УДК 533.70:541:12:542.12 Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2010. Вып. 2

ПРЕДЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ВЛАЖНОГО ТОРНАДО

Д. А. Петров[1], *В. А. Цибаров*[2]

1. ФГУП «НИИ командных приборов»,
канд. физ.-мат. наук, инж. I категории, dp_140482@mail.ru

2. С.-Петербургский государственный университет,
д-р физ.-мат. наук, профессор, Tsibarov@mail.ru

Среди всех явлений природы в атмосфере Земли одним из наиболее грозных является компактный (диаметром от десятков до сотен, реже тысяч, метров) закрученный восходящий поток, называемый *смерчем* или *торнадо*. Его внезапное появление и чрезвычайная разрушительная сила делают изучение данного явления особенно актуальным и весьма затруднительным. В силу этих обстоятельств до сих пор нет единой общепризнанной модели торнадо, описывающей хотя бы его основные наблюдаемые свойства.

Вниманию читателей предлагается статья об одной из моделей смерча, которая облегчает математическое описание данного явления, допуская аналитическое решение и сохраняя при этом его важнейшие свойства. В работе используются замыкающие соотношения, полученные на основе кинетического (стохастического) подхода к описанию газовзвесей. Она существенным образом опирается на ранее опубликованные результаты [1–5]. При этом авторы ограничиваются предельным решением задачи. Процессы испарения—конденсации пара на включениях учитываются в приближении локального равновесия полидисперсной газовзвеси, а процессы агрегирования и распада — в приближении локального равновесия или их очень большой медленности. В статье приводится приближенное решение для внутренних областей уже развитых смерчей, у которых мгновенная ось вращения настолько мало отклоняется от нормали к поверхности планеты, что течение газовзвеси можно в первом приближении считать осесимметричным. Процесс образования торнадо, являющихся циркуляционными течениями атмосферы, обусловленными бароклинностью среды и силами Кориолисса [6], в работе не рассматривается. В какой-то мере в рамках модели чисто газовой атмосферы Земли этот вопрос исследуется в [7], но исследование течения газа в ядре смерча в окрестности его оси в указанной монографии игнорируется.

Особенности модели торнадо. Важно отметить следующие факторы.

Боковая поверхность торнадо является поверхностью раздела, что подтверждается наблюдениями. Оценки показывают [3] возможность выбора такого временнóго масштаба для описания явления, что в первом приближении среду можно считать гидродинамически идеальной, нетеплопроводной, течение квазиустановившимся, а массовые силы консервативными. Оценки будут приведены ниже. При таких условиях приближенно справедлив интеграл Бернулли, а по второй теореме Гельмгольца о вихрях циркуляция сохраняется во времени и вдоль вихревой трубки. В этом случае форма боковой поверхности смерча, являющейся поверхностью тока, может быть найдена из интеграла Бернулли с учетом второй теоремы Гельмгольца.

Смерч представляет собой газовзвесь, образованную потоком газа и взвешенных им твердых и/или жидких частиц. Именно переносимая примесь делает воронку смерча видимой.

Процессы испарения—конденсации и агрегирования—распада включений требуют учета их полидисперсности. Учет таких процессов естественно производить в рамках континуального распределения частиц по массам и объемам, что в предлагаемой читателю работе и делается.

Предполагается также, что основным источником энергии для вихря становится процесс конденсации в восходящем и охлаждающемся потоке влажного воздуха, разогретого контактом с «горячей» поверхностью земли. Однако в связи с недостаточной разработанностью математического описания выделения энергии при нарушении равновесия в процессе испарения—конденсации и перехода выделяющейся тепловой энергии в кинетическую энергию потока в настоящее время возможно только рассмотрение течения вблизи равновесия. И все же можно наметить путь решения данной весьма важной задачи: следует предполагать, что нагретый за счет конденсации (точнее, превалирования конденсации над испарением) воздух расширяется даже быстрее, чем успевает нарастать давление, одновременно поднимаясь вверх, а на его месте образуется область пониженного давления, засасывающая в себя окружающий воздух. Положение облегчается тем, что течение газовзвеси в торнадо можно исследовать на сравнительно больших интервалах времени, когда применимо слабо неравновесное описание процесса испарение—конденсация.

Очень важными особенностями рассматриваемого крупномасштабного явления являются знание параметров среды на неизвестной боковой границе торнадо, получаемых с помощью метеоданных, и граничных условий на поверхности раздела, и незнание, вообще говоря, данных на заданной нижней границе. Следовательно, наша задача относится к классу задач с известными данными на неизвестной границе и неизвестными данными на известной границе. В работе делается попытка преодоления этой трудности в рамках, так называемой, предельной задачи и метода оптимизации [1].

Оценка относительного вклада различных процессов в динамику торнадо. Для применимости предельного решения необходимо знание времени выравнивания температур (выхода на *однотемпературный режим* с температурой T), отношения времени вязкой релаксации к характерному газодинамическому времени и времени выхода испарения на режим насыщения.

Порядок времени выравнивания температуры внутри частицы (жидкой или твердой) и в газовой ячейке, окружающей частицу, оценим по коэффициентам температуропроводности α_{p}, α_{c} и характерному размеру исследуемой области нагрева, исходя из подхода, предложенного в монографии [8]. Для частиц характерным размером является диаметр, а для сферической ячейки — расстояние ℓ_{c} между поверхностью частицы и границей ячейки, представляющей собой среднее расстояние между центрами частиц (см. [1]). При таком подходе для времени выравнивания температуры частицы ($\mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{p}}$) и времени выравнивания температуры в ячейке ($\mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{c}}$) будем иметь выражения

$$\mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{p}} \sim \frac{d_{\mathrm{p}}^2}{4\alpha_{\mathrm{p}}}\,, \quad \alpha_{\mathrm{p}} = \frac{\lambda_{\mathrm{s}}}{c_{\mathrm{s}}\gamma_{\mathrm{p}}}\,, \quad \mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{c}} \sim \frac{d_{\mathrm{p}}^2}{4\alpha_{\mathrm{c}}}\left(\frac{1-\lambda_{\mathrm{c}}}{\lambda_{\mathrm{c}}}\right)^2, \quad \alpha_{\mathrm{c}} = \frac{\lambda_{\mathrm{g}}}{c_p^{\mathrm{g}}\gamma_{\mathrm{g}}}\,, \quad \lambda_{\mathrm{c}} = c^{1/3},$$

где λ_{s} и λ_{g} — коэффициенты теплопроводности частиц и окружающего газа, c — объемная доля включений, а c_{s} и c_p^{g} — удельные теплоемкости частиц и газа. В дальнейшем смысл индексных обозначений g, s и p сохраняется. При типичных значениях параметров атмосферных аэрозолей

$$\mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{p}} \sim 95,5\, d_{\mathrm{p}}^2, \qquad \mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{p}} \sim 174,5\, d_{\mathrm{p}}^2, \qquad \mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{c}} \sim 127\, d_{\mathrm{p}}^2 \frac{(1-\lambda_{\mathrm{c}})^2}{\lambda_{\mathrm{c}}^2} \tag{1}$$

для песка, воды и влажного воздуха в ячейке соответственно. В (1) диаметр d_{p} вычисляется в см, а время — в секундах. Для пылевых частиц и песчинок диаметром до 0,033 см время $\mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{p}} \sim 10^{-4} \div 1$ с, для туманов — $\mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{p}} \sim 10^{-8} \div 10^{-4}$ с, для дымов $\mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{p}} \sim 10^{-12} \div 10^{-8}$ с. При объемной доле включений $c \sim 10^{-3} \div 0,1$ время температурной релаксации $\mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{c}}$ удовлетворяет неравенству

$$(1,3\, d_{\mathrm{p}})^2 \lesssim \mathrm{t}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{c}} \lesssim (10,2\, d_{\mathrm{p}})^2 \,. \tag{2}$$

Поскольку смерчи существуют от нескольких минут до семи часов [9], можно, как видно из (1), (2) и сказанного выше, выделить широкий класс гетерогенных смерчей, для которых возможно однотемпературное приближение.

Для применения результатов работ [2, 3] необходимо выполнение условия локального равновесия между процессами испарения и конденсации, когда источником в уравнении эволюции массового содержания примеси, описывающим эти процессы [4], можно пренебречь, что справедливо на интервалах времени, значительно превосходящих время t_{v} выхода на режим насыщения при данной температуре. С этой целью воспользуемся экспериментальными результатами работы [10] для скорости испарения с единичной поверхности, применив их к объему ячейки радиусом среднего расстояния между включениями вблизи испаряющей частицы. Тогда получим оценку

$$\mathrm{t}_{\mathrm{v}} \sim \frac{\gamma_{\mathrm{v}}^*\, d_{\mathrm{p}}\, (1-\lambda_{\mathrm{c}})^3}{1,53 \cdot 10^{-5} c} \exp\left\{ \frac{E_{\mathrm{a}}}{\mathrm{k}} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}, \quad \frac{E_{\mathrm{a}}}{\mathrm{k}} = 4983,11 \text{ K}, \tag{3}$$

где E_{a} — *энергия испарения* (связи), γ_{v}^* — плотность насыщенного пара при температуре T, k — постоянная Больцмана, $T_0 = 273$ К. Индексом v помечаются параметры пара. Если для оценок по формулам (3) в условиях близких к комнатным воспользоваться данными по пару из [11, 12], то получим

$$\mathrm{t}_{\mathrm{v}} \sim 1,23\, d_{\mathrm{p}} \frac{(1-\lambda_{\mathrm{c}})^3}{c} \,. \tag{4}$$

Как видно из (3) и(4), существует ненулевой класс гетерогенных смерчей, для которых гипотезы однотемпературного приближения и *квазиравновесного* процесса испарения—конденсации, когда наблюдается равенство результатов прямых и обратных процессов, оправданы. При $c \to 0$ гетерогенными процессами испарения и конденсации можно пренебречь, т. к. $\mathrm{t}_{\mathrm{v}} \to \infty$.

Следует отметить, что в [10] экспериментальные данные получены, исходя из схемы Я. И. Френкеля [13], примененной к процессу испарения.

Что касается квазиравновесия процесса агрегирования—распада включений внутри торнадо, то этот вопрос, на наш взгляд, недостаточно изучен. Если коагуляция при столкновении мелких частиц обусловлена броуновским движением, то [14] характерное время их агломерации

$$\mathrm{t}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{a}} \sim \frac{3\,\mu_{\mathrm{f}}}{(4\,\mathrm{k}\, T_{\mathrm{f}} n_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eq}})} \sim \frac{3,30 \cdot 10^7}{n_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eq}} \ \ \mathrm{c}} \,, \tag{5}$$

где μ_{f} и T_{f} — вязкость несущей среды (смеси сухого воздуха и пара), $n_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eq}}$ — равновесная числовая плотность включений (их число в см^3). Индексом f здесь и ниже обозначаются параметры несущей среды. Из (5) видно, что в зависимости от равновесной концентрации взвешенной фракции процессом агрегирования — распада можно пренебречь (при достаточно малых $n_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eq}}$); такой процесс можно считать локально равновесным (при больших значениях $n_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eq}}$); при определенных значениях $n_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eq}}$ этот процесс может протекать медленно, но им нельзя пренебречь на гидродинамических масштабах. В последнем случае необходимо провести дополнительные исследования. При описании процесса коагуляции и дробления капельной газовзвеси в [15] отмечаются важные особенности: быстрое затухание броуновских пульсаций с ростом размеров капель; наличие резонансного максимума в области размеров, где определяющую роль играют турбулентные пульсации атмосферы; наличие между этими двумя областями коагуляционного порога; затухание пульсаций для субмиллиметровых частиц. Эти обстоятельства приводят к различию в значениях полуэмпирических коэффициентов коагуляции и дробления капель (а как следствие — к различию времени релаксации к локально равновесному режиму процесса агломерации — распада частиц) в указанных режимах течения газовзвеси. Несомненно, требуется дальнейшее изучение вероятностей и характерного времени выхода процесса агрегирования — распада капель и обводненных частиц на режим локального равновесия, но в рамках рассматриваемого в статье приближения эта проблема обходится.

Теперь остановимся на возможности описания динамики торнадо в приближении гидродинамически идеальных фаз. Вязко-теплопроводными и диффузионными членами в уравнениях переноса несущей среды можно пренебречь, если число Кнудсена, вычисленное по радиусу R_0 минимального поперечного сечения, пренебрежимо мало по сравнению с единицей. Для смерчей это условие выполняется с очень высокой степенью точности. Для взвешенной фазы аналогичными процессами можно пренебречь, если

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{\mu_{\mathrm{p}} a_{\mathrm{p}}}{p_{\mathrm{p}} R_0} = \frac{5\sqrt{\pi}}{48\sqrt{2}} \, \frac{1}{\chi_{\mathrm{p}}} \left\{ \frac{6(1+k_{\mathrm{p}})^2}{(1+\overline{\varepsilon}_{\mathrm{p}})(6+13k_{\mathrm{p}})} \left(1 + 1,6\, c\, \chi_{\mathrm{p}} \, \frac{1+5k_{\mathrm{p}}}{1+k_{\mathrm{p}}}\right)^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{768}{25\pi} \, \frac{1+2k_{\mathrm{p}}}{1+k_{\mathrm{p}}} \, c^2 \chi_{\mathrm{p}}^2 \right\} \frac{d_{\mathrm{p}}}{c\, R_0 \psi_{\mathrm{p}}(c)} \ll 1, \qquad \psi_{\mathrm{p}} = 1 + 4c\, \chi_{\mathrm{p}} \, \frac{1+2k_{\mathrm{p}}}{1+k_{\mathrm{p}}} \, ,
\end{aligned}$$

где d_{p} и χ_{p} — характерный (средний) диаметр включений, определяемый по их объемной доле и парная корреляционная функция включений, $k_{\mathrm{p}} \in [0, 2/3]$ — безразмерный момент инерции частицы [1]. Для $\overline{\varepsilon}_{\mathrm{p}}$ и χ_{p} имеем

$$\begin{aligned}
\overline{\varepsilon}_{\mathrm{p}} &= \frac{5\pi\,(1+k_{\mathrm{p}})^2 k_{\mathrm{f}}}{8\sqrt{2}\,(6+13k_{\mathrm{p}})\, c\, \chi_{\mathrm{p}}} \, , \quad k_{\mathrm{f}} = 6\, f^a \, \mathrm{Re}_{\mathrm{p}}^l \big(1 + a\, \mathrm{Re}_{\mathrm{p}}^b\big) \, \frac{3\,\sigma + 2}{\sigma + 1} \, \frac{\varepsilon\, \gamma_{\mathrm{f}}}{\gamma_{\mathrm{p}}} \, \frac{K_{\mathrm{c}}}{\mathrm{Re}_{\mathrm{p}}} \, , \\
K_{\mathrm{c}} &= \big\{ \big(1 - \lambda_{\mathrm{c}}^5\big) + 2\, \Lambda_{\mathrm{f}} \, \big(1 + \lambda_{\mathrm{c}} + 2\lambda_{\mathrm{c}} + 1,5\lambda_{\mathrm{c}}^5 + 0,5\lambda_{\mathrm{c}}^6\big) \big\} / \Delta \, , \quad \lambda_{\mathrm{c}} = c^{1/3} , \\
\Delta &= \Delta_0 + \Delta' , \qquad \Delta_0 = (1 - \lambda_{\mathrm{c}})^4 \, \big(1 + 1,75\lambda_{\mathrm{c}} + \lambda_{\mathrm{c}}^2\big) \, , \quad \Delta' = 3\, \Lambda_{\mathrm{f}} \big\{ 1 - \\
&- 2,25\lambda_{\mathrm{c}}^2 + 1,5\lambda_{\mathrm{c}}^4 \, (1 + \lambda_{\mathrm{c}}) \, \big(1 - \lambda_{\mathrm{c}}^3\big) + 1,25\lambda_{\mathrm{c}}^6 + \lambda_{\mathrm{c}}^9 \big\} , \qquad \varepsilon = 1 - c \, , \\
\mathrm{Re}_{\mathrm{p}} &= \frac{a_{\mathrm{p}} d_{\mathrm{p}}}{\mu_{\mathrm{f}} / \gamma_{\mathrm{f}}} \, , \quad a_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2\, \mathrm{k}\, \Theta}{m_{\mathrm{p}}}} \, , \qquad \Lambda_{\mathrm{f}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, \frac{\mu_{\mathrm{f}} a_{\mathrm{f}}}{p_{\mathrm{f}} d_{\mathrm{p}}} \, , \qquad a_{\mathrm{f}} = \sqrt{\frac{2\, \mathrm{k}\, T_{\mathrm{f}}}{m_{\mathrm{f}}}} \, , \\
\chi_{\mathrm{p}} &= \frac{1 - 0,160\, c^2 - 0,366\, c^3 + 17,925\, c^4 + O(c^5)}{(1-c)\,(1 - 1,5\, c)} \, .
\end{aligned}$$

Показатель $l = 0,15\sqrt{1/f_{\mathrm{c}} - 1}$, если $\mathrm{Re}_{\mathrm{p}} \in (0,2; 2000)$, иначе $l = 0$, аэродинамический коэффициент формы $f^a = 1,187/\lg(15,385 f_{\mathrm{c}})$ при $\mathrm{Re}_{\mathrm{p}} < 0,2$ и $f^a = f_{\mathrm{c}}^{-0,9}$ при $\mathrm{Re}_{\mathrm{p}} \in [0,2; 2000)$, $f_{\mathrm{c}} \leqslant 1$ — коэффициент формы, γ_{f} и γ_{p} — истинные значения плотности фаз, σ — отношение вязкости внутри включения к вязкости несущей среды, Θ — *псевдотемпература*, обусловленная хаотическим движением включений, m_{p} — средняя масса частиц, m_{f} и p_{f} — средняя масса и давление молекул несущей среды, a_{p} и a_{f} — наиболее вероятные скорости взвешенных частиц и молекул атмосферы.

Для воздуха $a = 0,158$, $b = 2/3$ или $a = 0,160$, $b = 0,687$ [14].

Для торнадо условие $\alpha_2 \ll 1$ можно считать выполненным в широком диапазоне концентрации включений.

Остановимся теперь на оценке влияния кориолисовых сил на течение газовзвеси внутри торнадо. Решение такой задачи для монодисперсной газовзвеси в публикациях [2, 3] было получено в предположении существенной малости таких сил по сравнению с силами тяжести. Строго говоря, наличие кориолисовых сил нарушает предположение о консервативности сил. Течение также можно рассматривать как осесимметричное, если кориолисовы ускорения усреднить по всем направлениям в плоскости, ортогональной оси смерча. Усредненные кориолисовы ускорения обладают минимальным квадратичным отклонением в области задания полярных углов $\phi \in [0, 2\pi]$. Они имеют вид

$$\mathbf{f}_{\mathrm{k}} = 2\,(\omega_{\mathrm{earth}} \times \mathbf{v}) = \ell\,\left(-v_\phi \mathbf{e}_r + v_r \mathbf{e}_\phi\right), \quad \ell = 2\,\omega_{\mathrm{earth}} \sin\Phi,$$

где ω_{earth} — угловая скорость вращения Земли, $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\phi$ — соответствующие орты цилиндрической системы координат, v_r и v_ϕ — радиальная и тангенциальная компоненты скорости смерча, Φ — географическая широта, ℓ — параметр Кориолиса. Однако наличие кориолисовых ускорений нарушает условия применимости интеграла Бернулли и справедливости теоремы Томсона и второй теоремы Гельмгольца для вихрей, которые весьма существенны для нахождения границы идеального ядра смерча. Пренебрежение кориолиссовыми ускорениями возможно, если максимальный безразмерный радиус смерча удовлетворяет условиям

$$\widehat{R}_{\max} = \frac{R_{\max}(\zeta, t)}{R_0} \ll \frac{v_\phi^0}{(R_0 \omega_{\mathrm{earth}})} \sim \frac{\omega_0}{\omega_{\mathrm{earth}}}, \quad \zeta = \frac{z}{H}, \quad H = z_{\max}.$$

Через v_ϕ^0 и ω_0 обозначены значения тангенциальной и угловой скоростей на боковой поверхности смерча в окрестности минимального сечения $z = z_0$, z — продольная (вдоль оси смерча) составляющая цилиндрической системы координат (r, ϕ, z). Таково ограничение на поперечный размер торнадо. Для широкого класса смерчей $\omega_0/\omega_{\mathrm{earth}} \gtrsim 10^4$. В этом случае кориолисовы ускорения мало влияют на динамику развитых смерчей.

При учете кориолисовых ускорений к полученному в [3] для v_ϕ выражению следует добавить частное решение

$$\frac{v_\phi^{(1)}}{v_\phi^0} = \left\{\frac{\widehat{\ell}}{2}\left(\widehat{R} - \exp\left(-\ln \widehat{R}\right)\right) + C_0 \exp(-\ln \widehat{R})\right\}\xi\,, \quad C_0 = 0\,, \quad \xi = \frac{r}{R},$$

где r — расстояние от оси смерча, $R(\zeta, t)$ — радиус боковой поверхности торнадо $r - R = 0$, $\widehat{\ell}$ — безразмерный параметр Кориолиса, т. е. введенный выше параметр ℓ, отнесенный к ω_0. Им можно пренебречь, если $\widehat{R}\widehat{\ell} \ll 1$ (см. также [3]).

Динамику газовзвеси в целом внутри торнадо можно описывать не только в однотемпературном приближении, но и в предположении *односкоростной* среды. Последнее обстоятельство связано с малостью величин $\rho_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{p}}\mathbf{w}/\left(\rho^2 v_\phi^0\right)$ и $\rho_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{p}}\mathbf{w}\mathbf{w}/\left(\rho^2 v_\phi^0 v_\phi^0\right)$, где

$\rho = \rho_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{p}}$, $\rho_{\mathrm{p}} = c\,\gamma_{\mathrm{p}}$ и $\rho_{\mathrm{f}} = \varepsilon\,\gamma_{\mathrm{f}}$ — кажущиеся плотности взвешенной и несущей фаз, $\mathbf{w} = \mathbf{v}_{\mathrm{f}} - \mathbf{v}_{\mathrm{p}}$ — разность скоростей несущей ($\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$) и взвешенной ($\mathbf{v}_{\mathrm{p}}$) фаз. Для разности скоростей фаз имеем (см. [2])

$$\mathbf{w} = \frac{(\gamma_{\mathrm{p}} - \gamma_{\mathrm{f}})(3\sigma + 3)\,d_{\mathrm{p}}^2}{18\mu_{\mathrm{f}} f^a \mathrm{Re}_{\mathrm{p}}^l \big(1 + a\,\mathrm{Re}_{\mathrm{p}}^b\big) K_{\mathrm{c}} (3\sigma + 2)} \left\{ g\mathbf{k} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\}, \tag{6}$$

где g — ускорение свободного падения, а $\mathbf{k}$ — орт, направленный против сил тяжести. Это выражение может быть преобразовано к форме

$$\mathbf{w} = \frac{(\gamma_{\mathrm{p}} - \gamma_{\mathrm{f}})(3\sigma + 3)\,d_{\mathrm{p}}^2}{18\mu_{\mathrm{f}} f^a \mathrm{Re}_{\mathrm{p}}^l \big(1 + a\,\mathrm{Re}_{\mathrm{p}}^b\big) K_{\mathrm{c}} (3\sigma + 2)} \, \frac{\nabla \cdot \Pi}{\rho}. \tag{7}$$

Здесь через Π обозначен тензор напряжений в газовзвеси. Он, вообще говоря, является суммой напряжений в несущей и взвешенной фазе, напряжений, обусловленных процессами агрегирования включений, и магнитных напряжений. В силу относительно большой пространственной протяженности смерчей (малость параметра α_2) в тензоре Π достаточно сохранить только члены, описывающие давление в среде. В этом случае разность тангенциальных скоростей фаз при осесимметричном течении аэрозоля обращается в нуль. Радиальная и продольная составляющие вектора скорости смерча малы по сравнению с v_ϕ^0. Поэтому разность скоростей фаз можно оценить по (6), сохранив лишь первый член в фигурной скобке. Коэффициент стесненности K_{c} изменяется от 1 до 424,8–0,8 при $c \in [8,08 \cdot 10^{-4}; c_{\mathrm{mf}}]$, если Λ_{f} изменяется от 0 до 1 [1], угловая скорость v_ϕ^0 изменяется от 200 м/с до 333,3 м/с [2, 9], $g \sim 9,8$ м/с^2,

$$\frac{\rho_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{p}}}{\rho^2} \, \frac{|\mathbf{w}|}{v_\phi^0} \sim \frac{(10,8 \div 18,0)\,d_{\mathrm{p}}^2}{f^a \mathrm{Re}_{\mathrm{p}}^l \big(1 + a\,\mathrm{Re}_{\mathrm{p}}^b\big) K_{\mathrm{c}}} \, \frac{\rho_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{p}}}{\rho^2}. \tag{8}$$

Здесь, как и ранее, d_{p} измеряется в сантиметрах. Как видно из (6), замедление продольной составляющей скорости внутри смерча [3] уменьшает влияние разности скоростей фаз на течение газовзвеси в целом. При наиболее вероятной малой скорости включений оценка безразмерной разности скоростей фаз по (8) производится путем замены в Re_{p} величины a_{p} на $|\mathbf{w}|$. Из решения для v_r, полученного в [3], следует, что отношение v_r/v_z в зависимости от z ведет себя, как $k_z \widehat{R}$, где $k_z = R_0/H$. Следовательно, для достаточно удлиненных смерчей оправдано предположение о малости безразмерной, отнесенной к v_ϕ^0, разности радиальных скоростей фаз. Вкладом напряжений в газовзвеси, обусловленных разностью скоростей фаз, можно пренебречь с хорошей степенью точности по сравнению с атмосферным давлением p_{a} вне смерча.

Возможность квазистационарного описания торнадо связана с длительностью существования смерчей. Это позволяет выбрать достаточно большой (удовлетворяющий нас) элементарный интервал времени dt. Согласно методу оптимизации [1], это означает усреднение макропараметров по времени $t \in [t - dt/2, t + dt/2]$ при минимизации интегральной квадратичной невязки упрощенных уравнений на этом интервале.

Основные предположения, используемые для нахождения предельного решения. Решение предельной задачи о течении газовзвеси внутри идеального ядра смерча ищется при следующих предположениях.

1. Среда гидродинамически идеальна и нетеплопроводна. Этим полное решение задачи о течении газовзвеси в вязкой области внутри смерча вблизи его боковой поверхности исключается из рассмотрения.

2. Боковая поверхность торнадо $\xi = 1$ является поверхностью раздела, что приводит к скачку плотности, скорости среды и наиболее вероятной скорости включений при переходе через указанную границу, но к непрерывности давления (p) на ней [1, 6].

3. Продольная скорость среды v_z мало отличается от сглаженного значения $\overline{v}_z$, зависящего только от продольной координаты z, а от времени, в силу предположения о квазистационарности течения, как от параметра, что позволяет найти ее значение из решения квазиодномерной задачи.

4. Массовые силы консервативны.

5. Процесс испарения—конденсации локально равновесный, а процесс агрегирования—распада — локально равновесный или им можно пренебречь. Это предположение позволяет считать среду баротропной при выполнении условия 1 и включении энергии разрыва (или агрегирования) частиц, а также энергии активации испарения с поверхности капель и обводненных частиц в полную энергию.

6. Течение квазистационарное.

7. Среда и фазы допускают аппроксимацию политропной средой [16], что позволяет при выполнении условий 1 и 4–6 до решения задачи внутри смерча найти параметры среды на боковой поверхности идеального ядра торнадо, найти форму этой поверхности из интеграла Бернулли [2], а затем значения давления и плотности внутри ядра.

8. Течение газовзвеси внутри торнадо с удовлетворительной степенью точности можно считать осесимметричным.

9. Разность скоростей фаз мала по сравнению со значением тангенциальной скорости смерча в минимальном сечении z_0 его боковой поверхности.

Интегралы движения. Как показано в [1], при сделанных предположениях вдоль траектории сохраняется отношение произведения средних значений аддитивных инвариантов на числовую плотность элементов системы к плотности среды. В рамках рассматриваемой задачи дополнительными аддитивными инвариантами являются массы молекул (m_i) и частиц (m), а также объемы включений (τ). При этом следует иметь в виду, что $c = n_{\mathrm{p}}\tau_{\mathrm{p}}$, $\rho_{\mathrm{p}} = n_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{p}}$, $\rho_{\mathrm{f}} = n_{\mathrm{f}}m_{\mathrm{f}}$. Буквами p и f, как и раньше, помечены усредненные значения параметров фаз. В результате будем иметь следующую систему интегралов движения, облегчающую решение нашей задачи:

$$c\,\frac{\gamma_{\mathrm{p}}}{\rho} = \mathrm{C}_{\mathrm{p}}\,, \quad \varepsilon\,\frac{\gamma_{\mathrm{f}}}{\rho} = \mathrm{C}_{\mathrm{f}}\,, \quad \frac{n_{\mathrm{p}}}{\rho} = \mathrm{C}_n^{\mathrm{p}}, \quad \frac{n_{\mathrm{f}}}{\rho} = \mathrm{C}_n^{\mathrm{f}}, \qquad \frac{c}{\rho} = \mathrm{C}, \tag{9}$$

$$\tau_{\mathrm{p}} = \mathrm{C}_\tau, \quad m_{\mathrm{p}} = \mathrm{C}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}, \quad m_{\mathrm{f}} = \mathrm{C}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{f}}, \quad \mathrm{C}_{\mathrm{f}} + \mathrm{C}_{\mathrm{p}} = 1, \quad \rho = \mathrm{C}_\rho. \tag{10}$$

Интегралы выписаны в безразмерных переменных

$$r = R_0\,\widehat{r}\,, \quad z = H\,\widehat{z}\,, \quad \mathbf{v} = v_\phi^0\,\widehat{\mathbf{v}}\,, \quad \mathbf{w} = v_\phi^0\,\widehat{\mathbf{w}}\,, \quad a_{\mathrm{p}} = v_\phi^0\,\widehat{a}_{\mathrm{p}}\,, \quad n_{\mathrm{p}} = n_{\mathrm{p}}^0\widehat{n}_{\mathrm{p}}\,,$$
$$\rho_{\mathrm{f}} = \rho_0\,\widehat{\rho}_{\mathrm{f}}, \quad \rho_{\mathrm{p}} = \rho_0\,\widehat{\rho}_{\mathrm{p}}, \quad p = p_0\,\widehat{p}, \quad p_{\mathrm{f}} = p_0\,\widehat{p}_{\mathrm{f}}\,, \quad p_{\mathrm{p}} = p_0\,\widehat{p}_{\mathrm{p}}, \quad n_{\mathrm{f}} = n_{\mathrm{f}}^0\widehat{n}_{\mathrm{f}}\,,$$

где ноликом помечены значения на боковой поверхности смерча в сечении z_0. «Шапочки» над безразмерными переменными для простоты записи здесь и далее опускаются.

В силу квазистационарности течения газовзвеси траектории совпадают с линиями тока. Поэтому правые части (18) и (19) постоянны на линиях тока. Как видно из (19), в предельной задаче газовзвесь *несжимаема на траектории.* Не следует путать с несжимаемостью среды: она сжимаема.

К (18) и (19) нужно присоединить интеграл Бернулли:

$$\frac{v^2-v_1^2}{2}+\frac{\mathrm{Eu}\,\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p-p_1}{\rho_1}+\mathrm{Fr}\,(\zeta-\zeta_0)=0,\quad \mathrm{Eu}=\frac{p_0}{\rho_0\big(v_\phi^0\big)^2}\,,\quad \mathrm{Fr}=\frac{gH}{\big(v_\phi^0\big)^2}\,. \tag{11}$$

Единицей помечены значения параметров в «начале» линии тока, проходящей через сечение $z=z_0$, $\gamma=\mathrm{const}$ — показатель политропы газовзвеси в целом.

Для термодинамически неидеальных сред, к коим относятся и концентрированные газовзвеси, понятие политропы может носить характер аппроксимации. Показатель γ имеет смысл усредненного по рассматриваемому объему течения газовзвеси отношения дифференциалов $d\ln p$ к $d\ln\rho$. Такая аппроксимация соответствует минимуму интегрального квадратичного отклонения в указанной области от точного значения параметра [1]. В этом случае

$$\gamma=\overline{\varepsilon\,\eta_\mathrm{f}+c\,\eta_\mathrm{p}}\,,\quad \eta_\mathrm{f}=\frac{c_p^\mathrm{eff}-c_\mathrm{m}}{c_v^\mathrm{eff}-c_\mathrm{m}}\,,\quad \eta_\mathrm{p}=\left(1+\frac{2}{j_\mathrm{p}}\right)\left(1+c\,\frac{\partial}{\partial c}\ln\psi_\mathrm{p}\right).$$

Здесь $c_\mathrm{m}=\pm c_\mathrm{s}\,\rho_\mathrm{p}/\rho_\mathrm{f}$, c_s и j_p — удельная теплоемкость и число степеней свободы включений, c_p^eff и c_v^eff — удельные теплоемкости несущей среды при постоянном давлении и постоянном объеме. Выбор знаков ($\pm$) обусловлен нагревом или охлаждением газа частицами. Аппроксимация давления фаз и среды эффективными политропами поставляет еще 3 интеграла движения:

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_1}{\rho_1^\gamma},\qquad \frac{p_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{p}^{\eta_\mathrm{p}}}=\left(\frac{p_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{p}^{\eta_\mathrm{p}}}\right)_1,\qquad \frac{p_\mathrm{f}}{\rho_\mathrm{f}^{\eta_\mathrm{f}}}=\left(\frac{p_\mathrm{f}}{\rho_\mathrm{f}^{\eta_\mathrm{f}}}\right)_1. \tag{12}$$

Недостаток информации о c_p^eff и c_v^eff при наличии процессов гетерогенного испарения—конденсации и агрегирования—распада включений не допускает непосредственного вычисления показателя γ. Он может быть определен косвенным образом. Например, по Eu и Fr при $\zeta=1$, где $\partial R/\partial\zeta=0$.

Решение предельной задачи о ядре торнадо. В рассматриваемом нами случае для вычисления компонент скорости смерча можно воспользоваться решением из [3], упростив его применительно к несжимаемой вдоль линии тока газовзвеси. В безразмерных переменных оно примет вид

$$v_z=\frac{v_z^0}{R^2\ll 1},\quad v_r=k_z v_z\,\xi\,\frac{\partial R}{\partial\zeta}\,,\quad v_\phi=\frac{\xi^A}{R},\quad A=\overline{\left(\frac{1-b_1}{1+b_1}\right)}, \tag{13}$$

где $b_1\,(c(\zeta))=3\kappa_\mathrm{p}/\big(4\mu_\mathrm{p}\big)$, κ_p и μ_p — объемная и сдвиговая вязкости, выражения для которых приведены в [1]. Объемная доля c через решение для плотности среды определяется выражением $c=\big(\rho-\gamma_\mathrm{f}\big)/\big(\gamma_\mathrm{p}-\gamma_\mathrm{f}\big)$.

Линии тока, как следует из их определения и (13), строятся по формулам

$$\xi=\mathrm{const},\quad \zeta=k_z\,v_z^0\,\xi^{1-A}\phi+\zeta_0,\quad 1-A\geqslant 0,\quad \phi\in[0,2\pi], \tag{14}$$

соответствующим расширяющейся винтовой линии, а предельный радиус ядра смерча вне тонкого слоя $\zeta_0 \gg k_z v_z^0$ вблизи Земли задается выражением

$$R = \left\{ 1 - 2\,\mathrm{Fr}\,(\zeta - \zeta_0) + \frac{2\,\mathrm{Eu}\,\gamma}{\gamma - 1}\,\left(1 - p_{\mathrm{a}}(1, \zeta)\right) \right\}^{-1/2}. \tag{15}$$

Здесь p_{a} — атмосферное давление вне смерча. При получении (15) использовано предположение 2. Если, как это принято в метеорологии [6], воспользоваться для атмосферы вне смерча приближением термоклина с градиентом температуры $\tau_{\mathrm{T}} = \mathrm{const}$, то из условия $\partial R / \partial \zeta |_{\zeta=1} = 0$ будем иметь

$$\gamma = \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\tau_{\mathrm{T}}\,H}{T(1,1)} \right)^{\overline{\lambda}-1} \right\}^{-1}, \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \left(1 - \frac{\tau_{\mathrm{T}}\,H}{T(1,1)} \right)^{1-\overline{\lambda}}, \quad \overline{\lambda} = \frac{g}{R_{\mathrm{f}} \tau_{\mathrm{T}}}\,,$$

где $T(1,1) = T(1,\zeta_0) - H\tau_{\mathrm{T}}\,(1 - \zeta_0)$, $T(1,\zeta_0)$ — температура атмосферы при $\xi = 1$ и $\zeta = \zeta_0$, R_{f} — газовая постоянная влажного воздуха. Для стандартной атмосферы $\tau_{\mathrm{T}} = 6{,}5 \cdot 10^{-3}$ К/м [6].

Замыкание системы (7), (18)–(15) требует знания отношения p_1/ρ_1, получаемого из решения предельного уравнения для v_r в окрестности $\zeta = \zeta_o$. Это уравнение и его решение при учете условий на линии $\xi = 1$, $\zeta = \zeta_0$ имеют вид

$$\frac{\mathrm{Eu}\,\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,\frac{p}{\rho} = \frac{v_\phi^2}{\xi}\,, \qquad \frac{\mathrm{Eu}\,\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\mathrm{Eu}\,\gamma}{\gamma - 1} - \frac{1 - \xi^{2A}}{2\,A}. \tag{16}$$

Из (16) видно уменьшение отношения p_1/ρ_1 к оси торнадо.

Температура смерча (T) и псевдотемпература (Θ) включений на линиях тока определяются из термических уравнений состояния фаз с учетом равенства $p \equiv \varepsilon\,p + c\,p = p_{\mathrm{f}} + p_{\mathrm{p}}$, что дает

$$T = p / \left(\gamma_{\mathrm{f}} R_{\mathrm{f}}\right), \qquad a_{\mathrm{p}}^2 = 2\,p / \left(\gamma_{\mathrm{p}} \psi_{\mathrm{p}}\right).$$

Пространственно однородное гетерогенное испарение. Процесс гетерогенной конденсации более вероятен при взаимодействии 2-х молекул с поверхностью частицы. Поэтому подобно агрегированию двух частиц [5] пространственно однородное испарение описывается логистическим уравнением. Его решением является функция [6]

$$x = \frac{x_0\,\exp\left(\alpha\,t\right)}{\left\{1 - x_0 + x_0\,\exp\left(\alpha\,t\right)\right\}} \to 1 \text{ при } t/\mathrm{t_v} \to \infty, \quad x = \frac{n_{\mathrm{f}}}{n_{\mathrm{f}}^*}\,, \quad x_0 = x|_{t=0},$$

где n_{f}^* — числовая концентрация воздуха в условиях насыщения, $\alpha = 1/\mathrm{t_v}$.

Заключение. Предельная задача о гетерогенном торнадо схватывает основные особенности явления. Как видно из (7) и (18)–(16), радиус смерча растет, а тангенциальная и продольная его скорости убывают с высотой, давление убывает с высотой и при приближении к оси торнадо. Эффективный показатель политропы зависит от поля сил тяжести и градиента температуры, а через высоту смерча H еще от физических свойств среды и объемной доли включений. В силу несжимаемости среды вдоль траектории интегралами движения становятся полная внутренняя удельная энергия хаотического движения включений и температура торнадо. Численные оценки показывают, что в рамках принятого описания смерчей $|\mathbf{w}| \sim 0{,}1 \div 0{,}3$ м/с и $|\mathbf{w}| \lesssim a_{\mathrm{p}}$.

Литература

1. *Цибаров В. А.* Кинетический метод в теории газовзвесей. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. 192 с.

2. *Лутов Н. Н., Петров Д. А., Цибаров В. А.* Течение вращающихся газовзвесей // Аэродинамика / Под ред. Р. Н. Мирошина. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002. С. 82–89.

3. *Петров Д. А., Цибаров В. А.* Течение аэрозоля внутри торнадо // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, Вып. 3, 2005. С. 95–101.

4. *Петров Д. А., Цибаров В. А.* Стохастическая модель трехфазной конденсирующей газовзвеси // Четвертые Поляховские чтения. СПб.: «ВВМ», 2006. С. 409–414.

5. *Петров Д. А., Цибаров В. А.* Стохастическая модель взвеси пыли и капель во влажном воздухе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 4. С. 38–46.

6. *Дулов В. Г., Цибаров В. А.* Математическое моделирование в современном естествознании. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. 244 с.

7. *Баутин С. П.* Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.

8. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.

9. *Наливкин Д. В.* Смерчи. М.: Наука, 1984. 111 с.

10. *Марков И. И., Хащенко А. А., Вечер О. В.* О скорости испарения жидкости с ее свободной поверхности и с поверхности нагрева // http:www.ncstu.info / content /_docs / pdf /_trudi /_phys-chemistry /6/13.pdf. 7 с.

11. *Гороновский И. Т., Назаренко Ю. П., Некряч Е. Ф.* Краткий справочник по химии. Киев: Наукова Думка, 1987. 829 с.

12. Краткий справочник химика / Под ред. Б. В. Некрасова. М.; Л.: Госхимиздат, 1951. 675 с.

13. *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. М.: Наука, 1975. 592 с.

14. *Бусройд Р.* Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир, 1976. 378 с. (Пер. с англ. R. G. Boothroyd. Flowing Gas-Solids Suspension. 1971.)

15. *Стасенко А. Л.* Физическая механика многофазных потоков. М.: МФТИ, 2004. 136 с.

16. *Базаров И. П.* Термодинамика. М.: ГИФМЛ, 1961. 292 с.

Статья поступила в редакцию 14 января 2010 г.