

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИЙ УНАРОВ

Показывается, что число предельных моделей малой теории унара принимает одно из значений: 0, 1, ω или 2^ω . Кроме того, приводятся примеры теорий, для которых реализуются эти значения.

Ключевые слова: предельная модель, унар.

Введение

Понятие предельной модели введено в книге [1]. Там же поставлена проблема существования l -эренфойхтовых теорий в различных классах теорий. В настоящей работе эта проблема решается для теорий унаров. Более того, показано, что число предельных моделей малой теории унара принимает одно из значений: 0, 1, ω или 2^ω . Тем самым решается проблема Воота [2] о существовании теорий с несчётным и неcontinually числом счётных моделей для этого класса теорий. В работе также установлено, что все эти значения реализуются.

Ранее вопросы, связанные с числом моделей теорий унаров, изучались в работах [3–5]. Используемые ниже определения можно найти в [1; 3].

Основной результат

Напомним несколько определений.

Полная элементарная теория T называется *малой*, если число полных типов теории T счётно.

Последовательность моделей $(M_n)_{n \in \omega}$ называется *элементарной цепью*, если $M_n \preceq M_{n+1}$ для всех $n \in \omega$.

Модель M малой теории называется *предельной*, если M не является простой моделью ни над каким кортежем и $M = \bigcup_{n \in \omega} M_n$ для некоторой элементарной цепи $(M_n)_{n \in \omega}$ простых моделей над некоторыми кортежами.

Унаром называется алгебраическая система с одной одноместной функцией.

Теория унара T называется *ограниченной*, если существует такое натуральное N , что $T \vdash \forall x (\bigvee_{n < m < N} f^n(x) \approx f^m(x))$.

Маршрутом длины n в неориентированном графе Γ называется любая последовательность вершин $a_0, a_1, \dots, a_n$ такая, что a_i, a_{i-1} соединены ребром для всех $i = 1, 2, \dots, n$. В раскрашенном графе вершины одного маршрута могут быть соединены ребрами разных цветов.

Расстоянием между элементами a и b графа Γ называется длина кратчайшего маршрута от a до b в Γ , если такой маршрут существует, и расстояние между a и b бесконечно в противном случае.

Компонентой связности графа Γ называется максимальное подмножество множества вершин, в котором любые два элемента связаны маршрутами.

Диаметром компоненты связности называется наибольшее из расстояний между элементами в этой компоненте связности, если такое существует, и бесконечность в противном случае.

Для ориентированных графов рассматриваются соответствующие неориентированные графы.

Будем использовать следующие результаты.

Теорема (Шишмарев [3]). Теория унара T ω -категорична тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) T ограничена;
- 2) если $M \models T$, то в M существует лишь конечное число неизоморфных множеств вида $\bigcup_{n < \omega} f^{-n}(a)$.

Лемма 1 (Маркус [4]). Пусть T – теория унара, $M \models T$. Тогда если $f(a) = b$ и a – не-алгебраический элемент над b в M , то $M \setminus \bigcup_{n < \omega} f^{-n}(a) \preceq M$.

Лемма 2 (Маркус [4]). Пусть T – теория унара, $M \models T$, C – компонента связности. Тогда следующие условия удовлетворяют $(4) \rightarrow (1) \equiv (2) \equiv (3)$.

1. $M \prec M \cup C$.
2. Существует модель $N \equiv M$, содержащая счетное число копий C .
3. Существует модель $N \equiv M$, содержащая счетное число компонент связности $\equiv C$.
4. Существует модель $N \equiv M$ такая, что N и M содержат различное ненулевое число компонент связности $\equiv C$.

С их помощью доказывается следующая теорема.

Теорема. Если T – малая теория унара, то T имеет 0, 1, ω или 2^ω предельных моделей.

Доказательство. Если T ω -категорична, она имеет единственную счетную модель, которая проста, а значит, не является предельной.

Предположим, что T не ω -категорична. Пусть M_0 – простая модель теории T . Так как T не ω -категорична, то по теореме Шишмарева не выполняется хотя бы одно из условий (1),(2).

Если не выполняется условие (1), то диаметр компонент связности в M_0 не ограничен. А значит, существует модель теории T , содержащая компоненту связности C бесконечного диаметра. Если существует простая над некоторым кортежем $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$ модель $M_1 \models T$ такая, что число компонент, элементарно эквивалентных C , в M_1 отлично от числа таких компонент в M_0 , то по Лемме 2 $(4 \rightarrow 1)$ $M \preceq M \cup C$. Пусть $b_1, \dots, b_k$ – все элементы кортежа $\bar{b}$,

лежащие в C . Тогда модель $M \cup C$ проста над кортежем $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k)$. Если M содержит конечное число компонент связности, изоморфных C , то M и $M \cup C$ неизоморфны. Таким образом можем расширить любую простую над кортежем модель теории T и получить неизоморфную ей модель, простую над большим кортежем. Неизоморфным компонентам C будут соответствовать различные способы расширения.

Если не выполняется условие (2), все $a \in M_0$, для которых множества $\bigcup_{n < \omega} f^{-n}(a)$ не изоморфны, будут реализовывать разные главные типы. А значит, в T существует хотя бы один неглавный 1-тип.

Если в некоторой модели $M_1 \models T$, простой над кортежем $(b_1, \dots, b_m)$, существует реализация b неглавного типа, для которой существует l такое, что $f^l(b) \in M$, то пусть l – минимальное с таким свойством, положим $c = f^{l-1}(b)$. Элемент c не алгебраический над $d = f(c)$, так как c не принадлежит M .

Значит, по лемме 1 $M \preceq M \cup (\bigcup_{s < \omega} f^{-s}(c))$, при условии, что $f(c) = d$. Если $b_1, \dots, b_k \in \bigcup_{s < \omega} f^{-s}(c)$, то новая модель будет проста над $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k)$.

Если существует реализация $b' \in M_1$ неглавного типа, для которой не существует такого l , что $f^l(b') \in M_0$, то b' лежит в компоненте связности C , не пересекающейся с M_0 . Если количество компонент связности, изоморфных C , в M_0 бесконечно, то

$M \equiv M \cup C$. Если число таких компонент в M_0 конечно, то оно отлично от их количества в M_1 , а значит, по лемме 2 $(4 \rightarrow 1)$,

$M \preceq M \cup C$ и M и $M \cup C$ неизоморфны. Пусть $b_1, \dots, b_k$ – все элементы кортежа $\bar{b}$,

лежащие в C . Тогда модель $M \cup C$ проста над кортежем $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k)$. Таким образом, можем расширить любую простую над кортежем модель теории T и получить неизоморфную ей модель, простую над большим кортежем. Неизоморфным ограниченным компонентам C будут соответствовать различные способы расширения, отличные от описанных в первом случае.

Если в некоторой модели теории T есть компонента связности или множество вида $(\bigcup_{s < \omega} f^{-s}(c))$, которое можно и копировать,

и расширять, добавляя к нему новые множества вида $(\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c))$, то каждую копию можем расширять точно так же. Модель, содержащая бесконечно много таких копий, будет предельной. Пусть n_k – количество таких копий, к которым прикреплено k множеств вида $(\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c))$. Если для двух предельных моделей хотя бы одно из таких чисел n_k будет различаться, эти модели не будут изоморфны. И для любого набора таких чисел n_k существует предельная модель с таким набором. А всего таких наборов 2^ω . А значит, и предельных моделей в этом случае будет 2^ω .

Далее будем считать, что такая ситуация невозможна. Тогда если $b \in M_1$ – элемент неглавного типа и существует l такое, что $f^l(b) \in M$, то существует l такое, что $f^l(b) \in M_0$. Пусть l – минимальное с таким свойством. Обозначим $c = f^{l-1}(b)$ и $d = f(c)$. Тогда $d \in M_0$, c не алгебраический над d . Пусть M' – модель теории T , простая над кортежем $(a_1', \dots, a_n')$. Так как $d \in M_0$, $d \in M'$.

Тогда по лемме 1 $M' \preceq M' \cup (\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c))$. Если эти модели неизоморфны, получаем новый способ расширения. Пусть $b_1, \dots, b_k$ – все элементы кортежа $\bar{b}$, над которым проста модель M_1 , лежащие в $(\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c))$. Тогда мо-

дель $M \cup (\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c))$ проста над кортежем $(a_1', \dots, a_n', b_1, \dots, b_k)$. Таким образом, можем расширить любую простую над кортежем модель теории T и получить неизоморфную ей модель, простую над большим кортежем. Элементам b , для которых множества $(\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c))$ неизоморфны или элементы c не однотипны, будут соответствовать разные способы расширения.

Пусть M – модель теории T , простая над некоторым кортежем. Построим для нее последовательность моделей $(M_i)_{i=0}^k$. M_0 – простая модель теории T . Пронумеруем все элементы из $M \setminus M_0$. Пусть построена модель M_i , построим M_{i+1} . Выберем элемент $b \in M \setminus M_i$ с наименьшим номером, C – компонента связности из M , содержащая b . Если $C \cap M_i = \emptyset$, полагаем $M_{i+1} = M_i \cup C$. Иначе найдется n такое, что $f^n(b) \in M_i$. Пусть n – минимальное с таким свойством.

Тогда элемент $c = f^{n-1}(b)$ не алгебраический над $d = f(c)$. Если в $\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c)$ найдется элемент неглавного типа, можем расширить

M_i до $M_i \cup (\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c))$. В этом случае полагаем $M_{i+1} = M_i \cup (\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c))$. Иначе в множестве $\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c)$ все элементы главного типа, а значит, в M_i бесконечно много копий этого множества и $M_i \cup (\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c)) \cong M_i$. В этом

случае заменяем M_i на $M_i \cup (\bigcup_{s<\omega} f^{-s}(c))$ и берем следующий элемент. И продолжаем так до тех пор, пока не получим модель $M_k = M$. Это произойдет за конечное число шагов, так как кортеж, над которым проста новая модель, увеличивается на каждом шаге, а M проста над кортежем.

В каждом из случаев число способов расширения не более чем счётно. А значит, всего их тоже не более чем счётно. Тогда можем их занумеровать. Простой модели M теории T поставим в соответствие вектор $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3, \dots)$, где n_i – количество расширений способом с номером i в цепочке моделей, построенной для M . Сумма всех координат этого вектора будет равна k , т. е. длине цепочки. Если двум моделям соответствует один и тот же вектор, они изоморфны. По каждому вектору можно восстановить цепочку расширений, а значит, и модель, которой он соответствует. Таким образом, получили взаимнооднозначное соответствие между простыми моделями теории T и векторами с конечной суммой координат.

Будем говорить, что вектор $\bar{m}$ не превосходит вектор $\bar{n}$, если для любого i выполняется неравенство $m_i \leq n_i$.

Пусть вектор $\bar{n}$ соответствует модели M_1 , а вектор $\bar{m}$ – модели M_2 . Если $\bar{n} \leq \bar{m}$, то $M_1 \preceq M_2$. Если $M_1 \preceq M_2$, то, занумеровав элементы в M_2 так, чтоб элементы из M_1 получили меньшие номера, получим, что в цепочке для M_2 будет M_1 , а значит, $\bar{n} \leq \bar{m}$. Таким образом, элементарной цепи соответствует неубывающая последовательность векторов. Пусть $n_i^{(j)}$ – i -я координата вектора для j -й модели. Тогда объединению элементарной цепи будет соответствовать вектор с координатами $n_i = \max_{j<\omega} (n_i^{(j)})$. Если сумма его координат конечна, объединение такой элементарной цепи будет простой моделью. Иначе – предельной. Таким образом, предельным моделям будут соответствовать

векторы с бесконечной суммой координат. Если способ расширения всего один, векторы будут одномерными и единственным вектором, соответствующим предельной модели, будет ω . В этом случае предельная модель единственна. Если способов расширения конечное число, большее 1, то подходящих векторов, а значит, и соответствующих им предельных моделей, будет ω . Если способов расширения ω , таких векторов будет 2^ω . А значит, и предельных моделей тоже будет 2^ω . $\square$

Пример 1. Рассмотрим теорию $Th(\langle \mathbb{Z}, s \rangle)$, где s – функция следования. Простой моделью будет $\langle \mathbb{Z}, s \rangle$. Имеем единственный способ расширения – добавление неограниченной компоненты связности. Предельная модель будет единственной.

Пример 2. Положим $\varphi(x) = (f^2(x) = x \wedge \exists y(f(y) = x \wedge \neg f^2(y) = y))$, $\psi(y) = \exists x(\varphi(x) \wedge (f(y) = x \vee f^2(y) = x))$. Рассмотрим теорию унара, заданную следующими предложениями:

- 1) $\exists^2 y f^2(y) = y$ (существует одно кольцо длины 2);
- 2) $\exists! x \varphi(x)$ (существует один элемент из кольца длины 2, имеющий прообраз вне кольца);
- 3) $\forall y \psi(y)$ (из любого элемента можно попасть в кольцо длины 2 за один или два шага);
- 4) $\bigwedge_{n=0}^{\infty} \exists! y (\exists x (\varphi(x) \wedge f(y) = x) \wedge \exists^{=n} z f(z) = y)$

(для каждого натурального n существует один элемент, имеющий n прообразов, из которого можно за один шаг попасть в кольцо длины 2).

Модель этой теории будет состоять из единственной компоненты связности. Эта компонента содержит цикл длины 2, один из элементов которого имеет прообразы с любым конечным числом прообразов. В простых над кортежами моделях он также будет иметь некоторое конечное число прообразов с бесконечным числом прообразов. Единственная предельная модель будет получаться добавлением к простой модели бесконечного числа элементов с бесконечным числом прообразов.

Пример 3. Рассмотрим теорию унара, заданную предложениями:

- 1) $\exists^2 y f^2(y) = y$ (существует одно кольцо длины 2);
- 2) $\exists! x \varphi(x)$ (существует один элемент из кольца длины 2, имеющий прообраз вне кольца);

$$3) \bigwedge_{n=0}^{\infty} \exists! y (\exists x (\varphi(x) \wedge f(y) = x) \wedge \exists^{=n} z f(z) = y)$$

(для каждого натурального n существует один элемент, имеющий n прообразов, из которого можно за один шаг попасть в кольцо длины 2);

4) $\forall y (\exists x (\varphi(x) \wedge f^2(y) = x \wedge \neg x = y) \rightarrow \neg \exists z f(z) = y)$ (не лежащий в кольце длины 2 элемент, из которого можно за два шага попасть в это кольцо, не имеет прообразов);

5) $\exists y \neg \psi(y)$ (найдется элемент, из которого нельзя попасть в кольцо длины 2 за один или два шага);

6) $\forall y (\neg \psi(y) \rightarrow \exists! z f(z) = y)$ (элемент, из которого нельзя попасть в кольцо длины 2 за один или два шага, имеет единственный прообраз);

7) $\bigwedge_{n \neq 2} \neg \exists z f^n(z) = z$ (нет колец длины, отличной от 2).

Формулы φ и ψ такие же, как в прошлом примере. Простая модель этой теории будет содержать две компоненты связности. Одна из них будет такой же, как в прошлом примере. И ее можно так же расширять, добавляя элементы с бесконечным числом прообразов. Вторая – компонента связности бесконечного диаметра, в которой каждый элемент имеет единственный прообраз. Второй способ расширения – добавление еще одной такой компоненты связности. Можем строить элементарную цепь, добавив к простой модели конечное число элементов с бесконечным числом прообразов и далее на каждом шаге добавляя новую компоненту связности. Или можем, наоборот, сначала добавить конечное число новых компонент связности, а потом на каждом шаге расширять модель, добавляя элемент с бесконечным числом прообразов. Или можем поочередно расширять обоими способами. Таким образом получаем счётное число предельных моделей.

Пример 4. Рассмотрим теорию унара, заданную предложениями:

- 1) $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \neg \exists x f^n(x) = x$ (нет колец);
- 2) $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \exists x \exists^{=n} y f(y) = x$ (для каждого натурального n найдется элемент, имеющий ровно n прообразов);
- 3) $\forall x (\exists^k y f(y) = x \rightarrow (\exists^k z f(z) = f(x) \wedge \forall t (f(t) = f(x) \rightarrow \exists^{=k} s f(s) = t)))$ (для каждого элемента его образ, и каждый его прообраз имеет столько же прообразов, сколько и сам этот элемент).

В модели этой теории в каждой компоненте связности все элементы имеют равное

число прообразов. И для каждого $n \in \omega \setminus \{0\}$ в простой модели найдется ровно одна компонента связности, каждый элемент которой имеет ровно n прообразов. По теореме о компактности существует модель, содержащая компоненту связности, каждый элемент которой имеет бесконечно много прообразов. Простые над кортежами модели будут содержать некоторое конечное число компонент каждого вида. Модель, в которой компонент связности хотя бы одного вида бесконечно много, является предельной. Таким образом получили 2^ω предельных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Судоплатов С. В. Проблема Лахлана. Новосибирск : НГТУ, 2009. 336 с.
- [2] Vaught R. Denumerable models of complete theories // *Infinistic Methods*. London : Pergamon, 1961. P. 303–321.
- [3] Шимарев Ю. Е. О категоричных теориях одной функции // *Математические заметки*. 1972. Т. 11. № 1. С. 89–98.
- [4] Marcus L. The number of countable models of a theory of one unary function // *Fundamenta Mathematicae*. 1980. Vol. CVIII. № 3. P. 171–181.
- [5] Ряскин А. Н. Число моделей полных теорий унарных // *Теория моделей и её применения*. Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1988. С. 162–182.