^{\omega}\right\} = m\omega\left(L/(2N)\right).$$

3. В этом пункте докажем одно утверждение об аппроксимации кривых $\Gamma \in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$ вписанными в них ломаными.

Теорема 3. *Пусть $\omega_i(t) (i = \overline{1,m})$ — выпуклые модули непрерывности на отрезке $[0,L]$. Тогда для любого натурального $N \geqslant 2$ справедливы равенства*

$$\sup\left\{\rho_1(\Gamma,\Gamma_N) : \Gamma \in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}\right\} = \frac{1}{4}\cdot\left\{\sum_{i=1}^m\left(\int_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^2\right\}^{1/2}, \tag{24}$$

$$\sup\left\{\rho_2(\Gamma,\Gamma_N) : \Gamma \in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}\right\} = \frac{1}{4}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\int_0^{L/N}\omega_i(t)dt, \tag{25}$$

$$\sup\left\{\rho_3(\Gamma,\Gamma_N) : \Gamma \in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}\right\} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^m\int_0^{L/N}\omega_i(t)dt, \tag{26}$$

где Γ_N — ломаная, вписанная в кривой $\Gamma \in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$, с вершинами в точках $P_k^* = P\left(\varphi_1(kh),\cdots,\varphi_m(kh)\right)$, $k = \overline{0,N}$, $h = L/N$. Если же $\omega_i(t), i = \overline{1,m}$ — произвольные модули непрерывности, то

$$\sup\left\{\rho_1(\Gamma,\Gamma_N) : \Gamma \in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}\right\} = \frac{\theta_\omega}{4}\cdot\left\{\sum_{i=1}^m\left(\int_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^2\right\}^{1/2}, \tag{27}$$

$$\sup\left\{\rho_2(\Gamma,\Gamma_N) : \Gamma \in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}\right\} = \frac{\theta_\omega}{4}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\int_0^{L/N}\omega_i(t)dt, \tag{28}$$

$$\sup\left\{\rho_3(\Gamma,\Gamma_N):\Gamma\in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}\right\}=\frac{\theta_\omega}{4}\sum_{i=1}^{m}\int_0^{L/N}\omega_i(t)dt, \tag{29}$$

где $2/3\leqslant\theta_\omega\leqslant 1$.

Доказательство. Пользуясь равенством (19), легко доказать, что для произвольной кривой $\Gamma\in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$, координатные функции которой $\varphi_i(t)\in W^{(1)}H^{\omega_i}$ $(i=\overline{1,m})$, выполняется неравенство (см. [13, 12], с. 234)

$$|\varphi_i(t)-\tilde{\varphi}_i(t)|\leqslant(t_{k+1}-t)(t-t_k)h^{-2}\int_0^h\omega_i(\tau)d\tau,\ i=\overline{1,m},$$

где $t_k=kh,\ k=\overline{0,N},\ h=L/N$. Учитывая, что $(t_{k+1}-t)(t-t_k)\leqslant h^2/4$ для $t\in[t_k,t_{k+1}]$, получим:

$$\|\varphi_i-\tilde{\varphi}_i\|_{C[0,L]}\leqslant\frac{1}{4}\int_0^{L/N}\omega_i(\tau)d\tau.$$

Из последнего неравенства для расстояния $\rho_j(\Gamma,\Gamma_N)$ $(j=1,2,3)$ сразу получаем неулучшаемые для класса $W^{(1)}H^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$ при выпуклых модулях непрерывности $\omega_i(t)$ оценки

$$\rho_1(\Gamma,\Gamma_N)=\left\{\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i-\tilde{\varphi}_i\|^2_{C[0,L]}\right\}^{1/2}\leqslant\frac{1}{4}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\int_0^{L/N}\omega_i(\tau)d\tau\right)^2\right\}^{1/2}, \tag{30}$$

$$\rho_2(\Gamma,\Gamma_N)=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\|\varphi_i-\tilde{\varphi}_i\|_{C[0,L]}\leqslant\frac{1}{4}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\int_0^{L/N}\omega_i(\tau)d\tau, \tag{31}$$

$$\rho_3(\Gamma,\Gamma_N)=\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i-\tilde{\varphi}_i\|_{C[0,L]}\leqslant\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\int_0^{L/N}\omega_i(\tau)d\tau. \tag{32}$$

Пользуясь неравенствами (30)–(32), легко доказать равенства (24)–(26). Не умаляя общности, докажем, например, равенство (24). В самом деле, из (30) для произвольной кривой $\Gamma\in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$ получаем

$$\sup\left\{\rho_1(\Gamma,\Gamma_N):\Gamma\in W^{(1)}H^{\omega_1,\cdots,\omega_m}\right\}\leqslant\frac{1}{4}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\int_0^{L/N}\omega_i(\tau)d\tau\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Следуя работе [13], зададим на отрезке $[0,L/N]$ функции

$$f_i(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\omega_i\left(\frac{L}{N}-2t\right), & 0\leqslant t\leqslant L/(2N),\\[2ex] -\frac{1}{2}\omega_i\left(2t-\frac{L}{N}\right), & L/(2N)\leqslant t\leqslant L/(N),\ i=\overline{1,m},\end{cases} \tag{33}$$

для $t\in[L/N,2L/2N]$ положим $f_i(t)=f_i\left(2/N-t\right)$ и распространим функции $f_i(t)$ периодически с периодом $2/N$ на всю ось. Введем теперь экстремальную кривую Γ^* со следующими параметрическими уравнениями:

$$\Gamma^*:\varphi_i^*(t)=\int_0^t f_i(\tau)d\tau,\ i=\overline{1,m},\ 0\leqslant t\leqslant L.$$

Нетрудно проверить, что $\varphi_i^*(t) \in W^{(1)}H^{\omega_i}[0,L], i=\overline{1,m}$, а это означает, что $\Gamma^* \in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$. Кроме того, учитывая, что $\varphi_i^*(kh)=0,\ k=\overline{0,N},\ h=L/N$, имеем

$$\rho_1(\Gamma^*,\Gamma_N)=\left\{\sum_{i=1}^m \|\varphi_i^*(t)-\tilde{\varphi_i^*}(t)\|^2_{C[0,L]}\right\}^{1/2}=$$
$$=\left\{\sum_{i=1}^m \|\varphi_i^*(t)\|^2_{C[0,L]}\right\}^{1/2}=\left\{\sum_{i=1}^m \left\|\int_0^t f_i(\tau)d\tau\right\|^2_{C[0,L]}\right\}^{1/2}=$$
$$=\left\{\sum_{i=1}^m \left(\int_0^{L/(2N)} f_i(\tau)d\tau\right)^2\right\}^{1/2}=\frac{1}{4}\left\{\sum_{i=1}^m \left(\int_0^{L/N}\omega_i(\tau)d\tau\right)^2\right\}^{1/2},$$

откуда и следует точность неравенства (30) и, тем самым, доказано соотношение (24). Равенства (25) и (26) доказываются по аналогичной схеме.

Приступая к доказательству второй части теоремы 3, без умаления общности, докажем, например, равенство (27) для евклидова расстояния. Оценка сверху для величины $\rho_1(\Gamma,\Gamma_N)$ следует из неравенства (30). Для получения оценки снизу указанного расстояния полагаем $f_i^*(t)=\dfrac{2}{3}f_i(t),\ i=\overline{1,m}$, где $f_i(t)$ определены равенствами (33), и распространим $f_i(t)$ периодически с периодом $2/N$ на всю ось. Легко проверить, что кривая Γ^{**}, параметрические уравнения которой определены равенствами

$$\varphi_i^{**}(t)=\int_0^t f_i^*(\tau)d\tau,\ i=\overline{1,m},\ 0\leqslant t\leqslant L,$$

принадлежит классу $W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$. Непосредственное вычисление приводит к следующему неравенству:

$$\sup\left\{\rho_1(\Gamma,\Gamma_N):\Gamma\in W^{(1)}\bar{H}^{\omega_1,\cdots,\omega_m}\right\}\geqslant\rho_1(\Gamma^*,\Gamma_N)=\left\{\sum_{i=1}^m\|\varphi_i^*\|^2_{C[0,L]}\right\}^{1/2}=$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\left\{\sum_{i=1}^m\left(\int_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^2\right\}^{1/2}. \qquad (34)$$

Требуемое равенство (27) вытекает из сопоставления неравенств (30) и (34). Аналогичным образом доказываются два других равенства в соотношениях (28) и (29). Теорема 3 полностью доказана.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда, если $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности, то*

$$\sup\left\{\rho_1(\Gamma,\Gamma_N):\Gamma\in\bar{H}^\omega_m\right\}=\frac{\theta_\omega}{4}\sqrt{m}\int_0^{L/N}\omega(t)dt, \qquad (35)$$

$$\sup\left\{\rho_2(\Gamma,\Gamma_N):\Gamma\in\bar{H}^\omega_m\right\}=\frac{\theta_\omega}{4}\int_0^{L/N}\omega(t)dt, \qquad (36)$$

$$\sup\left\{\rho_3(\Gamma,\Gamma_N):\Gamma\in\bar{H}^\omega_m\right\}=\frac{\theta_\omega}{4}m\int_0^{L/N}\omega(t)dt, \qquad (37)$$

где $(2/3) \leqslant \theta_\omega \leqslant 1$. *Если же* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности, то в соотношениях (35)–(37)* $\theta_\omega = 1$.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

Литература

1. *Мартынюк В. Т.* О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями // Укр. матем. журнал, 1976. Т. 28, № 1. С. 87–92.

2. *Мартынюк В. Т.* Некоторые вопросы приближения линий и поверхностей // Теория приближения функций. М.: Наука, 1987. С. 282–287.

3. *Назаренко Н. А.* О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами // Геометрическая теория функций и топология. Киев: ИМ АН УССР, 1981. С. 55–62.

4. *Вакарчук С. Б.* О приближении гладких кривых ломаными // Геометрическая теория функций и топология. Киев: ИМ АН УССР, 1981. С. 15–19.

5. *Вакарчук С. Б.* О приближении плоских параметрических заданных кривых ломаными // Моногенные функции и отображения. Киев: ИМ АН УССР, 1982. С. 107–113.

6. *Вакарчук С. Б.* О приближении кривых, заданных в параметрическим виде, при помощи сплайн-кривых // Укр. матем. журнал, 1983. Т. 35, № 3. С. 352–355.

7. *Вакарчук С. Б.* Точные константы приближения плоских кривых полиномиальными кривыми и ломаными // Известия ВУЗов, Математика, 1988. № 2. С. 14–19.

8. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном кодировании вектор-функций // Укр. матем. журнал, 1988. Т. 40, № 6. С. 737–743.

9. *Корнейчук Н. П.* Приближение и оптимальное кодирование гладких плоских кривых // Укр. матем. журнал, 1989. Т. 41, № 4. С. 492–499.

10. *Сендов Б.* Хаусдорфовые приближения. София: Изд-во Болгарской АН, 1979. 372 с.

11. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

12. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984, 320 с.

13. *Малоземов В. Н.* Об отклонении ломаных // Вестн. ЛГУ. Серия матем. и мех., 1966. № 7. Вып. 2. С. 150–153.

14. *Шабозов М. Ш.* О погрешности интерполяции билинейными сплайнами // Укр. матем. журнал, 1994. Т. 46, № 11. С. 1554–1560.

15. *Шабозов М. Ш.* Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами // Мат. заметки, 1996. 59, № 1. С. 142–152.

16. *Вакарчук С. Б.* К интерполяции билинейными сплайнами // Мат. заметки, 1990. Т. 47, № 5. С. 26–30.

17. *Вакарчук С. Б., Мыскин К. Ю.* Некоторые вопросы одновременной аппроксимации функций двух переменных и их производных интерполяционными билинейными сплайнами // Укр. матем. журнал, 2005. Т. 57, № 2. С. 147–157.

18. *Вершик А. М., Малоземов В. Н., Певный А. Б.* Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация // Сиб. матем. журнал, 1975. Т. XVI, № 5. С. 925–938.

Статья поступила в редакцию 27 декабря 2012 г.